ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 74 Nr kol. 1285

Henryk GLIŃSKI

O PEWNYM PRZEKSZTAŁCENIU NA PŁASZCZYŹNIE WZGLĘDEM PĘKU STOŻKOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono przekształcenie płaszczyzny euklidesowej, którego bazą jest pęk stożkowych homotetycznych i dowolnie ustalony punkt. Wzajemne przyporządkowanie sobie punktów następuje na podstawie relacji biegunowości. W pracy omówiono podstawowe własności przekształcenia i wykazano, że obrazem prostej jest krzywa rzędu III.

ON CERTAIN TRANSFORMATION INTO PLANE IN RELATION TO A PENCIL OF CONIC SECTION

Summary. In the paper a transformation on a Euclidean plane is presented, whose basis are a pencil of conic sections and an arbitrary fixed point. The correspondence between points is related to polarity. Basic properties of the transformation are investigated. It is proved that the image of straight line is a curve of the third order.

ÜBER EINE TRANSFORMATION AUF EINE EBENE HINSICHTLICH EINEN KEGELSCHNITTBÜSCHEL

Zusammenfassung. In der Arbeit ist dargestellt eine Transformation auf eine euklidische Ebene, welcher Basis ist ein Kegelschnittbüschel und ein beliebig konstant Punkt. Zuordnung zwischen Punkten der Ebene ist mit eine Polaritat verbunden. Die fundamentale Eigenschaften der Transformation wurden untersucht. Es wird geprüft, daß Bild einer Gerade ist eine Kurve III Ordnung.

1. Wstęp

Wprowadzenie zmiennej bazy przekształceń wielobiegunowych w postaci pęku stożkowych lub kwadryk zostało zaproponowane przez prof. M. Paleja w 1985 roku. Pomysł ten, otwierający nowe możliwości w zakresie przekształceń rzutowych, został uwzględniony w szeregu prac M. Paleja, a także w rozprawach doktorskich H. Glińskiego i St. Sulwińskiego. Omawiane w pracy przekształcenie stanowi w pewnym sensie nawiązanie do pracy doktorskiej autora; baza przekształcenia jest podobna, zmieniona została definicja przekształcenia.

2. Definicja przekształcenia

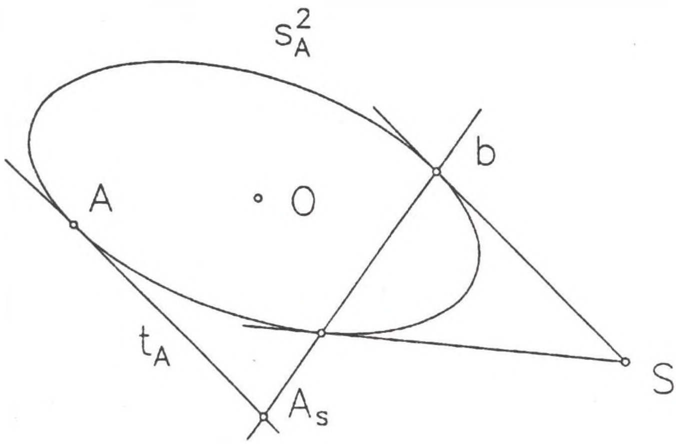
Ustalmy na płaszczyźnie euklidesowej uzupełnionej elementami niewłaściwymi pęk stożkowych homotetycznych (s_i^2) o środku w punkcie O (właściwym) oraz dowolny punkt S (właściwy). Każdy punkt płaszczyzny A ustala dokładnie jedną stożkową s_A^2 pęku (s_A^2).

Definicja 1. *Obrazem A_S punktu właściwego A, $A \neq O$ w przekształceniu $\mathfrak{s}$ nazywamy punkt przecięcia prostej biegunowej b punktu S względem stożkowej s_A^2 oraz prostej t_A stycznej do stożkowej w punkcie A (rys. 1).*

Definicja 2. *Obrazem punktu niewłaściwego A^∞ nazywamy punkt niewłaściwy A_S^∞, będący biegunem prostej OA^∞ względem dowolnej stożkowej pęku (s_i^2).*

3. Punkty osobliwe odwzorowania $\mathfrak{s}$

Punktem osobliwym odwzorowania $\mathfrak{s}$ nazywać będziemy taki punkt A, któremu odpowiada więcej niż jeden punkt. Z uwagi na definicję przekształcenia punktami osobliwymi są te punkty, dla których jednoczą się prosta biegunowa i prosta styczna. Zachodzi to dla punktów S i O. Obrazem punktu S jest prosta SN^∞, gdzie N^∞ jest biegunem prostej OS i jednocześnie obrazem wszystkich punktów prostej OS. Stożkowa pęku (s_i^2) przechodząca przez punkt O (dokładniej — część rzeczywista stożkowej), tj. środek pęku, degeneruje się do punktu, obrazem punktu O jest prosta ON^∞.



Rys. 1.

4. Jednoznaczność odwzorowania $\mathfrak{s}$

Obierzmy dowolny punkt A_S, $A \neq O$ i wyznaczmy punkt będący przeciwobrazem tego punktu w odwzorowaniu $\mathfrak{s}$. W tym celu należy z pęku (s_i^2) wybrać tę stożkową, dla której biegun punktu S przechodzi przez punkt A_S. Styczne do tej stożkowej z punktu A_S wyznaczają dwa punkty styczności A_1 i A_2, będące przeciwobrazami punktu A_s w tym odwzorowaniu. Zwróćmy uwagę, że prosta przechodząca przez punkt A_1 i A_2, będąca biegunową punktu A_S względem stożkowej s^2, przechodzi przez punkt S. Odwzorowanie $\mathfrak{s}$ nie jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym, a więc nie jest możliwe określenie odwzorowania odwrotnego.

5. Punkty stałe odwzorowania $\mathfrak{s}$

Rozważmy dowolną stożkową s^2 pęku (s_i^2) i biegunową punktu S względem tej stożkowej. Punkty, w których biegunowa przecina stożkową, są punktami stałymi odwzorowania. Styczne do stożkowej s^2 w tych punktach przechodzą przez punkt S. Ogół punktów stałych tworzy stożkową k^2 przechodzącą przez punkty O i S.

6. Obraz prostej w odwzorowaniu $\mathfrak{s}$

Ustalmy dowolną prostą m i rozważmy szereg punktów $m(A, B, C, \ldots)$. Rzucając punkty tego szeregu z punktu O, otrzymujemy pęk prostych $O(p_A, p_B, p_C, \ldots)$. Każdej prostej tego pęku przyporządkujemy sprzężoną z nią średnicę dowolnej stożkowej pęku (s_i^2). Otrzymamy pęk $O(\bar{p}_A, \bar{p}_B, \bar{p}_C, \ldots)$. Przecinając ten pęk prostą t^∞, mamy szereg punktów $t^\infty(p_A^\infty, p_B^\infty, p_C^\infty, \ldots)$, rzutowy do szeregu $m(A, B, C, \ldots)$. Proste łączące odpowiadające sobie punkty tych szeregów tworzą stożkową p^2 prostych stycznych. Każda z prostych tej stożkowej jest prostą styczną do ustalonej przez ten punkt stożkowej pęku (s_i^2).

Biegunowe punktów $m(A, B, C, \ldots)$ względem stożkowych s_A^2, s_B^2, $s_C^2, \ldots$ tworzą pęk prostych o wierzchołku w punkcie niewłaściwym N^∞, będącym biegunem prostej OS. Punkty przecięcia odpowiadających sobie prostych stożkowej p^2 i pęku $N^\infty(a, b, c, \ldots)$ są obrazami punktów A, B, $C, \ldots$ w odwzorowaniu $\mathfrak{s}$. Zbiór tych punktów, otrzymanych jako przecięcie pęku prostych rzędu II i pęku prostych rzędu I, tworzy krzywą rzędu III. Dowiedzione zostało zatem:

Twierdzenie 1. *Obrazem prostej w odwzorowaniu $\mathfrak{s}$ jest krzywa rzędu III.*

Zwróćmy uwagę, że krzywa ta przechodzi zawsze przez dwa punkty niewłaściwe (rys. 2):

N^∞, będący biegunem prostej OS i obrazem punktu przecięcia przez prostą OS danej prostej m;

M_S^∞, będący biegunem prostej OM^∞, gdzie M^∞ jest punktem niewłaściwym prostej m; jest to obraz punktu niewłaściwego prostej m.

Punkt N^∞ jest punktem wspólnym wszystkich krzywych będących obrazami prostych płaszczyzny.

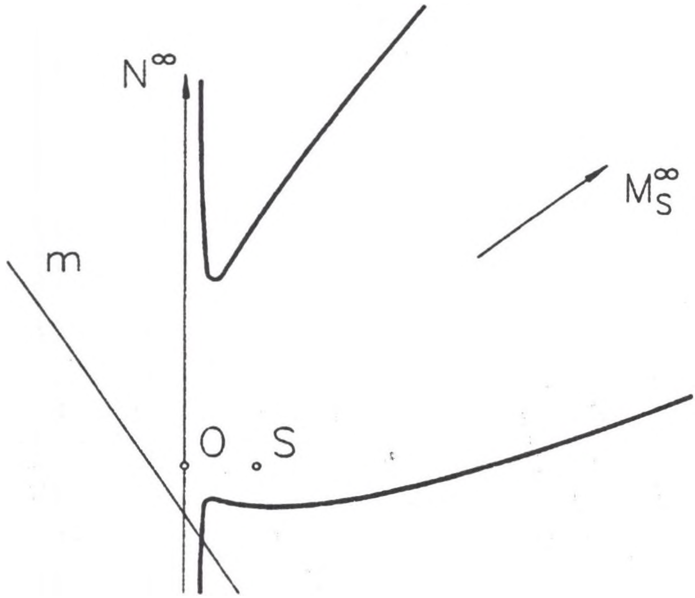
Przypadki szczególne:

a) Proste przechodzące przez punkt S (rys. 3)

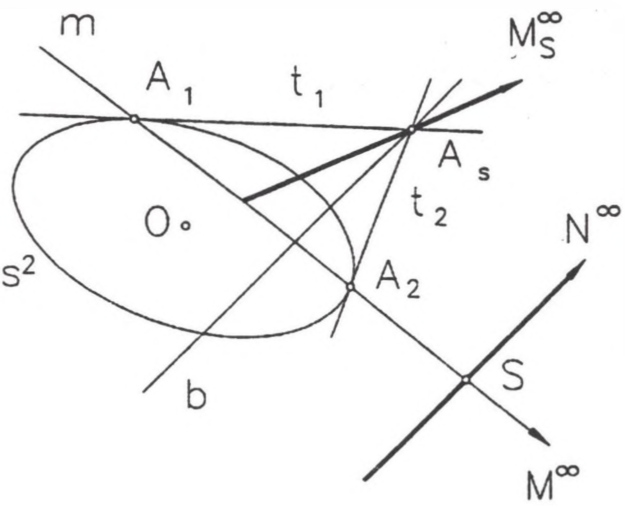
Styczne do dowolnej stożkowej pęku (s_i^2) w punktach przecięcia jej prostą m przecinają się w punkcie A, będącym biegunem prostej m. Biegunowa punktu S przechodzi przez punkt A, jest więc on obrazem punktów A_1 i A_2. Obrazem prostej m jest podwójnie liczona półprosta, leżąca na prostej OM^∞, oraz prosta SN^∞, gdzie N^∞ jest biegunem prostej OS.

b) Proste przechodzące przez punkt O (rys. 4)

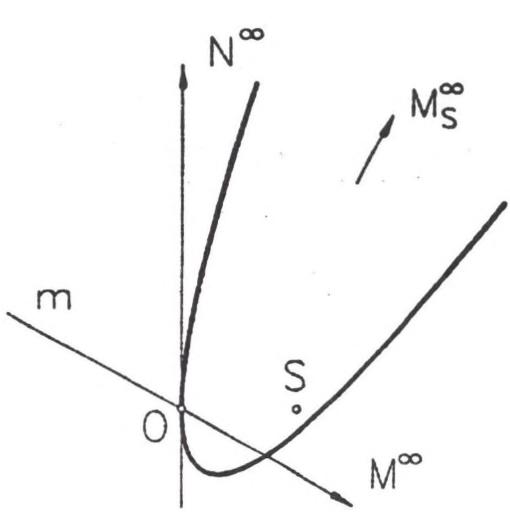
Ze względu na podobieństwo stożkowych pęku (s_i^2) styczne we wszystkich punktach prostej m przechodzącej przez punkt O tworzą pęk prostych równoległych. Obrazem prostej jest parabola przechodząca przez punkt O oraz prosta ON^∞. Średnicą paraboli jest prosta OM_S^∞, gdzie M_S^∞ jest biegunem prostej m.



Rys. 2.


m
A 1
t 1
M_S^∞
A s
t 2
N^∞
O
s^2
A 2
S
b
M^∞

Rys. 3.


N^∞
M_S^∞
m
S
O
M^∞

Rys. 4.

Literatura

[1] M. Palej, *Przekształcenie przestrzeni za pomocą biegunowości względem częściowo zmienionej bazy kwadryk homotetycznych* (rękopis 1991).

[2] H. Gliński, *O pewnych przekształceniach geometrycznych związanych z odbiciem zwierciadlanym,* praca doktorska, Gliwice 1986.

Recenzent: Dr hab. Eugeniusz Korczak

Wpłynęło do redakcji 31.03.1993 r.

Abstract

In the paper, a non-linear transformation on a Euclidean plane is presented. Whose basis are a pencil of conic sections and an arbitrary fixed point S. A center of the pencil is a proprer point 0, the conic sections are similitude. The correspondence between points is related to polarity. Every proper point selects one conic section s_A passing throught the point A. The point assigned to the point A is an intersection of a tangent to curve s_A and a polar of the point S to conic section. Basic properties of the transformation are investigated. It is proved that an image of a straight line in a general position is a curve of the third order. In particular, the images of the straight line are a parabola and a straight line or a double half-line and a straight line.