ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Romuald SZOPA

MAKSYMALNY WYKŁADNIK LAPUNOWA DLA UKŁADU N RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RZĘDU PIERWSZEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę wyznaczania maksymalnego wykładnika Lapunowa dla układu n równań różniczkowych rzędu pierwszego. Metoda opiera się na jednoczesnym rozwiązaniu układu równań różniczkowych i równania wariacyjnego.

THE LARGEST LYAPUNOW EXPONENT OF A SYSTEM OF N DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

Summary. The paper presents a method of calculating the largest Lyapunow exponents of a system of n differential equation of the first-order. The method requires the solution of the combined system — system of differential equations and variational equation.

DER GROSSTE LJAPUNOV-EXPONENT FUER N DIFFERENTIALGLEICHUNGS ERSTER ORDNUNG

Zusammenfassung. Die Arbeit angibt eine Methode fuer Berechnung des grossten Ljapunow-Exponenten fuer n Differentialgleichungs erster Ordnung. Dazu soll man losen Differentialgleichungssystem und die erste Variation dieses System.

Niech będzie dany układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego w postaci:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

w którym t oznacza zmienną niezależną oraz $t \in I \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych); $x_1, \ldots, x_n$ – szukane funkcje zmiennej t; $f_1, \ldots, f_n$ – dane funkcje ciągłe określone w iloczynie kartezjańskim $A \times I$, gdzie A zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n$.

Niech będą postawione warunki początkowe:

$$x_i(t_0) = x_{i0} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

przy czym punkt $(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0) \in A \times I$.

Wprowadzając oznaczenia macierzowo-wektorowe:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad f(x,t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, t) \end{bmatrix}; \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix};$$

układ (1)-(2) można zapisać następująco:

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Rozwiązanie zagadnienia (3)–(4) oznaczamy przez $\phi_t(x_0)$, przy czym

$$\phi_t(x_0) = \begin{bmatrix} \phi_1(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t) \\ \vdots \\ \phi_n(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t) \end{bmatrix}.$$

Zachodzi

$$\dot{\phi}_t(x_0) = f\left[\phi_t(x_0), t\right] \tag{5}$$

oraz

$$\phi_{t_0}(x_0) = x_0. \tag{6}$$

Różniczkując (5) względem warunków początkowych, tzn. względem wektora x_0, otrzymamy:

$$D_{x_0}\dot{\phi}_t(x_0) = D_x f\left[\phi_t(x_0), t\right] D_{x_0}\phi_t(x_0), \tag{7}$$

a także

$$D_{x_0}\phi_{t_0}(x_0) = I, \tag{8}$$

gdzie I macierz jednostkowa stopnia n, zaś D jest symbolem różniczkowania.

Zdefiniujmy macierz $\Phi_t(x_0)$ następująco:

$$\Phi_t(x_0) := D_{x_0}\phi_t(x_0). \tag{9}$$

Wówczas równanie (7)–(8) można zapisać:

$$\dot{\Phi}_t(x_0) = D_x f\left[\phi_t(x_0), t\right] \Phi_t(x_0), \tag{10}$$

$$\Phi_{t_0}(x_0) = I. \tag{11}$$

Równanie (10)–(11) nazywamy równaniem wariacyjnym.

W przypadku gdy układ (3) jest autonomiczny, tzn. prawa jego strona nie zależy w sposób jawny o zmiennej niezależnej t, to w równaniu (10) funkcja wektorowa f również nie będzie zależała w sposób jawny od t. Natomiast, jeśli układ (3) jest nieautonomiczny o postaci

$$\dot{x} = f(x) + g(t), \tag{12}$$

gdzie funkcja wektorowa

$$g = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$

to równanie (10)–(11) wyraża się następująco:

$$\dot{\Phi}_t(x_0) = D_x f\left[\phi_t(x_0)\right] \Phi_t(x_0), \tag{13}$$

$$\Phi_{t_0}(x_0) = I. \tag{14}$$

Można wykazać, że macierz $\Phi_t(x_0)$ ma własność przechodniości, to znaczy, że zachodzi związek:

$$\Phi_{t_1}(x_0)\Phi_{t_2}(x_0) = \Phi_{t_1+t_2}(x_0) \tag{15}$$

gdzie $x_1 = \phi_{t_1}(x_0)$.

Dla ustalonego warunku początkowego x_0 wybierzemy dowolny wektor $\delta x_0 \in \mathbb{R}^n$, będący jego zaburzeniem. Wówczas warunek początkowy (4) z zaburzeniem δx_0 przyjmie dla równania (3) postać:

$$x(t_0) = x_0 + \delta x_0. \tag{16}$$

Rozwiązaniem zagadnienia (3)–(16) będzie funkcja wektorowa

$$x_1(t) = x(t) + \delta x(t)$$

gdzie $\delta x(t)$ – wektor różnicy między rozwiązaniem równania (3) dla warunków początkowych (4) i warunków początkowych zaburzonych (16). Wektor ten jest rozwiązaniem równania:

$$\delta x(t) = \Phi_t(x_0)\delta x_0. \tag{17}$$

Jednowymiarowy wykładnik Lapunowa dla x_0 i δx_0 jest definiowany następująco:

$$\sigma(x_0, \delta x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\| \delta x(t) \|}{\| \delta x_0 \|}. \tag{18}$$

Wykorzystując równanie (17) otrzymujemy:

$$\sigma(x_0, \delta x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \| \Phi_t(x_0)\delta x_0 \| . \tag{19}$$

Rozpatrzmy n-wymiarową bazę ortonormalną $\{e_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ posiadających i-tą współrzędną równą jeden, a pozostałe współrzędne równe zero. Wektory bazowe potraktujemy jako zaburzenia warunków początkowych (4) i zastosujemy do nich definicję jednowymiarowego wykładnika Lapunowa. Otrzymamy:

$$\sigma(x_0, e_i) = \sigma_i = \lim_{t\to\infty} \ln \| \Phi_t(x_0)\delta e_i \| . \tag{20}$$

Otrzymane w ten sposób jednowymiarowe wykładniki Lapunowa uporządkujemy według malejących wartości, tzn.:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_1 \geqslant \ldots \sigma_n. \tag{21}$$

Przyjmijmy, że $\delta x_0 = w_0$, gdzie $\| w_0 \| = 1$ oraz, że wektor w_0 ma w bazie $\{e_i\}$ przedstawienie

$$w_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \tag{22}$$

gdzie $c_i \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\| \Phi_t(x_0)w_0 \| = \| \Phi_t(x_0) \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} c_i \Phi_t(x_0) e_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\sigma_i t} \| . \tag{23}$$

Wobec tego jednowymiarowy wykładnik Lapunowa w punkcie x_0 dla zaburzenia w_0 można wyrazić następująco:

$$\sigma(x_0, w_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \| \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\sigma_i t} \| =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left[e^{\sigma_1 t} \| c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i e^{(\sigma_i - \sigma_1)t} \| \right] = \sigma_1. \tag{24}$$

Wynika stąd, że przy dowolnie wybranym wektorze zaburzającym w_0 jednowymiarowy wykładnik Lapunowa będzie równy maksymalnemu wykładnikowi Lapunowa dla wektorów bazowych, tzn.:

$$\sigma(x_0, w_0) = \sigma_i. \tag{25}$$

Wykładnik Lapunowa można zatem otrzymać na dwa sposoby:

1) przez całkowanie równania wyjściowego i równania z zaburzonymi warunkami początkowymi, co poprzez przyjęcie „dużego" t we wzorze (18) napotyka na duże trudności;

2) przez całkowanie równania wyjściowego i wariacyjnego równocześnie, co na ogół w przypadku dodatnich wykładników Lapunowa prowadzi do obliczeń z nadmiarem ($\Phi_t(x_0) \to \infty$), zaś w przypadku ujemnych wykładników w obliczeniach występują niedomiary (kolumny macierzy $\Phi_t(x_0)$ dążą do liniowej zależności).

Te trudności są powodem wprowadzenia poniższych modifikacji w wyznaczaniu maksymalnego wykładnika Lapunowa.

Niech $T > 0$ oraz K pewna liczba całkowita nieujemna.
Przyjmijmy

$$x_k := x(t_k) = \phi_T(x_{k-1}) \tag{26}$$

dla $t_k = kT$ oraz $k = 1, \ldots, K$.
Zauważmy, że z przechodniości macierzy $\Phi_t(x)$ wynika:

$$\Phi_{KT}(x_0) = \Phi_T(x_{K-1}) \ldots \Phi_T(x_0). \tag{27}$$

Wówczas:

$$\sigma(x_0, w_0) \approx \frac{1}{KT} \ln \| \Phi_{KT}(x_0) w_0 \| . \tag{28}$$

Kładąc dla $k = 0, 1, \ldots, K-1$

$$\| \Phi_T(x_k) \| = \alpha_k, \tag{29}$$

otrzymamy ostatecznie

$$\sigma(x_0, w_0) \approx \frac{1}{KT} \sum_{k=0}^{K-1} \ln \alpha_k. \tag{30}$$

Całkując równocześnie równanie wyjściowe i odpowiadające mu równanie wariacyjne oraz stosując wzór (30) można dla układu (3)–(4) wyznaczyć maksymalny wykładnik Lapunowa. Wykorzystać go można do badania charakterystyk równania (3)–(4), a w szczególności do jego chaotycznych zachowań.

Literatura

[1] D. Bestle, *Beuerteilungskriterien fuer chaotische bewegungen nichtlinearer Schwingungssyteme,* Schwingunstechnik **100**, VDI Verlag, Duesseldorf 1988.

[2] B. P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności,* WNT, Warszawa 1972.

[3] T. Kapitaniak, *Chaotycne procesy stochastyczne w nieliniowej dynamice,* Zeszyty Naukowe Pol. Łódz. **539** (1988).

[4] E. Kreuzer, *Numerische Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme,* Springer Verlag, Berlin 1987.

[5] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems,* Springer Verlag, Berlin 1989.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Henryk Piech

Wpłynęło do redakcji 15.12.1992 r.

Abstract

The combined system (differential equation and variational equation) is (3) and (10) which is integrated from the initial condition (4) and (11). Choose an initial perturbation δx_0 then (17). The Lyapunow exponent of x_0 and δx_0 is (19). If we define $e_i \in \mathbb{R}^n$ as a vector whose ith component is 1 and whose reamining components are zero, then (20). Order σ_i such that $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n$, then (25), where $w_0 = \delta x_0$ and $\| w_0 \| = 1$. Let $\phi(x_0)$ solutions of the system of differential equations with an initial state x_0 and choose $T > 0$ and an integer $K > 0$. Let (26) and then with result (27) and (28) we obtain (30).