ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Damian SŁOTA

ELEMENTARNY RACHUNEK CAŁKOWY W MODELU NIESTANDARDOWYM CHWISTKA I LAUGWITZA

Streszczenie. W niniejszej pracy zaprezentowana jest teoria całkowalności w modelu niestandardowym Chwistka i Laugwitza. Dowodzi się równoważności całkowalności funkcji w sensie niestandardowym i w sensie Riemanna oraz wyprowadza się metodami niestandardowymi podstawowe własności całki.

ELEMENTARY APPROACH TO INTEGRAL CALCULUS IN THE NON-STANDARD MODEL OF CHWISTEK AND LAUGWITZ

Summary. In the paper, the theory of integrability is presented in the non-standard model of Chwistek and Laugwitz. The equivalence of integrability of functions in the Riemann and non-standard sense is proved and main properties of the integral are derived by means of non-standard methods.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В НЕСТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ ХВИСТКА И ЛЯУГВИЦА

Резюме. В этой статьи представлена теория интегрируемости в нестандартной модели Хвистка и Ляугвица. Доказана эквивалентность интегрируемости функции в смысле Риманна и в нестандартном смысле. Кроме того мы выводим главные свойства интеграла использовая нестандартные методы.

1. Zbiory i funkcje normalne

W modelu niestandardowym analizy (patrz [4]) wyróżnimy teraz pewne zbiory obiektów niestandardowych. W tym celu wprowadzimy definicję.

Definicja 1. *Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną obiektów analizy rzeczywistej (np. funkcji rzeczywistych, podzbiorów $\mathbb{R}$ itp.). Dwa ciągi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_n, B_n \in \mathcal{F}$ dla $n \in \mathbb{N}$, są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant n_0 \quad A_n = B_n.$$

Klasy abstrakcji powyższej relacji będziemy nazywać obiektami normalnymi (np. funkcjami normalnymi, zbiorami normalnymi itd.).

Wprowadzona powyżej relacja jest oczywiście relacją typu równoważności. Liczby progresyjne są liczbami normalnymi, wystarczy przyjąć $\mathcal{F} = \mathbb{R}$. Przykładem przedziałów normalnych są zbiory o postaci:

$$\{\widehat{x}_n \in \mathbb{K} : \widehat{a}_n \leqslant \widehat{x}_n \leqslant \widehat{b}_n\},$$

gdzie $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n \in \mathbb{K}$. Natomiast biorąc klasę abstrakcji ciągu funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

otrzymamy funkcję normalną, która reprezentuje deltę Diraca (zob. [3]).

Definicja 2. *Jeśli f jest funkcją normalną o reprezentancie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to dla dowolnych $\widehat{x}_n, \widehat{y}_n \in \mathbb{K}$ określamy:*

$$f(\widehat{x}_n) = \widehat{y}_n \;:\Leftrightarrow\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant n_0 \quad f_n(x_n) = y_n.$$

Z definicji tej wynika, że funkcja normalna f o reprezentancie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest określona na zbiorze normalnym A, który ma reprezentanta $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie A_n jest dziedziną funkcji f_n. Z Definicji 1 i własności klas abstrakcji otrzymujemy następujący wniosek, gwarantujący poprawność Definicji 2.

Wniosek 1. *Załóżmy, że $S \neq \emptyset$ jest zbiorem normalnym oraz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są jego dwoma reprezentantami. Wówczas dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ $S_n = T_n$.*
Załóżmy, że f jest funkcją normalnym oraz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są jej reprezentantami. Wówczas dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ $f_n = g_n$. ∎

W dalszych rozważaniach interesować nas będą tylko zbiory i ciągi normalne. Każdy ciąg normalny $s : \mathbb{N}_p \to \mathbb{K}$ jest klasą abstrakcji pewnego ciągu $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, którego elementami są ciągi rzeczywiste. Wówczas zgodnie z Definicją 2

$$s(\widehat{n}_k) = \widehat{y}_k \Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant k_0\ \ y_k = s_k^{n_k}. \tag{$*$}$$

Każdy reprezentant $s(\widehat{n}_k) =: \widehat{s}_k^{n_k}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych. Z $(*)$ wynika, że dla dostatecznie dużych k jego wyrazy są równe $s_k^{n_k}$. Jeśli będzie istnieć taka liczba $\widehat{N_k} \in \mathbb{N}_p$, że ciąg normalny s jest określony tylko dla wszystkich $\widehat{m_k} \leqslant \widehat{N_k}$, to będziemy mówić, że ciąg normalny s jest hiperskończony. Dla ciągu normalnego s wprowadzimy następującą definicję niestandardowego sumowania.

Definicja 3. *Będziemy mówić, że $\widehat{y}_n$ jest sumą pierwszych $\widehat{M_n}$ wyrazów ciągu normalnego s, jeśli*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\quad y_n = \sum_{i=1}^{M_n} s_n^i. \tag{$**$}$$

Będziemy wtedy pisać $\widehat{y}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} \widehat{s}_n^k$.

Z Wniosku 1 wynika, że suma ta nie zależy od wyboru reprezentanta. Sumowanie w $(**)$ jest określone poprawnie, bo $M_n \in \mathbb{N}$ i $s_n^i \in \mathbb{R}$ dla dowolnych $i, n \in \mathbb{N}$.

Niestandardowym podziałem odcinka rzeczywistego $[a, b]$ nazywać będziemy hiperskończony ciąg normalny dodatnich liczb nieskończenie małych $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$, taki że

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} \widehat{x}_n^k = {}^*(b-a)$$

dla pewnej liczby progresyjnej $\widehat{M_n}$. Selektorem podziału będziemy nazywać hiperskończony ciąg normalny $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$, jeśli

$$\widehat{a}_n^{m_n} \in \left[\widehat{a} + \sum_{\widehat{i}=\widehat{1}}^{\widehat{m}_n-\widehat{1}} \widehat{x}_n^i, \widehat{a} + \sum_{\widehat{i}=\widehat{1}}^{\widehat{m}_n} \widehat{x}_n^i\right] = {}^*\left[a + \sum_{i=1}^{m_n-1} x_n^i, a + \sum_{i=1}^{m_n} x_n^i\right],$$

czyli, gdy n–ty wyraz liczby $\widehat{m}_n$ należy do przedziału

$$\left[a + \sum_{i=1}^{m_n-1} x_n^i\ ,\ a + \sum_{i=1}^{m_n} x_n^i\right].$$

2. Definicja i własności całki

Wprowadzimy teraz definicje całkowalności funkcji rzeczywistych, która – jak się okaże – jest równoważna z definicją całkowalności w sensie Riemanna.

Definicja 4. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą. Jeśli istnieje liczba rzeczywista g, taka że dla dowolnego niestandardowego podziału $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ odcinka $[a,b]$, dowolnego jego selektora $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ i odpowiadającej im liczby $\widehat{N}_n$ zachodzi:*

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k \simeq \widehat{g},$$

to będziemy mówić, że funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ i pisać $\int_a^b f(x)dx = g$.

Udowodnimy teraz lemat, który wykorzystamy w dowodzie następnego twierdzenia.

Lemat 1. *Jeśli $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ jest hiperskończonym ciągiem normalnym, to*

$$\exists \widehat{t}_n \leqslant \widehat{N}_n \ \forall \widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n \quad \widehat{x}_n^{m_n} \leqslant \widehat{x}_n^{t_n}.$$

Dowód. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech t_n będzie taką liczbą naturalną, dla której $x_n^{t_n}$ jest największą spośród liczb $x_n^1, \ldots, x_n^{N_n}$. Wówczas

$$\widehat{x}_n^{m_n} \leqslant \widehat{x}_n^{t_n}$$

dla dowolnego $\widehat{m}_n \in \mathbb{N}_p, \widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n$. ∎

Wykażemy teraz równoważność wprowadzonej powyżej definicji z definicją całkowalności w sensie Riemanna.

Twierdzenie 1. *Funkcja ograniczona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalna w sensie Definicji 4.*

Dowód. $\Rightarrow$ Mamy pokazać, że wszystkie niestandardowe sumy całkowe są nieskończenie blisko pewnej liczby standardowej. Zaprzeczeniem tezy jest zachodzenie jednego z dwóch warunków:

(i) istnieje $\varepsilon > 0$ i dwie sumy, takie że moduł ich różnicy jest większy od $\widehat{\varepsilon}$,

(ii) istnieje suma, która nie ma części standardowej.

Przypuśćmy najpierw, że zachodzi (i). Istnieją więc dwa niestandardowe podziały $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$, $(\widehat{y}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$ i ich selektory $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$, $(\widehat{b}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$, takie że

$$\left| \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k - \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} f_p(\widehat{b}_n^k) \cdot \widehat{y}_n^k \right| > \widehat{\varepsilon}$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$. Obierzmy $\widehat{i}_n, \widehat{j}_n$ tak, by

$$\widehat{x}_n^{i_n} \text{ było największym wśród } \widehat{x}_n^{m_n}, \quad \widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n,$$

$$\widehat{y}_n^{j_n} \text{ było największym wśród } \widehat{y}_n^{m_n}, \quad \widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n.$$

Oczywiście $\widehat{x}_n^{i_n} \simeq \widehat{0} \simeq \widehat{y}_n^{j_n}$. Ponieważ

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{x}_n^k = {}^*(b-a) = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} \widehat{y}_n^k,$$

więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\sum_{k=1}^{N_n} x_n^k = b - a = \sum_{k=1}^{M_n} y_n^k$$

dla każdego $n \geqslant n_0$. Oznaczmy

$$P'_{ni} = \left[a + \sum_{k=1}^{i-1} x_n^k, a + \sum_{k=1}^{i} x_n^k\right] \qquad i = 1, \ldots, N_n,$$

$$P''_{ni} = \left[a + \sum_{k=1}^{i-1} y_n^k, a + \sum_{k=1}^{i} y_n^k\right] \qquad i = 1, \ldots, M_n$$

dla $n \geqslant n_0$ (przyjmiemy tu i dalej konwencję: $\sum_{k=1}^{0} := 0$). Przyjmijmy $\Pi'_n = \{P'_{n1}, \ldots, P'_{nN_n}\}, \Pi''_n = \{P''_{n1}, \ldots, P''_{nM_n}\}$. Średnice podziałów Π'_n, Π''_n są odpowiednio równe $x_n^{i_n}, y_n^{j_n}$. Wobec, tego że $\widehat{x}_n^{i_n} \simeq \widehat{0} \simeq \widehat{y}_n^{j_n}$, Π'_n i Π''_n są ciągami normalnymi podziałów (w sensie standardowym). Z definicji selektora mamy:

$$a_n^i \in \left[a + \sum_{k=1}^{i-1} x_n^k, a + \sum_{k=1}^{i} x_n^k\right] = P'_{ni} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \forall i \in \{1, \ldots, N_n\},$$

$$b_n^i \in \left[a + \sum_{k=1}^{i-1} y_n^k, a + \sum_{k=1}^{i} y_n^k\right] = P''_{ni} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \forall i \in \{1, \ldots, M_n\}.$$

Przyjmijmy

$$a_{ni} = a_n^i \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N_n\},$$
$$b_{ni} = b_n^i \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \ldots, M_n\}.$$

Oznaczmy $s'_n = \sum_{i=1}^{N_n} f(a_{ni}) \cdot |P'_{ni}|$ i $s''_n = \sum_{i=1}^{N_n} f(b_{ni}) \cdot |P''_{ni}|$.
Dzięki założonej całkowalności w sensie Riemanna ciągi standardowe $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(s''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżne do tej samej liczby rzeczywistej. Istnieje więc $c \in \mathbb{R}$, takie że dla wszystkich nieskończonych liczb naturalnych $\widehat{l}_n$ i $\widehat{m}_n$ zachodzi:

$$s''_{\widehat{l}_n} \simeq \widehat{c} \simeq s'_{\widehat{m}_n}. \qquad (*)$$

Dla dowolnych $\widehat{l}_n, \widehat{m}_n \in \mathbb{N}_p$ mamy:

$$s'_{\widehat{m}_n} = \widehat{s'}_{m_n} = {}^*\left(\sum_{k=1}^{N_{m_n}} f(a_{m_n k}) \cdot |P'_{m_n k}|\right) = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_{m_n}} f_p(\widehat{a}_{m_n}^k) \cdot \widehat{x}_{m_n}^k$$

oraz

$$s''_{\widehat{l_n}} = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_{l_n}} f_p(\widehat{b}^k_{l_n}) \cdot \widehat{y}^k_{l_n}.$$

Przyjmując $m_n = l_n = n$ dla $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy:

$$| s'_{\widehat{m_n}} - s''_{\widehat{l_n}} | = \left| \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}^k_n) \cdot \widehat{x}^k_n - \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} f_p(\widehat{b}^k_n) \cdot \widehat{y}^k_n \right| \geqslant \widehat{\varepsilon},$$

co jest sprzeczne z $(*)$. Pokazaliśmy więc, że przypadek (i) prowadzi do sprzeczności.

Pozostaje do rozpatrzenia drugi przypadek.

(ii) Załóżmy, że

$$\widehat{y}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}^k_n) \cdot \widehat{x}^k_n$$

nie posiada części standardowej. Liczba $\widehat{y}_n$ jest skończona, bo f jest funkcją ograniczoną i każde $\widehat{x}^k_n$ jest nieskończenie małą. Istnieją podciągi ([4, Własność 11]) $(y_{n_l}), (y_{n'_l})$ zbieżne w $\mathbb{R}$ do różnych granic. Mamy

$$\widehat{y}_{n_l} = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_{n_l}} f_p(\widehat{a}^k_{n_l}) \cdot \widehat{x}^k_{n_l}.$$

Ponieważ

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{x}^k_n = {}^*(b-a),$$

więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\sum_{k=1}^{N_{n_l}} x^k_{n_l} = b - a,$$

dla każdego $n_l \geqslant n_0$, czyli

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_{n_l}} \widehat{x}^k_{n_l} = {}^*(b-a).$$

Wówczas także $(\widehat{a}^{m_{n_l}}_{n_l})$ jest selektorem podziału $(\widehat{x}^{m_{n_l}}_{n_l})$. Podobnie określamy podział $(\widehat{x}^{m_{n'_l}}_{n'_l})$ i selektor $(\widehat{a}^{m_{n'_l}}_{n'_l})$. Skonstruowaliśmy więc dwie niestandardowe sumy całkowe, które nie są nieskończenie bliskie (bo ciągi je definiujące są zbieżne do różnych liczb rzeczywistych). Wobec dowiedzionej już części twierdzenia daje to sprzeczność z założoną całkowalnością w sensie Riemanna.

$\Leftarrow$ Niech teraz będzie dany ciąg normalny podziałów $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odcinka $[a,b]$, gdzie $\Pi_n = \{P_{n1}, \ldots, P_{nN_n}\}$ oraz standardowy selektor ciągu podziałów $(a_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_{ni} \in P_{ni}$ dla n, $i \in \mathbb{N}$. Przyjmijmy

$$x^i_n = \begin{cases} |P_{ni}| & i \leqslant N_n, \\ 0 & i > N_n. \end{cases}$$

Na mocy założonej normalności ciągu podziałów mamy $\lim_{n\to\infty} x_n^i = 0$ dla każdego i, a więc $\widehat{x}_n^{i_n} = {}^*(x_n^{i_n})$ są nieskończenie małe. Ponadto

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{x}_n^k = {}^*(b-a).$$

Ponieważ

$$a_{ni} \in P_{ni} \subset \left[a + \sum_{k=1}^{i-1} x_n^k, a + \sum_{k=1}^{i} x_n^k\right]$$

dla $i \in \{1, \ldots, N_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, więc przyjmując $\widehat{a}_n^{i_n} = {}^*(a_{ni_n})$ dla $\widehat{i}_n \leqslant \widehat{N}_n$ dostajemy selektor naszego niestandardowego podziału. Niech

$$s_n = \sum_{k=1}^{N_n} f(a_{nk})|P_{nk}|$$

oraz

$$\widehat{y}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_{nk}) \cdot \widehat{x}_n^k.$$

Pozostaje pokazać, że $\widehat{s}_n \simeq \widehat{y}_n$. Z określenia sumy niestandardowej istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_n} f(a_{nk}) \cdot x_n^k = \sum_{k=1}^{N_n} f(a_{nk}) \cdot |P_{nk}| = s_n,$$

dla każdego $n \geqslant n_0$, wobec czego $\widehat{y}_n \simeq \widehat{s}_n$. Dzięki założeniu $\widehat{y}_n \simeq \widehat{c}$ dla pewnej liczby rzeczywistej c, a na mocy wcześniejszej własności, $\lim_{n\to\infty} s_n = c$. Wobec dowolności wyboru sumy całkowej i niezależności liczby c od podziału dostajemy tezę. ∎

Z powyższego dowodu wynika nie tylko jednoczesne istnienie całek, ale także ich równość.

Skonstruujemy teraz wspólne zagęszczenie dwu niestandardowych podziałów odcinka $[a, b]$. Załóżmy, że $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ i $(\widehat{z}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$ są niestandardowymi podziałami odcinka $[a, b]$, takimi że

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{x}_n^k = {}^*(b-a) = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} \widehat{z}_n^k,$$

gdzie $\widehat{N}_n, \widehat{M}_n \in \mathbb{N}_p$. Załóżmy dodatkowo, że ich selektorami są odpowiednio $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ oraz $(\widehat{b}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$. Ponieważ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\sum_{k=1}^{N_n} x_n^k = b - a = \sum_{k=1}^{M_n} z_n^k$$

dla każdego $n \geqslant n_0$, więc możemy przyjąć

$$P_{ni} = \left[a + \sum_{k=1}^{i-1} x_n^k, a + \sum_{k=1}^{i} x_n^k\right], \qquad i \in \{1, \ldots, N_n\},$$

$$P'_{ni} = \left[a + \sum_{k=1}^{i-1} z_n^k, a + \sum_{k=1}^{i} z_n^k\right], \qquad i \in \{1, \ldots, M_n\}$$

dla $n \geqslant n_0$.

Definiujemy zbiór L_n par (i,j) indeksów: $(i,j) \in L_n$, jeśli $P''_{nij} := P_{ni} \cap P'_{nj} \neq \emptyset$. Oczywiście moc S_n zbioru L_n nie przekracza $N_n \cdot M_n$ oraz

$$\bigcup_{l \in L_n} P''_{nl} = [a, b],$$

przy czym przedziały P''_{nij} mają wnętrza parami rozłączne.

Każdej parze $(i,j) \in L_n$ przyporządkujemy teraz inną liczbę ze zbioru $L'_n := \{1, \ldots, S_n\}$ (np. z zachowaniem porządku w jakim umieszczone są na prostej rzeczywistej przedziały P''_{nij}).

Tak zdefiniowane odwzorowanie jest bijekcją, więc istnieje odwzorowanie φ odwrotne do niego. Przez c_{nk} oznaczmy prawy koniec przedziału $P''_{n\varphi(k)}$ dla $k \in L'_n$ oraz dodatkowo $c_{n0} = a$. Zdefiniujmy ponadto

$$y_n^k = \begin{cases} c_{nk} - c_{nk-1} & \text{dla} \quad k \leqslant S_n, \\ 0 & \text{dla} \quad k > S_n. \end{cases}$$

Mamy wtedy:

$$\sum_{k=1}^{S_n} y_n^k = c_{n1} - a + c_{n2} - c_{n1} + \ldots + b - c_{nS_n-1} = b - a.$$

Przyjmijmy $y_n^k = x_n^k$ dla $k = 1, \ldots, N_n$ i $n < n_0$ oraz $S_n = N_n$.

Otrzymany w ten sposób ciąg hiperskończony $(\widehat{y}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{S}_n}$ jest ciągiem normalnym liczb nieskończenie małych. Wynika to stąd, że ciągi wyjściowe były ciągami normalnymi nieskończenie małych, więc średnice podziałów δ_n i δ'_n, odpowiadające P_{ni} i P'_{ni}, dążą do zera, a zatem średnica δ''_n podziału $P''_{n\varphi(i)}$ dąży do zera. Ponieważ $y_n^k \leqslant \delta''_n$ przy ustalonym n, więc ciąg $(y_n^{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ dąży do zera, gdy $n \to \infty$. Mamy:

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{S}_n} \widehat{y}_n^k = {}^*(b - a).$$

Ciąg ten tworzy więc podział odcinka $[a,b]$. Selektor dla powyżej skonstruowanego podziału określimy następująco:

$$\begin{aligned} d_n^1 &= a + \tfrac{1}{2} y_n^1, \\ d_n^k &= a + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} y_n^i + \sum_{i=1}^{k} y_n^i\right), \qquad k = 2, \ldots, S_n, \end{aligned}$$

czyli d_n^k jest środkiem przedziału $P''_{n\varphi(k)}$. Niech

$$\widehat{d}_n^{m_n} := {}^*(d_n^{m_n}) \in \left[\widehat{a} + \sum_{\widehat{1} \leqslant \widehat{i} \leqslant \widehat{m}_n - \widehat{1}} \widehat{y}_n^i, \widehat{a} + \sum_{\widehat{1} \leqslant \widehat{i} \leqslant \widehat{m}_n} \widehat{y}_n^i\right], \qquad \widehat{m}_n \leqslant \widehat{S}_n.$$

Skonstruowany powyżej podział będziemy nazywać wspólnym zagęszczeniem podziałów $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ i $(\widehat{z}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$. Na koniec wprowadzimy jeszcze oznaczenia:

$$\mathcal{K}_{ni} = \left\{k \in L'_n \ : \ P''_{n\varphi(k)} \subseteq P_{ni}\right\}, \qquad i = 1, \dots, N_n$$

oraz

$$\mathcal{H}_{ni} = \left\{k \in L'_n \ : \ P''_{n\varphi(k)} \subseteq P_{ni}\right\}, \qquad i = 1, \dots, M_n.$$

Powyższą konstrukcję wykorzystamy w dowodzie całkowalności funkcji ciągłej. W dowodzie tym skorzystamy również z następującego lematu.

Lemat 2. *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną, to istnieją m, $M \in \mathbb{R}$, takie że*

$$\widehat{m} \cdot \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{x}_n^k \leqslant \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k \leqslant \widehat{M} \cdot \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{x}_n^k$$

dla dowolnej niestandardowej sumy całkowej funkcji f na odcinku $[a,b]$.

Dowód. Na mocy założenia istnieją liczby rzeczywiste m i M, takie że

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

dla $x \in [a,b]$. Oznaczmy

$$\widehat{y}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k.$$

Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_n} f(a_n^k) \cdot x_n^k$$

dla $n \geqslant n_0$. Stąd

$$m \cdot \sum_{k=1}^{N_n} x_n^k \leqslant y_n = \sum_{k=1}^{N_n} f(a_n^k) \cdot x_n^k \leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{N_n} x_n^k$$

dla $n \geqslant n_0$, a to dowodzi tezy lematu.∎

Możemy teraz przejść do zapowiedzianego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Każda funkcja ciągła na $[a,b]$ jest całkowalna na $[a,b]$.*

Dowód. Niech $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ będzie dowolnym niestandardowym podziałem odcinka $[a,b]$, a $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ jego selektorem. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa i Lematu 2 otrzymujemy:

$$\widehat{m} \cdot {}^*(b-a) \leqslant \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k \leqslant \widehat{M} \cdot {}^*(b-a)$$

dla pewnych liczb rzeczywistych m i M. Dowolna suma całkowa jest więc liczbą skończoną.

Weźmy dowolne dwie takie sumy dla ciągów

$$(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n} \quad \text{i} \quad (\widehat{z}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}$$

z odpowiadającymi im selektorami

$$(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n} \quad \text{i} \quad (\widehat{b}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{M}_n}.$$

Niech $(\widehat{y}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{S}_n}$ będzie wspólnym zagęszczeniem powyższych podziałów, $(\widehat{d}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{S}_n}$ odpowiadającym mu selektorem, a $\mathcal{K}_{ni}$ i $\mathcal{H}_{ni}$ zdefiniowanymi poprzednio zbiorami. Przyjmijmy

$$\widehat{t}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{S}_n} f_p(\widehat{d}_n^k) \cdot \widehat{y}_n^k.$$

Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $n \geqslant n_0$

$$t_n = \sum_{k=1}^{S_n} f(d_n^k) \cdot y_n^k = \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k \in \mathcal{K}_{ni}} \Big(f(a_n^i) + \big(f(d_n^k) - f(a_n^i) \big) \Big) \cdot y_n^k.$$

Najmniejsza h_{1n} i największa h_{2n} z liczb $f(d_n^k) - f(a_n^i)$ (dla $i = 1, \ldots, N_n$ i $k \in \mathcal{K}_{ni}$) są mniejsze na moduł od pewnej liczby rzeczywistej ε_n, którą można tak dobrać, aby ciąg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dążył do zera, bo średnice podziału (czyli odległość argumentów) $\delta_n = \max_{i \in \{1,\ldots,N_n\}} x_n^i$ dążą do zera i funkcja f jest ciągła. Dlatego

$$|\,\widehat{h}_{1n}\,| \leqslant \widehat{\varepsilon}_n \simeq \widehat{0}, \qquad |\,\widehat{h}_{2n}\,| \leqslant \widehat{\varepsilon}_n \simeq \widehat{0}.$$

Ponieważ $\sum_{k \in \mathcal{K}_{ni}} y_n^k = x_n^i$, więc dla każdego $n \geqslant n_0$ mamy:

$$h_{1n} \cdot (b-a) + \sum_{i=1}^{N_n} f(a_n^i) \cdot x_n^i \leqslant t_n \leqslant h_{2n} \cdot (b-a) + \sum_{i=1}^{N_n} f(a_n^i) \cdot x_n^i.$$

Poprzednie nierówności zachodzą dla dostatecznie dużych n, zatem

$$\underbrace{\widehat{h}_{1n} \cdot {}^*(b-a)}_{\simeq 0} + \sum_{\widehat{i}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^i) \cdot \widehat{x}_n^i \leqslant \widehat{t}_n \leqslant \underbrace{\widehat{h}_{2n} \cdot {}^*(b-a)}_{\simeq 0} + \sum_{\widehat{i}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^i) \cdot \widehat{x}_n^i,$$

czyli

$$\widehat{t}_n \simeq \sum_{\widehat{i}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^i) \cdot \widehat{x}_n^i.$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie dla drugiej sumy dowodzimy, że

$$\sum_{\widehat{i}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^i) \cdot \widehat{x}_n^i \simeq \sum_{\widehat{i}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} f_p(\widehat{b}_n^i) \cdot \widehat{z}_n^i.$$

Wykazaliśmy więc, że dla dowolnej funkcji ciągłej każde dwie sumy całkowe są nieskończenie bliskie.

Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że nie może istnieć suma, która nie ma części standardowej. Przypuśćmy, że taka suma istnieje. Przeprowadzając identyczną konstrukcję jak w drugiej części dowodu warunku koniecznego Twierdzenia 1 otrzymamy dwie sumy, które mają różne części standardowe, a to jest sprzeczne z pierwszą częścią tego dowodu.∎

Lemat 3. *Jeśli* $(\widehat{a}_n^{\widehat{m}_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ *i* $(\widehat{b}_n^{\widehat{m}_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ *są hiperskończonymi ciągami normalnymi i* $\widehat{\lambda}_n \in \mathbb{K}$, *to*

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} (\widehat{a}_n^k + \widehat{b}_n^k) = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{a}_n^k + \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{b}_n^k,$$

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} (\widehat{\lambda}_n \cdot \widehat{a}_n^i) = \widehat{\lambda}_n \cdot \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{a}_n^i.$$

Dowód. Wykażemy pierwszą równość; drugiej dowodzi się analogicznie. Niech

$$\widehat{y}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} (\widehat{a}_n^k + \widehat{b}_n^k), \quad \widehat{x}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{a}_n^k, \quad \widehat{z}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{b}_n^k.$$

Z definicji niestandardowej sumy wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_n} (a_n^k + b_n^k) = \sum_{k=1}^{N_n} a_n^k + \sum_{k=1}^{N_n} b_n^k = x_n + z_n$$

dla $n \geqslant n_0$, wobec czego $\widehat{y}_n = \widehat{x}_n + \widehat{z}_n$.∎

Posługując się powyższym lematem wykażemy liniowość całki na zbiorze funkcji całkowalnych.

Twierdzenie 3. *Jeśli f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne i $\lambda \in \mathbb{R}$, to funkcje $f + g$ i λf są całkowalne oraz*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Dowód. Weźmy dowolny podział $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ odcinka $[a, b]$ i odpowiadający mu selektor $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$. Wówczas

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} (f+g)_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} (f_p(\widehat{a}_n^k) + g_p(\widehat{a}_n^k)) \cdot \widehat{x}_n^k = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} (f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k + g_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k) =$$

$$= \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k + \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} g_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k \simeq {}^*\Big(\int_a^b f(x)dx\Big) + {}^*\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

Wobec dowolności podziału dostajemy tezę pierwszej części twierdzenia. Drugą część dowodzi się analogicznie na podstawie drugiego wzoru z Lematu 3.■

Własność 4. *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalną funkcją nieujemną, to*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Dowód. Weźmy dowolny podział $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$ i odpowiadający mu selektor $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n \leqslant \widehat{N}_n}$. Niech

$$\widehat{y}_n = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k) \cdot \widehat{x}_n^k.$$

Istnieje wówczas $n_0 \in \mathbb{R}$, takie że

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_n} f(a_n^k) \cdot x_n^k \geqslant 0$$

dla $n \geqslant n_0$. Stąd $\widehat{y}_n \geqslant \widehat{0}$. Ponieważ ${}^*\int_a^b f(x)dx \simeq \widehat{y}_n$, więc wynika stąd, że $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.■

Prostą konsekwencją powyższej własności jest następujący wniosek.

Wniosek 2. *Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne i $f \leqslant g$, to $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.*■

Własność 5. *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to*

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \sup_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b-a).$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnej niestandardowej sumy zgodnie z Lematem 2 zachodzi:

$$^*\Big(\inf_{x\in[a,b]} f(x)\Big)\cdot {}^*(b-a) = {}^*\Big(\inf_{x\in[a,b]} f(x)\Big)\cdot \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} \widehat{x}_n^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k)\cdot \widehat{x}_n^k \leqslant {}^*\Big(\sup_{x\in[a,b]} f(x)\Big)\cdot {}^*(b-a). \blacksquare$$

Wykażemy teraz, że całka jest addytywną funkcją zbioru całkowania.

Twierdzenie 6. *Jeśli $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną i $b\in(a,c)$, to $f\big|_{[a,b]}$ i $f\big|_{[b,c]}$ są całkowalne oraz*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Dowód. Niech $(\widehat{x}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n\leqslant\widehat{N}_n}$ i $(\widehat{y}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n\leqslant\widehat{M}_n}$ będą odpowiednio podziałami odcinków $[a,b]$ i $[b,c]$, a $(\widehat{a}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n\leqslant\widehat{N}_n}$ i $(\widehat{b}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n\leqslant\widehat{M}_n}$ ich selektorami. Przyjmijmy:

$$z_n^k = \begin{cases} x_n^k & k=1,\dots,N_n,\\ y_n^{k-N_n} & k=N_n+1,\dots,N_n+M_n,\end{cases}$$

$$d_n^k = \begin{cases} a_n^k & k=1,\dots,N_n,\\ b_n^{k-N_n} & k=N_n+1,\dots,N_n+M_n\end{cases}$$

i $S_n = N_n + M_n$ dla $n\in\mathbb{N}$. Istnieje wówczas $n_0\in\mathbb{N}$, takie że

$$\sum_{k=1}^{S_n} z_n^k = \sum_{k=1}^{N_n} x_n^k + \sum_{k=N_n+1}^{S_n} y_n^{k-N_n} = \sum_{k=1}^{N_n} x_n^k + \sum_{k=1}^{M_n} y_n^k = c-a,$$

wobec czego $\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{S}_n} \widehat{z}_n^k = {}^*(c-a)$. Otrzymaliśmy więc podział niestandardowy $(\widehat{z}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n\leqslant\widehat{S}_n}$ odcinka $[a,c]$. Selektorem jego jest $(\widehat{d}_n^{m_n})_{\widehat{m}_n\leqslant\widehat{S}_n}$. Dla dostatecznie dużych n mamy:

$$\sum_{k=1}^{S_n} f(d_n^k)\cdot z_n^k = \sum_{k=1}^{N_n} f(d_n^k)\cdot z_n^k + \sum_{k=N_n+1}^{S_n} f(d_n^k)\cdot z_n^k = \sum_{k=1}^{N_n} f(a_n^k)\cdot x_n^k + \sum_{k=1}^{M_n} f(b_n^k)\cdot y_n^k,$$

czyli

$$\sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{S}_n} f_p(\widehat{d}_n^k)\cdot \widehat{z}_n^k = \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{N}_n} f_p(\widehat{a}_n^k)\cdot \widehat{x}_n^k + \sum_{\widehat{k}=\widehat{1}}^{\widehat{M}_n} f_p(\widehat{b}_n^k)\cdot \widehat{y}_n^k. \qquad (*)$$

Jeśli pokażemy, że funkcje $f\big|_{[a,b]}$ i $f\big|_{[b,c]}$ są całkowalne, to otrzymamy szukany wzór. Dowód całkowalności funkcji $f\big|_{[a,b]}$ i $f\big|_{[b,c]}$ przeprowadzimy nie wprost. Wystarczy rozpatrzeć przypadek, gdy jedna z tych funkcji nie jest całkowalna.

Załóżmy, że $f\big|_{[a,b]}$ nie jest całkowalna. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że dla $f\big|_{[a,b]}$ istnieją dwie sumy, które nie są nieskończenie bliskie. Niech będą nimi $\widehat{s}_n^1$ i $\widehat{s}_n^2$. Mamy $|\ \widehat{s}_n^1 - \widehat{s}_n^2\ | \geqslant \widehat{\varepsilon}$ dla pewnego $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Weźmy dowolną niestandardową sumę całkową $\widehat{t}_n$ dla funkcji $f\big|_{[b,c]}$. Powtarzając konstrukcję z pierwszej części dowodu dla par $(\widehat{s}_n^1, \widehat{t}_n)$ i $(\widehat{s}_n^2, \widehat{t}_n)$ otrzymamy sumy całkowe $\widehat{z}_n^1$ i $\widehat{z}_n^2$ dla funkcji $f\big|_{[a,c]}$. Wykorzystując równość $(*)$ dostaniemy:

$$|\ \widehat{z}_n^1 - \widehat{z}_n^2\ | = |\ \widehat{s}_n^1 + \widehat{t}_n - (\widehat{s}_n^2 + \widehat{t}_n)\ | = |\ \widehat{s}_n^1 - \widehat{s}_n^2\ | \geqslant \varepsilon,$$

wbrew całkowalności funkcji f na $[a, c]$.∎

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą. Wówczas $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ istnieje i $F'(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in (a,b)$.*

Dowód. Z Twierdzenia 6 funkcja F jest dobrze określona. Weźmy dowolny jej iloraz różnicowy

$$\mathcal{I} = \frac{F_p(\widehat{x} + \widehat{y}_n) - F_p(\widehat{x})}{\widehat{y}_n}$$

dla $x \in (a,b)$ i $\widehat{y}_n \in \mathbb{K}_0 \setminus \{x\}_0$. Ponieważ

$$F_p(\widehat{x}) = {}^*(F(x)) = {}^*\Big(\int_a^x f(t)dt\Big)$$

oraz

$$F_p(\widehat{x} + \widehat{y}_n) = F_p({}^*(x + y_n)) = {}^*\Big(\int_a^{x+y_n} f(t)dt\Big),$$

więc

$$\mathcal{I} = \frac{{}^*(\int_a^{x+y_n} f(t)dt) - {}^*(\int_a^x f(t)dt)}{\widehat{y}_n} = \frac{1}{\widehat{y}_n} \cdot {}^*\Big(\int_a^{x+y_n} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\widehat{y}_n} \cdot {}^*\Big(\int_x^{x+y_n} f(t)dt\Big).$$

Z Własności 5 dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\inf_{t \in [x, x+y_n]} f(t) \cdot y_n \leqslant \int_x^{x+y_n} f(t)dt \leqslant \sup_{t \in [x, x+y_n]} f(t) \cdot y_n.$$

Dostajemy stąd nierówność:

$$^*\Big(\inf_{t \in [x, x+y_n]} f(t)\Big) \cdot \widehat{y}_n \leqslant {}^*\Big(\int_x^{x+y_n} f(t)dt\Big) \leqslant {}^*\Big(\sup_{t \in [x, x+y_n]} f(t)\Big) \cdot \widehat{y}_n. \qquad (*)$$

Ponieważ f jest ciągła, więc $f_p(\widehat{t}_n) \simeq f_p(\widehat{x})$ dla każdego $\widehat{t}_n \in mon\, x$. W naszym przypadku $\widehat{y}_n + \widehat{x} \in mon\ x$, więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall t \in [x, x + y_n] \qquad |\ f(t) - f(x)\ | < \varepsilon,$$

więc także

$$\forall n \geqslant n_0 \quad | \inf_{t\in[x,x+y_n]} f(t) - f(x) | < \varepsilon \;\wedge\; | \sup_{t\in[x,x+y_n]} f(t) - f(x) | < \varepsilon.$$

Wobec tego

$$^*\Big(\inf_{t\in[x,x+y_n]} f(t)\Big) \simeq f_p(\widehat{x}) \quad \wedge \quad ^*\Big(\sup_{t\in[x,x+y_n]} f(t)\Big) \simeq f_p(\widehat{x}).$$

Podstawiając do $(*)$ otrzymamy:

$$^*\Big(\int_x^{x+y_n} f(t)dt\Big) \simeq f_p(\widehat{x}) \cdot \widehat{y}_n,$$

czyli

$$\mathcal{I} \simeq f_p(\widehat{x}),$$

z czego już otrzymujemy, że $F'(x) = f(x)$ ([5], Twierdzenie 18).■

Bezpośrednią konsekwencją dowiedzionego twierdzenia jest podstawowe twierdzenie rachunku całkowego i wzór Newtona–Leibniza.

Wniosek 3. *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, a $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją pierwotną dla f, to*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$■

Literatura

[1] J. Błahut, *Wybrane zagadnienia analizy (ujęcie niestandardowe)*, Skrypt Pol. Śl. 1405, Gliwice 1988.

[2] L. Chwistek, *Granice nauki*, Księżnica Atlas, Lwów 1935.

[3] D. Laugwitz, *The Theory of Infinitesimals. An Introduction to Nonstandard Analysis*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 1980.

[4] D. Słota, *Model niestandardowy analizy oparty na definicjach Chwistka i Laugwitza* (w niniejszym Zeszycie).

[5] D. Słota, *Rachunek różniczkowy w modelu niestandardowym Chwistka i Laugwitza* (w niniejszym Zeszycie).

Recenzent: Dr inż. Krystyna Skórnik

Wpłynęło do redakcji 15.10.1993 r.

Abstract

In the paper, the theory of integrability of real-valued functions of one variable is presented in the non-standard model of Chwistek and Laugwitz. Normal sequences of progressive numbers and non-standard summation are defined; these definitions are applied in the non-standard version of the notion of integrability of functions. The equivalence of in the Riemann and non-standard definitions of integrable functions is proved. The non-standard proof of integrability of continuons presented in the paper is of interest. Moreover, a number of properties of integral are proved by means of non-standard methods.