ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Romuald SZOPA

NUMERYCZNE WYZNACZANIE MAKSYMALNEGO WYKŁADNIKA LAPUNOWA DLA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH TYPU DUFFINGA

Streszczenie. W pracy przedstawiono numeryczną metodę wyznaczania maksymalnego wykładnika Lapunowa dla równań różniczkowych typu Duffinga. W zależności od parametrów tego równania otrzymano różne wartości wykładników. Ich niedodatnie wartości wskazują na regularny charakter rozwiązania (rozwiązanie typu okresowego lub quasi okresowego), zaś dodatnie wartości na chaotyczne zachowanie rozwiązania.

NUMERICAL CALCULATING THE LARGEST LYAPUNOW EXPONENT FOR DUFFING'S DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary. The paper presents investigations of the solutions of Duffing's equations for the difference parameter values. The largest Lyapunov exponents can be used to determine regular and chaotic behavior. For periodic and qausi-periodic solutions they are negative, for chaos they are positive.

NUMERISCHE BERECHNUNG DER MAXIMALEN LJAPUNOV EXPONENT FUER DIE DUFFING GLEICHUNGEN

Zusammenfassung. In der Arbeit untersucht man Verhalten der Loesung die Duffing-Gleichungen. Dazu berechnet man maximalen Ljapunow-Exponenten. Fuer regulares und periodisches Verhalten sind maximale Ljapunow-Exponenten negativ, fuer chaotischen Verhalten sind sie positiv.

Rozważmy układ dynamiczny opisany równaniem Duffinga:

$$\ddot{x} + a\dot{x} = bx + cx^3 = d\cos t \tag{1}$$

Jest to nieliniowe równanie różniczkowe rzędu drugiego, w którym t jest zmienną niezależną, zaś x szukaną funkcją zmiennej t; a, b, c, d – parametry równania. W zależności od wartości tych parametrów układ dynamiczny opisany równaniem (1) może posiadać rozwiązanie typu regularnego, tzn. okresowe, prawie okresowe lub też rozwiązanie typu chaotycznego. Równanie (1) posiada rozwiązanie typu chaotycznego, jeżeli przy zadanych warunkach początkowych i zadanych parametrach nie można przewidzieć zachowania się rozwiązania już w niedalekiej przyszłości, chociaż zadane warunki początkowe oraz parametry nia są losowe, tzn. są w pełni zdeterminowane. Do wyznaczania obszarów, w których układy dynamiczne mają zachowania chaotyczne, można posłużyć się wykładnikami Lapunowa, które określają współczynnik eksponentalnej rozbieżności dwóch trajektorii fazowych o nieznacznie różniących się warunkach początkowych.

Zachowanie się w czasie układów dynamicznych można opisać układem równań różniczkowych o postaci:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \tag{2}$$

gdzie: t – skalarna zmienna niezależna, $\boldsymbol{x}$ – n-wymiarowy wektor kolumnowy $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ szukanych funkcji t, $\boldsymbol{f}$ – n-wymiarowa kolumnowa funkcja wektorowa $\boldsymbol{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$, zaś $\dot{\boldsymbol{x}}$ – n-wymiarowy wektor kolumnowy pochodnych funkcji x_i względem t, $i = 1, \ldots, n$.

Rozważmy dwa rozwiązania równania (2): jedno dla warunków początkowych $\boldsymbol{x}_0 = [x_{10}, \ldots, x_{n0}]^T$, a drugie dla warunków $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\delta x}_0$, gdzie $\boldsymbol{\delta x}_0 = [\delta x_{10}, \ldots, \delta x_{n0}]^T$ jest wektorem różnic między nimi, czyli zaburzeniem wyjściowym warunków początkowych. Jednowymiarowy wykładnik Lapunowa dla $\boldsymbol{x}_0$ i $\boldsymbol{\delta x}_0$ określamy jako granicę:

$$\sigma(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\delta x}_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\| \boldsymbol{\delta x}(t) \|}{\| \boldsymbol{\delta x}_0 \|}, \tag{3}$$

gdzie $\| * \|$ oznacza normę w $\mathbb{R}^n$, zaś $\boldsymbol{\delta x}(t)$ jest to wektor różnicy pomiędzy rozwiązaniem otrzymanym dla warunków początkowych $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\delta x}_0$ oraz $\boldsymbol{x}_0$.

Maksymalny wykładnik Lapunowa to największy co do wartości wykładnik Lapunowa spośród n wykładników otrzymanych w przypadku, gdy $\boldsymbol{\delta x}_0 = \boldsymbol{e}_i$, gdzie $\boldsymbol{e}_i$ wektory n-wymiarowej bazy ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$. Oznaczmy go przez σ_1.

Okazuje się, że dla dowolnie wybranego wektora $\boldsymbol{\delta x}_0$ stosując wzór (3) otrzymuje się zawsze maksymalny wykładnik Lapunowa. Aby stwierdzić chaotyczność rozwiązania układu wystarczy więc znać maksymalny wykładnik Lapunowa. W przypadku bowiem zachowań regularnych (rozwiązanie okresowe lub prawie okresowe) może mieć miejsce liniowa rozbieżność trajektorii fazowych i wykładnik Lapunowa jest liczbą niedodatnią.

Natomiast w przypadku zachowań chaotycznych dwie trajektorie fazowe zaczynające się w sąsiednich punktach są wykładniczo rozbieżne i wykładnik maksymalny ma wartość dodatnią.

Maksymalny wykładnik Lapunowa dla różnych parametrów a, b, c i d w równaniu (1) będziemy wyznaczać korzystając z rozwiązania tego równania, a także z rozwiązania odpowiadającego mu równania wariacyjnego. Za pomocą następującej zmiany zmiennych: $x_1 = \dot{x}$, $x_2 = \dot{x}_1$ przekształcimy równanie różniczkowe rzędu drugiego (1) do układu dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = bx_1 - cx_1^3 - ax_2 + d\cos t \end{cases} \tag{4}$$

o niewiadomych funkcjach $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Szukać będziemy rozwiązania układu (4) dla warunków początkowych

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10}, \\ x_2(t_0) = x_{20}. \end{cases} \tag{5}$$

Stosując zapis wektorowy układ (4) oraz układ (5) możemy zapisać odpowiednio w postaci:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(t), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{7}$$

gdzie

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ bx_1 - cx_1^3 - ax_2 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ d\cos t \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Różniczkując równania (6)-(7) względem warunków początkowych $\boldsymbol{x}_0$ otrzymamy równanie wariacyjne o postaci:

$$\boldsymbol{D}_{x_0}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}_x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{D}_{x_0}\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{D}_{x_0}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{I}, \tag{10}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{D}_{x_0}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{20}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{20}} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

zaś I macierz jednostkowa stopnia drugiego.

Przyjmijmy oznaczenie

$$\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_{x_0}\boldsymbol{x}, \tag{13}$$

gdzie elementy macierzy $\boldsymbol{\Phi}_t$ są określone następująco:

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}}, \qquad i,j = 1,2. \tag{14}$$

Maksymalny wykładnik Lapunowa, wykorzystując rozwiązanie równania wariacyjnego, można wyznaczyć ze związku

$$\sigma_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \parallel \boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{x}_0) \parallel . \tag{15}$$

Bezpośrednie obliczanie wykładnika Lapunowa ze wzoru (15) np. przez przyjęcie „dużego" t napotyka na poważne trudności numeryczne. Dlatego też wyznaczać go będziemy według następującego schematu. Niech $\boldsymbol{x}(t)$ będzie rozwiązaniem układu (4)–(5). Niech $T > 0$ będzie oznaczać czas dyskretyzacji. Przez $\boldsymbol{x}_k$ będziemy rozumieć $\boldsymbol{x}(t_k)$; gdzie $t_k = kT$ oraz $k = 1,2,\ldots,K$; K – pewna liczba naturalna. W związku z tym KT oznacza czas końcowy. Przyjmijmy, że:

$$\sigma_1 \approx \frac{1}{KT} \ln \parallel \boldsymbol{\Phi}_{KT}(\boldsymbol{x}_0) \parallel . \tag{16}$$

Kładąc

$$\parallel \boldsymbol{\Phi}_T(\boldsymbol{x}_k) \parallel = \alpha_k \tag{17}$$

oraz korzystając z własności przechodniości macierzy $\boldsymbol{\Phi}$

$$\boldsymbol{\Phi}_{t_1+t_2} = \boldsymbol{\Phi}_{t_1} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{t_2},$$

maksymalny wykładnik Lapunowa ostatecznie wyznaczać będziemy ze wzoru przybliżonego

$$\sigma_1 \approx \frac{1}{KT} \sum_{k=0}^{K-1} \ln \alpha_k. \tag{18}$$

Jak z powyższych wzorów wynika, aby wyznaczyc σ_1, należy jednocześnie całkować układ (4) oraz (9)

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & bx_1 - cx_1^3 - ax_2 + d\cos t, \\ \dot{\Phi}_{11} & = & \Phi_{21}, \\ \dot{\Phi}_{12} & = & \Phi_{22}, \\ \dot{\Phi}_{21} & = & (b - 3cx_1^2)\Phi_{11} - a\Phi_{21}, \\ \dot{\Phi}_{22} & = & (b - 3cx_1^2)\Phi_{12} - a\Phi_{22}, \end{array}\right. \tag{19}$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} x_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, \\ \Phi_{11}(0) &= 1, \\ \Phi_{12}(0) &= 0, \\ \Phi_{21}(0) &= 0, \\ \Phi_{22}(0) &= 1. \end{cases} \tag{20}$$

Układ równań (19)–(20) całkowano metodą Runge-Kutty IV rzędu. Arbitralnie przyjęte zaburzenia początkowe wynosiły $\delta x_{10} = \delta x_{20} = 0.0001$. Odchylenie badano co 10π, tzn. $T = 10\pi$.

W szczególnosci przyjęto następujące wartości parametrów:

1. $a = 0.2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 4$;
2. $a = 0.2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 5.5$;
3. $a = 0.05$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 7.5$;
4. $a = 0.2$, $b = 1$, $c = 0.16$, $d = 0.75$.

Otrzymano dla nich odpowiednio następujące maksymalne wartości wykładników Lapunowa:

1. $\sigma_1 = 0$;
2. $\sigma_1 = 0$;
3. $\sigma_1 = 0.09$;
4. $\sigma_1 = 0.17$.

Pierwsze dwa warianty przyjętych wartości parametrów wskazują na rozwiązanie typu okresowego, natomiast dwa pozostałe typu chaotycznego. W celu sprecyzowania dalszych charakterystyk rozwiązań należałoby zastosować dodatkowe metody badań, takie jak: zachowanie się trajektorii w czasie, trajektorii w przestrzeni fazowej, funkcji autokorelacji lub gęstości spektralnej.

Literatura

[1] R. Burden, D. Faires, *Numerical Analysis,* PWS-KENT Publishing Company, Boston 1985.

[2] B. P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności,* WNT, Warszawa 1972.

[3] T. Kapitaniak, *Chaotycne procesy stochastyczne w nieliniowej dynamice,* Zeszyty Naukowe Pol. Łódz. **539** (1988).

[4] E. Kreuzer, *Numerische Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme,* Springer Verlag, Berlin 1987.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Henryk Piech

Wpłynęło do redakcji 15.11.1993 r.

Abstract

The Lyapunow exponents can be used to determine regular or chaotic behavior of solution of differential equations. The largest Lyapunow exponents of Duffing's equations with difference parametr values we find from the combine system (19) (differential equation and variational equation). This system is integrated (classical Runge-Kutta method) from the initial condition (20). For parametr values 1 and 2 we obtain periodic solution, and for parametre values 3 and 4 we obtain chaotic solution.