

Eugeniusz SOCZKIEWICZ

PROPAGACJA FAL ULTRADŹWIĘKOWYCH W OŚRODKU TURBULENTNYM

Streszczenie. Rozpatrzono propagację fal ultradźwiękowych w przypadkowo niejednorodnym ośrodku turbulentnym. Korzystając z funkcji von Karmana korelacji niejednorodności ośrodka, wprowadzono wzory na różniczkowy i całkowity przekrój rozpraszania jednostki objętości turbulentnego ośrodka. Zbadano zależność przekrojów rozpraszania od długości fali akustycznej i rozmiarów niejednorodności. Wykazano, że akustyczny współczynnik załamania ośrodka nie zależy od postaci funkcji autokorelacji jego fluktuacji, jeśli długość fali akustycznej jest mała w porównaniu z rozmiarami niejednorodności.

PROPAGATION AND SCATTERING OF ULTRASONIC WAVES IN TURBULENT MEDIUM

Summary. Propagation of acoustic waves in a turbulent medium has been studied and formulae for differential and total scattering cross sections of unit volume of a medium have been derived using the von Karman correlation function of medium inhomogeneities. The scattering cross sections have been studied in dependence on the mean scale of inhomogeneities in comparison to the wavelength. It has been proved that medium acoustic refractive index doesn't depend on the form of its fluctuations correlation function if the mean scale of inhomogeneities is large in comparison to the wavelength of acoustic waves.

AUSBREITUNG UND ZERSTREUNG VON ULTRASCHALLWELLEN IN TURBULENTEN MEDIEN

Zusammenfassung. Es wurden die Ultraschallwellen in turbulenten Medien untersucht. Anhand der von Karman-Funktion über die Korrelation der Inhomogenität des Mediums errechnete man die Formeln für den differential und total Zerstreungsdurchschnitt des Einheitsvolumens in turbulenten Medium. Überdies untersuchte man die Abhängigkeit der Zerstreungsdurchschnitte von der Länge der akustischen Wellen und der Ausmasse der Inhomogenitäten. Es wurde erwiesen, das der akustische Brechungsindex des Mediums, für die kurzen Wellen im den Inhomogenitasausmassen, nicht von der Art der Autokorrelationsfunktion der Brechungsindex-Fluktuationen abhängt.

1. Wstęp

Zagadnienia związane z propagacją fal sprężystych w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych badane są intensywnie w ostatnich latach [1]. Spowodowane jest to w dużej mierze licznymi zastosowaniami tych rozważań w wielu dziedzinach nauki: akustyce, biofizyce, optyce, geofizyce, hydroakustyce, fizyce atmosfery itd. [2, 3]. Rozpraszanie fal akustycznych na niejednorodnościach ośrodka oraz interferencje fal rozproszonych powodują stochastyczne zmiany amplitudy i fazy fali, zmianę efektywnej prędkości propagacji [4, 5], a także zależność sposobu transportu energii falowej w ośrodku przypadkowo niejednorodnym od odległości przebytej przez falę [1, 6, 7], w stosunku do tzw. średniej elastycznej drogi swobodnej fali l , zdefiniowanej przez Sornette'a [1] jako odwrotność całkowitego przekroju rozpraszania fal przez jednostkę objętości ośrodka. W związku z tym wyróżnia się trzy sposoby propagacji energii falowej w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych: transport o charakterze falowym z efektywną prędkością $c(\omega)$ różną od prędkości w ośrodku jednorodnym [1], jeśli droga przebyta przez falę jest mniejsza od średniej elastycznej drogi swobodnej, dyfuzyjny transport energii falowej w przypadku odległości większych niż l , przy czym współczynnik dyfuzji wyraża się wzorem: $D_0 = c(\omega)l(\omega)/3$ [1, 9], gdzie ω oznacza częstotliwość cykliczną fali. W przypadku ośrodków silnie niejednorodnych może wystąpić tzw. lokalizacja Andersona energii falowej [6, 7, 9, 10], o ile spełniony jest jeszcze warunek Ioffe-Rogela: $\lambda \approx l$. Lokalizacja Andersona energii falowej spowodowana jest zmniejszaniem się do zera współczynnika dyfuzji, co jest wynikiem koherentnych interferencji fal rozproszonych wstecz o kąt 180° .

2. Statystyczne charakterystyki ośrodków przypadkowo niejednorodnych

Akustyczne własności ośrodka przypadkowo niejednorodnego charakteryzujemy przez średnią kwadratową fluktuację akustycznego współczynnika załamania ośrodka $\langle \varepsilon^2 \rangle$ oraz przez funkcję autokorelacji tych fluktuacji [2] $\langle \varepsilon(0)\varepsilon(r) \rangle$, gdzie $\langle \rangle$ oznacza uśrednienie po zbiorze statystycznym, a kwadrat współczynnika załamania ośrodka dla fal akustycznych został przedstawiony w postaci: $n^2(\vec{r}) = 1 + \varepsilon(\vec{r})$, przy czym $\varepsilon(\vec{r})$ oznacza fluktuującą jego część. W przypadku izotropowych ośrodków z niejednorodnościami spowodowanymi przez turbulencje używana jest funkcja von Karmana [2, 5, 12] do opisu autokorelacji fluktuacji akustycznego współczynnika załamania ośrodka:

$$\Psi(r) = \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{r}{a}\right), \quad (1)$$

gdzie $\Gamma(\nu)$ oznacza funkcję gamma Eulera, ν jest liczbą, a - promieniem korelacji niejednorodności ośrodka, będącym miarą ich średnich rozmiarów, zaś $K_{\nu}(r/a)$ oznacza funkcję McDonalda (tj. funkcję Bessela drugiego rodzaju od urojonego argumentu). Do rozważań propagacji fal sprężystych w ośrodkach stochastycznych potrzebne są prócz funkcji korelacji niejednorodności, również ich transformaty Fouriera $\Phi(k)$, jak to zobaczymy poniżej. Transformata Fouriera funkcji korelacji $\Psi(r)$:

$$\Psi(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(r) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{r}, \quad (2)$$

w przypadku ośrodków izotropowych, po wycalkowaniu po kątach przyjmuje postać:

$$\Psi(k) = \frac{1}{2\pi^2 k} \int_0^{\infty} \sin(kr) \Psi(r) r dr, \quad (3)$$

i dla funkcji korelacji von Karmana otrzymuje się:

$$\Psi(k) = \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle \Gamma(\nu + 3/2) a^3}{\pi^{3/2} \Gamma(\nu) (1 + k^2 a^2)^{\nu+3/2}}. \quad (4)$$

3. Różniczkowy przekrój rozpraszania fal akustycznych przez jednostkę objętości ośrodka

Różniczkowy przekrój rozpraszania zdefiniowany jest jako stosunek strumienia energii falowej rozproszonej w kierunku Θ przez jednostkę objętości ośrodka w jednostkę kąta brylowego, do pierwotnego strumienia energii przechodzącego przez jednostkową powierzchnię [2, 14]. W przypadku fal akustycznych różniczkowy przekrój rozpraszania jednostki

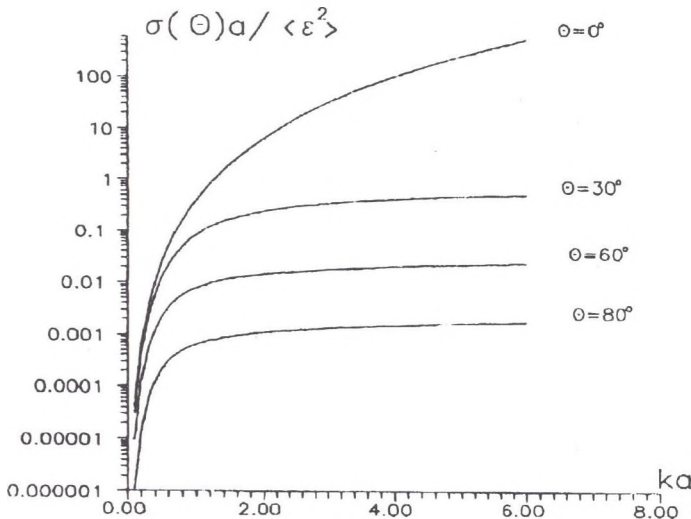
objętości ośrodka przypadkowo niejednorodnego wyraża się wzorem:

$$\sigma(\Theta) = 2\pi k^4 \Phi(2k \sin(\Theta/2)) \cos^2 \Theta, \quad (5)$$

gdzie k oznacza liczbę falową, Θ - kąt rozproszenia, zaś Φ transformatę Fouriera funkcji korelacji niejednorodności. W przypadku ośrodka turbulentnego ze wzorów (4) i (5) wynika następujące wyrażenie na różniczkowy przekrój rozpraszania fal akustycznych przez jednostkową objętość ośrodka turbulentnego:

$$\sigma(\Theta) = \frac{2 \langle \epsilon^2 \rangle \Gamma(\nu + 3/2) k^4 a^3 \cos^2 \Theta}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu) (1 + 4k^2 a^2 \sin^2(\Theta/2))^{\nu+3/2}}. \quad (6)$$

Na rys.1 przedstawiliśmy zależność różniczkowego przekroju rozpraszania w przypadku $\nu = 1/3$ i różnych wartości ka .

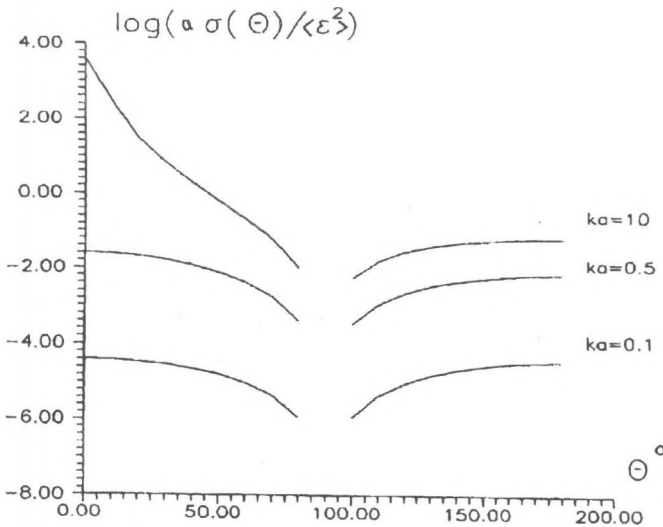


Rys. 1. Różniczkowy przekrój rozpraszania jednostki objętości ośrodka turbulentnego dla funkcji korelacji niejednorodności von Karmana i $\nu = 1/3$

Fig. 1. Differential scattering cross section of unit volume of a turbulent medium for the von Karman medium inhomogeneities correlation function with $\nu = 1/3$

Na rys.2 przedstawiliśmy zależność różniczkowego przekroju rozpraszania od ka , dla $\nu = 1/3$ i różnych kątów rozproszenia.

Rys.3 przedstawia zależność różniczkowego przekroju rozpraszania od parametru ν funkcji korelacji von Karmana, w przypadku $ka = 10$ i kątów rozproszenia 0° , 30° oraz 60° .



Rys. 2. Różniczkowy przekrój rozpraszania jednostki objętości ośrodka turbulentnego w funkcji kąta rozpraszania, dla funkcji korelacji niejednorodności von Karmana i $\nu = 1/3$
 Fig. 2. Differential scattering cross section of unit volume of a turbulent medium in function of scattering angle for the von Karman medium inhomogeneities correlation function with $\nu = 1/3$

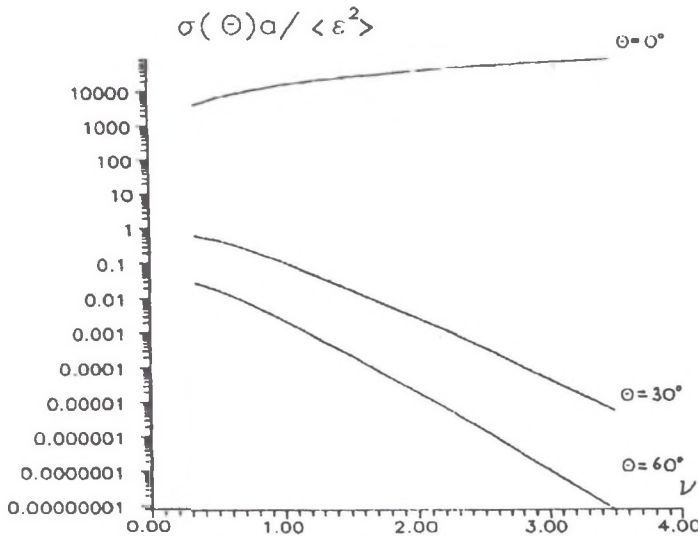
4. Całkowity przekrój rozpraszania fal akustycznych przez jednostkę objętości ośrodka turbulentnego

Całkowity przekrój rozpraszania fal akustycznych przez jednostkę objętości ośrodka otrzymujemy całkując różniczkowy przekrój rozpraszania po pełnym kącie brylowym. Dla ułatwienia rachunków wprowadzamy liczbę falową $k_s = 2k \sin(\Theta/2)$, wtedy element kąta brylowego $\sin \Theta d\Theta d\phi$ będzie wyrażał się wzorem: $d\Omega = k_s dk_s d\phi / k^2$, zaś równanie (5) przejdzie w:

$$\sigma(k_s) = 2\pi k \left(1 - \frac{k_s^2}{k^2} + \frac{k_s^4}{4k^4} \right) \Phi(k_s), \tag{7}$$

i całkowity przekrój rozpraszania jednostki objętości ośrodka będzie:

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{2k} \sigma(k_s) \Phi(k_s) k_s dk_s, \tag{8}$$



Rys. 3. Różniczkowy przekrój rozpraszania jednostki objętości ośrodka turbulentnego w zależności od parametru funkcji von Karmana

Fig. 3. Differential scattering cross section of unit volume of a turbulent medium in dependence on parameter of the von Karman function

gdzie:

$$\Phi(k_s) = \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle \Gamma(\nu + 3/2) a^3}{\pi^{3/2} \Gamma(\nu) (1 + k_s^2 a^2)^{\nu+3/2}}$$

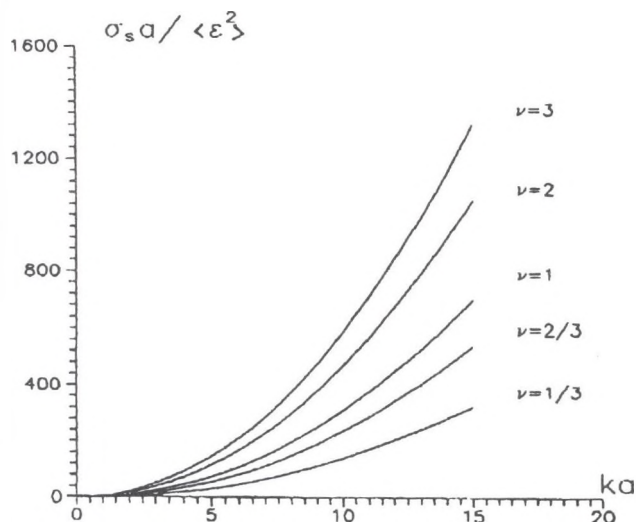
Po wykonaniu rachunków otrzymuje się następujące równanie na całkowity przekrój rozpraszania fal akustycznych przez jednostkową objętość ośrodka turbulentnego:

$$\frac{\sigma_s a}{\langle \varepsilon^2 \rangle} = 2\pi A k^2 a^2 \left(\frac{1 - K^{2\nu+1}}{2\nu + 1} (1 - k^{-2} a^{-2}) - \frac{1 - K^{2\nu-1}}{k^2 a^2 (2\nu - 1)} + \frac{1 - K^{2\nu-3}}{k^4 a^4 (2\nu + 1)(2\nu - 3)} \right) - 2\pi A k^2 a^2 \left(\frac{4K^{2\nu+1}}{2\nu + 1} + \frac{1 - K^{2\nu-1}}{k^4 a^4 (4\nu^2 - 1)} \right), \quad (9)$$

przy czym wprowadzono następujące oznaczenia:

$$A = \frac{2\Gamma(\nu + 3/2)}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu)}, \quad K = (1 + 4k^2 a^2)^{-1/2}.$$

Na rys.4 przedstawiliśmy zależność $\sigma_s a / \langle \varepsilon^2 \rangle$ od ka dla różnych wartości parametru ν funkcji von Karmana.



Rys. 4. Całkowity przekrój rozpraszania jednostki objętości ośrodka turbulentnego w funkcji ka dla różnych parametrów funkcji von Karmana

Fig. 4. Scattering cross section of unit volume of a turbulent medium in function of ka , for various values of parameter ν of the von Karman function

5. Prędkość propagacji fal ultradźwiękowych w turbulentnym ośrodku w przypadku $ka \gg 1$

Stosując metodę funkcji Greena [8] w badaniu propagacji fal akustycznych w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych, otrzymuje się następujące wyrażenie na zespoloną efektywną liczbę falową:

$$k_e = k \left(1 + \frac{\pi k}{4} \int_0^\infty x \ln \left(\frac{2k+x}{2k-x} \right)^2 \Phi(x) dx + \frac{i\pi^2 k}{2} \int_0^{2k} \Phi(x) x dx \right), \quad (10)$$

gdzie k oznacza liczbę falową w ośrodku jednorodnym, $i^2 = -1$, zaś $\phi(x)$ jest transformatą Fouriera funkcji korelacji fluktuacji akustycznego współczynnika załamania ośrodka. Skorzystano przy tym z przybliżenia Bourreta [15, 16], ograniczając się do pierwszego wyrazu w rozwinięciu na szereg operatora masowego $Q(r)$:

$$Q(r) = k^4 G_0(\vec{r}, \vec{r}_0) \Psi(r),$$

gdzie:

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}_0) = (-\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}_0|)) / (4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|).$$

Z równania (10) otrzymujemy zespolony współczynnik załamania ośrodka dla fal akustycznych: $n = k_e/k = n_1 + in_2$, przy czym n_1 opisuje zmianę prędkości fali, zaś n_2 związane jest z tłumieniem średniego pola akustycznego w ośrodku przypadkowo niejednorodnym. W przypadku ośrodków przypadkowo niejednorodnych, w których średni rozmiar niejednorodności jest dużo większy od długości fali, Rytow [15] stosując przybliżenie:

$$\frac{1}{4} \ln \left(\frac{2k+x}{2k-x} \right)^2 \approx \frac{x}{2k},$$

otrzymał ze wzoru (10) dla części rzeczywistej akustycznego współczynnika załamania ośrodka równanie:

$$n_1 = 1 + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \Phi(k)k^2 dk. \quad (11)$$

W przypadku ośrodków o przestrzennie ciągłych niejednorodnościach korelacje fluktuacji akustycznego współczynnika załamania opisuje funkcja [12]:

$$\Psi(r) = \langle \varepsilon^2 \rangle e^{-r^2/a^2}, \quad \Phi(k) = \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle a^3}{8\pi^{3/2}} e^{-k^2 a^2/4} \quad (12)$$

i ze wzoru (11) otrzymujemy: $n_1 = 1 + \langle \varepsilon^2 \rangle / 8$.

Dla niejednorodności przestrzennie nieciągłych:

$$\Psi(r) = \langle \varepsilon^2 \rangle e^{-r/a}, \quad \Phi(k) = \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle a^3}{\pi^2(1+k^2 a^2)} \quad (13)$$

i ze wzoru (11) wynika dla części rzeczywistej współczynnika załamania ośrodka wyrażenie identyczne z otrzymanym powyżej dla gaussowskiej postaci funkcji korelacji niejednorodności ośrodka. Dla ośrodka turbulentnego, korzystając ze wzorów (4) i (11), otrzymaliśmy:

$$n_1 = 1 + \frac{\Gamma(\nu + 3/2) \langle \varepsilon^2 \rangle}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^{\nu+3/2}} dx. \quad (14)$$

Całkę w powyższym wzorze można wyliczyć, korzystając z całki Eulera pierwszego rodzaju (tzw. funkcji beta) [16]:

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt. \quad (15)$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^{\nu+3/2}} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, \nu\right), \quad (16)$$

korzystając ze związku [16, 17]:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

otrzymaliśmy:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^{\nu+3/2}} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2+\nu)}, \quad (17)$$

co po wstawieniu do wzoru (14) daje:

$$n_1 = 1 + \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{4\pi^{1/2}} \Gamma(3/2), \quad (18)$$

ale [17]: $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, więc w przypadku ośrodka turbulentnego: $n_1 = 1 + \langle \varepsilon^2 \rangle / 8$.

6. Wnioski

Z powyższych rozważań wynika, że rzeczywista część akustycznego współczynnika załamania ośrodków przypadkowo niejednorodnych nie zależy od postaci funkcji korelacji niejednorodności, jeśli długość propagującej się fali akustycznej jest mała w porównaniu z promieniem korelacji niejednorodności, będącym miarą średniego rozmiaru niejednorodności. Mierząc efektywną prędkość fali akustycznej w ośrodku stochastycznym można wyznaczyć średni kwadrat fluktuacji współczynnika załamania ośrodka $\langle \varepsilon^2 \rangle$, co umożliwia efektywne wyliczenie przekrojów rozpraszania ośrodka dla propagującej się fali akustycznej. Z wykresów na rysunkach 1 i 2 widzimy, iż różniczkowy przekrój rozpraszania jednostki objętości ośrodka turbulentnego rośnie ze wzrostem iloczynu ka , przy czym wzrost ten jest szybszy dla małych wartości ka i zależy od kąta rozpraszania. Całkowity przekrój rozpraszania fal akustycznych przez jednostkę objętości ośrodka turbulentnego rośnie ze wzrostem iloczynu ka , tj. ze zmniejszaniem się długości fali, przy czym szybkość tego wzrostu pozwala wyznaczyć wartości parametru ν funkcji von Karmana korelacji niejednorodności ośrodka.

Literatura

- [1] D. Sornette, *Waves in random media*, *Acustica* **67** (1989), 109-215, 251-265, **68**, 15-25.
- [2] A. Ishimaru, *Rasprostranienije i rassiejaniije wołn w słuczajno nieodnorodnych sriedach*, Mir, Moskwa 1981.

- [3] E. Soczkiewicz, R. C. Chivers, *Propagation of acoustic waves in random media, a comparison of methods and results*, Ultrasonics International 87 Conference Proceedings, Butterworth, Heinemann, London 1987, 543-548.
- [4] L. A. A. Apresjan, J. A. Krawcow, *Teoria pierienosa izluczenija*, Nauka, Moskwa 1983.
- [5] B. J. Uscinski, *The Element of Wave Propagation in Random Media*, McGraw-Hill, New York 1977.
- [6] C. A. Condat, T. R. Kirkpatrick, *Localization of acoustic waves*, in: Scattering and Localization of Classical Waves in Random media, ed. Ping Sheng, World Scientific, Singapore 1990.
- [7] R. L. Weaver, *Anderson localization of ultrasound*, Wave Motion **12** (1990), 129-142.
- [8] E. Soczkiewicz, *Application of quantum field theory methods in studies of ultrasonic waves propagation in random media*, in: Ultrasonic Methods in Evaluation of Inhomogeneous Matrials, ed. A. Alippi, W. G. Mayer, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht 1987, 163-173.
- [9] D. Sornette, *Anderson localization and absorption*, J. Stst. Phys. **56** (1989), 669-680.
- [10] G. Bayer, T. Niederdränk, *Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media*, Phys. Rev. Lett. **70** (1983), 3884-3887.
- [11] E. Soczkiewicz, *Fale akustyczne w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych, zależność współczynnika dyfuzji energii falowej od statystycznych charakterystyk ośrodka*, Materiały XL Otwartego Seminarium z Akustyki OSA 93, Inst. Fiz. WSP Rzeszów 1993, 95-98.
- [12] E. Soczkiewicz, R. C. Chivers, *Scattering of ultrasonic waves by turbulence*, Acustica **68** (1989), 33-39.
- [13] S. M. Flatte, *Sound Transmission through a Fluctuating Ocean*, Cambridge University Press, Cambridge 1979.
- [14] V. E. Derr, C. G. Little, *A comparision of remote sensing of the clear atmosphere by optical, radio, and acoustic radar techniques*, Applied Optics **9** (1970), 1976-1992.
- [15] S. M. Rytow, J. A. Krawcow, W. I. Tatarski, *Wwiedienije w statisticzeskujy radiofizyky*, Nauka, Moskwa 1978.

- [16] I. S. Gradsztejn, I. M. Ryzik, *Tablicy całek, sum i pochodnych*, Nauka, Moskwa 1971.
- [17] E. Janke, F. Emde, F. Lösch, *Specjalne funkcje*, Nauka, Moskwa 1977.

Recenzent: Prof. dr hab. Jerzy Ranachowski

Wpłynęło do redakcji 28.01.1995 r.

Abstract

Propagation of acoustic waves in turbulent media with various kinds of inhomogeneities have been studied and formulae for differential and total scattering cross sections of unit volume of medium, as well as a formula for the effective wave velocity have been derived. Three types of inhomogeneities have been considered: continuous in space inhomogeneities that correlation function is given by formula 12, inhomogeneities discontinuous in space with correlation function given by equation 13, and inhomogeneities with von Karman correlation function given by equation 1. Using equation 5 and the von Karman medium inhomogeneities autocorrelation function, a formula for the differential scattering cross section of unit volume of a medium has been obtained (equation 6). Values of $\sigma(\Theta)a / \langle \epsilon^2 \rangle$ in function of scattering angle Θ have been given. Dependence of $\sigma(\Theta)a / \langle \epsilon^2 \rangle$ on the von Karman parameter ν has been in Fig.3. The total scattering cross section of unit volume of a medium has been calculated by means of the formula 8. The obtained results have been presented in Fig.4. It has been stated that values of $\sigma, a / \langle \epsilon^2 \rangle$ increase with increasing in ka values, as well as with increasing in the parameter ν . Using the equation 10 for the complex effective wave number derived by means of the Green function method (with the bourret approximation), the real part n_1 of acoustic refractive index has been calculated and it has been proved that in the case $ka \gg 1$, $n_1 = 1 + \langle \epsilon^2 \rangle / 8$ for all three forms of medium inhomogeneities correlation function.