ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Feliks BARAŃSKI, Jan KOROŃSKI

UWAGI O FUNKCJACH GREENA I O EFEKTYWNYCH KONSTRUKCJACH ROZWIĄZAŃ PROBLEMÓW GRANICZNYCH DLA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Streszczenie

Przedmiotem pracy są krótkie informacje historyczne o najważniejszych równaniach fizyki matematycznej. Ponadto przedstawiono metody efektywnych konstrukcji rozwiązań zagadnień granicznych dla równań różniczkowych.

SOME REMARKS ON THE GREEN FUNCTION AND ON THE EFFECTIVE SOLUTION TO THE LIMIT PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The subject of the paper is to give the short informations on the most important equations of the mathematical physics. Moreover the methods of the effective constructions of the solutions to the limit problems for differential equations are given.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE GREEN - FUNKTION UND ÜBER DIE EFFEKTIVEN LÖSUNGEN DER ANFANGS - RANDWERTAUFGABEN FÜR DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Zusammenfassung

Das Objekt der Arbeit sind die kurzen historischen Informationen über die wichligsten Gleichungen der mathematischen Physik. Überdies wurden die Methoden der effectiven Anfangs - Randwertaufgaben für die Differentialgleichungen vorgestellt.

1. Równania fizyki matematycznej i funkcje Greena

Główne osiągnięcia matematyków XVIII wieku polegały na sformułowaniu równań różniczkowych cząstkowych modelujących zjawiska fizyczne. Wyłonił się dotąd nieodparty paradygmat naukowy. Sposobem modelowania przyrody stały się równania różniczkowe.

W 1753 Euler [5] zajął się dynamiką płynów i do roku 1755 sformułował układ równań różniczkowych cząstkowych opisujących ruch płynu bez lepkości. Stworzył model płynu jako ciągłego, nieskończenie podzielnego ośrodka i opisał jego ruch za pomocą ciągłych zmiennych, zależnych od położenia cząstek cieczy: prędkości, gęstości i ciśnienia.

Fourier sformułował równanie opisujące przepływ ciepła i zaproponował nową potężną metodę rozwiązywania go, zwaną jako analiza Fouriera. Metoda ta pomimo wielu zalet ma jednak podstawową wadę. Zawęża klasę rozwiązań.

Badanie materiałów pod wpływem naprężeń doprowadziło do równań sprężystości.

Analiza grawitacji doprowadziła do równań nazywanych obecnie równaniami Laplace'a i Poissona.

Te same równania pojawiły się znowu w hydrodynamice oraz elektrostatyce i sformułowano ich uogólnienie, zwane teorią potencjału [8].

Wiek XVIII i początek wieku XIX był okresem, w którym sformułowano większość klasycznej teorii fizyki matematycznej. Wyjątkiem jest tu równanie Naviera - Stokesa dla przepływu cieczy lepkiej i równanie Maxwella dla elektromagnetyzmu, które pojawiły się nieco później.

Jak widać z powyższego przeglądu, wiek XVIII i początek wieku XIX miał wiele osiągnięć w wyprowadzaniu równań różniczkowych cząstkowych. Jednakże okres ten miał wiele mniej osiągnięć w rozwiązywaniu tych równań.

Sukcesy paradygmatu równań różniczkowych były imponujące i rozległe. Wiele problemów, w tym także podstawowych i ważnych, prowadziło do równań, które mogły być rozwiązywane. Jednak inną rzeczą jest rozwiązywanie równań a inną ich wyprowadzanie.

Następował proces samoselekcji, dzięki któremu równania, których nie można było rozwiązać, stawały się automatycznie mniej interesujące od tych, których rozwiązanie było możliwe. (Trwa to zresztą do dziś). Podręczniki, z których nowe pokolenia uczyły się technik rachunkowych, zawierały oczywiście tylko problemy rozwiązalne.

W roku 1750 Lagrange podjął idee Eulera i dokonał na ich podstawie eleganckiego i doniosłego przeformułowania. W jego podejściu zauważamy dwie podstawowe sprawy. Pierwsza to zasada zachowania energii (gdy zaniedba się tarcie). Drugą było wprowadzenie współrzędnych uogólnionych. Współrzędne pozwalają przemienić problemy geometryczne na problemy algebraiczne poprzez związanie z każdym punktem zbioru liczb. Współrzędne uogólnione pozwoliły Lagrange'owi bardzo prosto wyprowadzić równania ruchu w formie niezależnej od wybranego konkretnie układu współrzędnych [8]. Sformułowanie

Lagrange'a ma liczne zalety w porównaniu ze sformułowaniem Newtona. Wiele z nich ma charakter techniczny. Łatwiej stosować to sformułowanie, gdy istnieją więzy ograniczające ruch. Unika się wtedy niewygodnych i skomplikowanych przekształceń współrzędnych. Lecz, nade wszystko, jest ono ogólniejsze, bardziej abstrakcyjne, bardziej eleganckie i prostsze.

Wreszcie idee te kontynuował Hamilton [8]. Jeszcze raz przeformułował dynamikę z jeszcze większą ogólnością. W hamiltonowskiej wersji tej teorii stan układu dynamicznego jest określony przez ogólny zbiór współrzędnych (jak u Lagrange'a), razem z powiązanym z nim zbiorem współrzędnych pędu (prędkość pomnożona przez masę). Pojedyncza wielkość, nazywana obecnie hamiltonianem układu, określa całkowitą energię za pomocą tych położeń i pędów. Szybkości zmian współrzędnych położenia i pędu w czasie są wyrażone za pomocą hamiltonianu w prostym eleganckim, jednolitym układzie równań, zwanych równaniami Hamiltona. Współczesne (te bardziej zaawansowane) podręczniki dynamiki rozpoczynają się często od równań Hamiltona.

Matematykom udało się uchwycić przynajmniej jeden porządek Wszechświata. Jednak, pomimo imponujących zdobyczy klasycznej fizyki matematycznej, pozostały jeszcze nietknięte całe dziedziny świata przyrody. Jeszcze gorzej wygląda sprawa metod rozwiązywania wyprowadzanych równań opisujących świat. Metoda, która w teorii rozwiązuje wszystko, lecz w praktyce nie jest użyteczna, nie ma szansy na zdobycie wielu entuzjastów niezależnie od tego, jakie mogą być jej filozoficzne podstawy.

Jak już wyżej zauważyliśmy, prawdziwe problemy pojawiają się podczas rozwiązywania wyprowadzonych równań. Jedna z metod rozwiązywania równań opiera się na zastosowaniu tzw. funkcji Greena.

Na początku XIX wieku zauważono, że jeśli $F(x,t)$ jest całką równania różniczkowego cząstkowego ze zmiennymi niezależnymi x, t, liniowego o stałych współczynnikach, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-s,T)f(s)ds$$

jest także całką tego samego równania [29]. Około roku 1820 Poisson wykorzystał powyższą myśl do napisania całek równania przewodnictwa cieplnego w postaci[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} exp(-(x-s)^2/4t)f(s)ds$$

Tak więc historia splotu funkcji jest ściśle związana z historią rozwiązywania problemów granicznych dla równań różniczkowych, w szczególności cząstkowych. Zasadniczy wpływ na rozwiązywanie problemów granicznych dla równań różniczkowych wywarł George Green. Wiemy, że funkcja Greena, względnie jej pochodna normalna względem brzegu,

[1] W [29], wydanie I, PWN, Warszawa 1980, brak czynnika $\frac{1}{\sqrt{t}}$

spleciona z funkcjami danymi w warunkach granicznych lub z prawą stroną równania, daje w sumie efektywny wzór na rozwiązanie rozważanego problemu granicznego, o ile funkcja Greena dana jest efektywnie. Często funkcja Greena nie jest dana efektywnie. Jest to wynikiem tego, że funkcję Greena definiuje się aksjomatycznie jako funkcję, która spełnia rozważane równanie w danym obszarze i spełnia warunki graniczne na brzegu tego obszaru. Zatem funkcja Greena nie zależy tylko od równania różniczkowego, które rozwiązujemy, ale zależy także od geometrii brzegu obszaru, w którym rozważamy równanie i od struktury warunków granicznych. Nieuwzględnienie powyższego doprowadziło na terenie równań różniczkowych do pewnych mitów w odniesieniu do problemu konstrukcji rozwiązań problemów granicznych dla równań różniczkowych. Jedni, mniej zorientowani, uważają, że każdy problem graniczny można rozwiązać poprzez zastosowanie funkcji Greena. Inni znowu stwierdzają, że funkcja Greena jest bardzo dobrym narzędziem do rozwiązywania problemów granicznych dla równań różniczkowych, ale w bardzo specjalnych prostych obszarach, w których konstruuje się rozwiązanie. Poniżej na przykładzie równań parabolicznych i poliparabolicznych odniesiemy się zarówno do jednych, jak i drugich.

Na początku należy zauważyć, że, jak już wyżej wspomniano, funkcja Greena jako obiekt zdefiniowany aksjomatycznie wymaga jeszcze dowodu istnienia, czyli konstrukcji i to efektywnej konstrukcji, jeśli liczymy na jawną postać rozwiązania.

Uważa się, że początki funkcji Greena sięgają roku 1828. Wtedy to po raz pierwszy w teorii równań różniczkowych, w przypadku równania cząstkowego, zwanego równaniem Laplace'a, które zostało wyprowadzone przez Eulera w 1752 roku, Green użył terminu „funkcja potencjalna" dla określenia potencjału newtonowskiego. Gauss w 1839 roku nie znając wyniku Greena opublikował swoją pracę na temat teorii potencjału, gdzie nazwał potencjałem rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a.

O Greenie obszerniej traktuje praca [6], powstała z okazji dwusetnej rocznicy urodzin Greena, która minęła w 1993 roku. Aby przybliżyć postać tytułowego bohatera zacytujemy obszerniejszy fragment tej pracy :

> „... George Green urodził się 14 lipca 1793 roku w Sneiton koło Nottingham. Był samoukiem, opuścił bowiem szkołę w młodym wieku, by pracować w piekarni ojca. Kiedy jego ojciec otworzył młyn, chłopiec w pokoju na piętrze studiował matematykę i fizykę, książki pożyczał z biblioteki. Green z dużym zainteresowaniem śledził nowe odkrycia w zakresie nauki o elektryczności. Były to lata dwudzieste dziewiętnastego stulecia, wówczas nie było jeszcze matematycznej teorii zjawisk elektrycznych, jedynie praca Poissona (Simeon Denis Poisson 1781 - 1840) z 1812 roku dała początek tej teorii. Green studiował prace Laplace'a (Pierre Simon de Laplace 1749 - 1827) i tak pisze na temat ujęcia teorii elektryczności w ramy analizy matematycznej:

„Rozważając jak pożądanym byłoby, aby siła o tak uniwersalnym działaniu, jak elektryczność dała się ująć, w miarę możliwości, w ramy rachunku i rozmyślając nad korzyściami, które w rozwiązywaniu wielu trudnych problemów płyną z tego, że nie bada się zupełnie poszczególnych sił działających na różne ciała jakiegoś układu, ograniczając się do rozważania tej szczególnej funkcji, od różniczek której wszystkie one zależą, zostałem naprowadzony na próby, czy byłoby możliwe odkryć jakieś związki pomiędzy tą funkcją a ilościami elektryczności w ciałach wytwarzających ją".

W roku 1828 Green opublikował swoją najważniejszą pracę „Essay on the Application of Mathematical Analysis of the Theories of Electricity on Magnetism".

Teoria wyłożona w tej pracy stanowiła początek nowoczesnych teorii elektryczności i magnetyzmu, a mówiąc ogólnie nowoczesnej teorii fizyki matematycznej w Anglii. Chociaż twierdzenie, znane dzisiaj jako twierdzenie Greena, pojawiło się w tej pracy, jednak ten ważny wynik był chwilowo nie zauważony. Powodem tego był mały nakład i lokalne rozpowszechnienie dzieła. Gauss nie znał pracy Greena, gdy w 1839 roku opublikował swoją pracę na temat teorii potencjału. Warto tu jednak podkreślić, że zarówno dzieła Greena jak i Gaussa dały początek nowej niezależnej gałęzi matematyki, jaką jest teoria potencjału. Green po raz pierwszy użył terminu „funkcja potencjalna", zaś Gauss nazwał „potencjałem" rozwiązanie równania Laplace'a.

W roku 1829 umiera ojciec Greena. Po jego śmierci przyjaciele skłonili Greena do tego, aby podjął studia w Caius College w Cambridge. Green rozpoczyna studia dopiero w 1833 roku po czterech latach indywidualnej nauki dla wypełnienia luk w wiedzy podstawowej. Studiuje do 1837 roku. W tym czasie publikuje szereg prac, które stanowią rozszerzenie pierwszej pracy. Prace dotyczą między innymi problemu odbicia i załamania głosu, odbicia i załamania światła na wspólnej powierzchni dwu niekrystalicznych ciał.

W dwa lata później Green mimo sukcesów zawodowych opuszcza Cambridge. Jest chory, wraca do Sneiton. Jego stan zdrowia znacznie się pogarsza, umiera 31 marca 1841 roku.

W cztery lata po jego śmierci jego dzieło z 1828 roku zostało opublikowane w Crelle's Journal przez Williama Thompsona (późniejszego Lorda Kelwina), a wyłożona tam teoria została udostępniona szerokiej rzeszy uczonych. Green, który właściwie był samoukiem, przyczynił się do stworzenia nowoczesnej teorii fizyki matematycznej.

Dzisiaj z nazwiskiem Greena wiążemy przede wszystkim pojęcie „funkcja Greena" i „wzory Greena".

Jak wiemy, wzory Greena wyrażają związek między całkami różnych typów.

Wzór

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

wyrażający związek między całką podwójną po obszarze D a całką krzywoliniową po brzegu C tego obszaru znał już Euler w 1771 roku. W swoim dziele z 1828 roku Green opublikował dwa następne wzory:

i) pierwszy wzór Greena

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}dxdydz = \int_S\int v\frac{\partial u}{\partial n}d\partial - \iiint_\Omega v\Delta u dxdydz,$$

ii) drugi wzór Greena

$$\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dxdydz = \int_S\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\delta,$$

gdzie Ω jest obszarem przestrzeni trójwymiarowej, S - powierzchnią ograniczającą ten obszar, $\frac{\partial v}{\partial n}$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ są pochodnymi w kierunku normalnej zewnętrznej do powierzchni S. ..." (koniec cytatu z pracy [6] z pewnymi zmianami w oznaczeniach).

Green wprowadził pierwszy funkcję, zwaną później funkcją Greena, w celu wyznaczenia rozwiązania problemu Dirichleta dla równania Laplace'a. Zdefiniowanie funkcji Greena pozwoliło przeformułować problem różniczkowy na równoważny problem całkowy zapoczątkując równocześnie teorię potencjału zastosowaną do pola elektrycznego.

Aby unaocznić rolę funkcji Greena w teorii równań różniczkowych rozważmy problem Dirichleta dla równania Laplace'a w kuli. Problem ten polega na wyznaczeniu takiej funkcji u, która spełnia następujące równanie Laplace'a

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0, \text{ gdzie } \Delta = \sum_{i=1}^{3} D_{x_i}^2, \tag{1}$$

które rozważamy w kuli $D = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} < R\}$. Poszukiwane rozwiązanie spełnia następujący warunek brzegowy

$$u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) \tag{2}$$

dla tych wszystkich (x_1, x_2, x_3), które leżą na powierzchni kuli D. Tzn. $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = R$.

Jak wiadomo z monografii [24], funkcja Greena dla problemu granicznego (1) - (2) ma postać:

$$G(x,y) = U(x,y) + H(x,y), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3),$$

gdzie

$$U(x,y) = \frac{1}{r}, \quad r = \left(\sum_{i=1}^{3}(y_i - x_i)^2\right)^{1/2}$$

jest rozwiązaniem podstawowym dla równania Laplace'a. Natomiast funkcja $H(x,y)$ jest częścią regularną funkcji Greena, którą dla poszczególnych obszarów daje się efektywnie wyznaczyć. Na przykład dla kuli D, w której rozważamy równanie (1), część regularna funkcji Greena jest postaci

$$H(x,y) = -\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{\bar{r}} \text{ dla } x \neq 0 \text{ lub } H(x,y) = -\frac{1}{R} \text{ dla } x = 0,$$

gdzie O jest środkiem kuli $K(O,R)$ oraz $\rho = \overline{Ox}$, $r = \overline{yx}$, $\bar{r} = \overline{y\bar{x}}$, zgodnie z rys. 48 na str. 253 w monografii [24] (wydanie polskie z 1957).

Rozwiązaniem problemu (1) - (2) jest funkcja

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial D} f(y) D_{n(y)} G(x,y)|_{y \in \delta D} d\sigma_y.$$

Gdyby równanie (1) miało niezerową prawą stronę, tzn. gdybyśmy rozważali równanie Poissona, to rozwiązanie problemu Dirichleta dla równania Poissona w kuli D byłoby sumą powyżej wypisanej całki i splotu funkcji Greena z prawą stroną równania Poissona.

Wspomnijmy tu, że również F. Leja (zmarły w 1979 roku) zajmował się konstrukcją funkcji Greena dla równania Laplace'a w szerokiej klasie obszarów płaskich. Podał także warunki przedłużalności rozwiązania problemu Dirichleta poza brzeg za pomocą pewnego warunku wielomianowego.

Nadmieńmy tutaj dla uniknięcia nieporozumień, że fizycy powszechnie funkcję Greena utożsamiają z rozwiązaniem podstawowym, które jest funkcją Greena w całej przestrzeni. Funkcja Greena nie ma wówczas części regularnej, a ma tylko część osobliwą, czyli rozwiązanie podstawowe.

Podobnie jak dla równania Laplace'a, czy Poissona, można wprowadzać pojęcie funkcji Greena dla innych równań, również dla równań zwyczajnych. My jednak prześledzimy rozwój metod rozwiązywania problemów granicznych dla równań parabolicznych i poliparabolicznych, tak jak to już wcześniej zapowiedzieliśmy.

Skoncentrujmy się chwilowo na pierwszym problemie Fouriera, tj. na problemie poszukiwania rozwiązania spełniającego równanie Fouriera, którego wartość znamy dla każdej zmiennej przestrzennej w ustalonym czasie t_0 (warunek początkowy) i znamy wartości rozwiązania dla wszystkich chwil czasu t na brzegu obszaru, w którym rozważamy równanie (warunek brzegowy).

Dla pierwszego problemu Fouriera, rozważnego w bardziej skomplikowanym obszarze niż prostokąt, a mianowicie w trapezie czasoprzestrzennym, funkcję Greena po raz pierwszy wprowadził w 1908 roku E. Levi w pracy [25], posługując się metodą odbić symetrycznych Volterry.

W monografii M. Krzyżańskiego [24] znajdujemy efektywną konstrukcję funkcji Greena dla pierwszego problemu Fouriera w prostokącie czasoprzestrzennym. Krzyżański konstruuje funkcję Greena metodą odbić symetrycznych względem boków prostokąta zorientowanych czasowo, powołując się na pracę Leviego [25]. Konstrukcja funkcji Greena metodą zaczerpniętą z pracy Leviego jest poprawna i, co równie ważne, efektywna dla obszarów o brzegach nie zmieniających się z czasem. Natomiast w przypadku trapezu prostoliniowego, czy też krzywoliniowego, konstrukcja ta staje się bardzo skomplikowana i przez to mało efektywna.

Spowodowało to zaistnienie kilku prób innego podejścia do rozwiązania pierwszego problemu Fouriera i to w trapezie krzywoliniowym, a więc w obszarze o dość skomplikowanej geometrii brzegu. I tak w monografii Kamkego „Differentiallgleichungen (Partialdifferentiallgleichungen)", vol. II [9]na stronach 190 - 209 jest przytoczona in extenso z dowodami praca Havlitschka z 1951 roku [7] o konstrukcji funkcji Greena dla trapezu krzywoliniowego oraz dla zakrzywionych obszarów piramidalnych. Havlitschek konstrukcję funkcji Greena dla pierwszego problemu Fouriera opiera na tzw. funkcji θ Jacobiego, która wyraża się poprzez następujący szereg

$$\theta(a,b) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 a + nb} \quad \text{dla } a > 0.$$

Ponadto konstrukcja Havlitschka opiera się również na funkcjach nad- i podparabolicznych (metoda Perrona) i jest bardzo skomplikowana, a przez to mało konstruktywna.

Usunięciem tych komplikacji zajęła się w ostatnich latach grupa matematyków krakowskich z Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej: F. Barański, J. Koroński, J. Milewski i A. Pieniążek. Wymienieni matematycy zastosowali transformację prostującą brzeg obszaru [1], [2], [26], [27] zarówno w przypadku trapezu krzywoliniowego, jak i w przypadku obszarów piramidalnych. Tranformacja obszarów o brzegach zmiennych w czasie do obszarów o brzegach stałych w czasie pozwala efektywnie zastosować konstruktywną funkcję Greena dla prostokąta oraz dla prostopadłościanu. Transformacja prostująca brzegi wpływa wprawdzie na komplikację wyjściowego równania, którą usuwa się przez zastosowanie odpowiednich równań całkowych. Jednak jest to bardziej efektywna droga konstrukcji rozwiązania niż metoda Havlitschka.

Zadajmy wreszcie pytanie: co poradzić w sytuacji, gdy stopień komplikacji równania różniczkowego, komplikacji geometrii brzegu i skomplikowana struktura warunków granicznych uniemożliwiają konstrukcję funkcji Greena? Odpowiedź znajdziemy w następujących pracach J. Korońskiego: [10] - [23], w których dla równań różniczkowych rzędu wyższego niż dwa o zmiennych czasoprzestrzennych niezależnych, zwanych równaniami poliparabolicznymi, rozważanymi między innymi w trapezie krzywoliniowym, z różnymi wariantami warunków granicznych, zostały wyznaczone efektywne rozwiązania. Jednakże w tych pracach zrezygnowano ze stosowania funkcji Greena (której w omawianych przypadkach nie udaje się skonstruować) na rzecz specjalnie definiowanych serii brzegowych potencjałów cieplnych o niewiadomych gęstościach i potencjałów funkcji źródła. W definiowaniu tych potencjałów wykorzystuje się wcześniej wspomnianą myśl Poissona z 1820 roku, stosując zmodyfikowane rozwiązanie podstawowe dla równania ciepła tak, aby stosowało się do równań cząstkowych wyższych rzędów. Nieznane gęstości potencjałów brzegowych są wyznaczane przez rozwiązywanie stosownych układów równań całkowych typu Volterry I - rodzaju, które przy wykorzystaniu transformacji Abela [28] sprowadzane są do układów równań całkowych II rodzaju, a te dają się już efektywnie rozwiązać. Równanie bikaloryczne w trapezie krzywoliniowym rozważali powyżej zaprezentowaną metodą F. Barański i J. Musiałek w pracach [3] i [4]. Przedstawiona metoda pozwoliła J. Korońskiemu rozwiązać szereg problemów odwrotnych dla równań parabolicznych i poliparabolicznych, a także, dodatkowo stosując twierdzenie Banacha o punkcie stałym, zostały rozwiązane nieliniowe problemy dla równań poliparabolicznych.

Na koniec dodamy, że na konstruktywnym wyznaczaniu rozwiązań równań fizyki matematycznej i równań cząstkowych rzędów wyższych niż dwa, a także i równań zwyczajnych, skupiali swoje wysiłki pracownicy Zakładu Analizy Matematycznej Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej, którym do niedawna kierował F. Barański oraz pracownicy Zakładu Równań Różniczkowych Instytutu Matematyki AGH, którym do niedawna kierował J. Musiałek.

Efektem tych wysiłków są następujące monografie wydane przez Politechnikę Krakowską (których redaktorem naukowym był F. Barański): [30] - [35] oraz następujące zeszyty naukowe Opuscula Mathematica: [36] - [42], wydane przez AGH (czasopismo, które przed drugą wojną światową założył A. Hoborski).

Opublikowano również wiele prac wymienionych zespołów w innych czasopismach matematycznych w Polsce i za granicą. Szczególnie duże osiągnięcia w zagadnieniach granicznych z nielokalnymi warunkami dla różnych typów równań ma L. Byszewski. Większość ze swoich prac opublikował w renomowanych czasopismach matematycznych, głównie zagranicznych.

Najbardziej aktywnymi autorami prac z zakresu efektywnego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego i wyższych, a także równań zwyczajnych są: F. Barański, L. Byszewski, J. Milewski, J. Koroński i A. Pieniążek z Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej. W AGH najbardziej aktywnymi okazali się J. Musiałek, M. Filar i K. Szałajko. Z WSP w Krakowie aktywniej działali E. Wachnicki i J. Górowski. Dodajmy wreszcie, że poważne zasługi w dziedzinie efektywnego rozwiązywania równań różniczkowych mają M. Krzyżański (zmarły w 1965 roku) i Z. Kowalski (zmarły w 1991 roku), obaj z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Osiągnięcia w dziedzinie równań różniczkowych w AGH, PK i UJ będą przedmiotem oddzielnie przygotowywanych prac.

2. Uwagi końcowe

Można jasno zapytać: — kto pierwszy wprowadził pomocniczą funkcję, zwaną potem funkcją Greena w celu rozwiązywania równań różniczkowych? oraz — kto pierwszy podał aksjomatyczną definicję funkcji Greena? Odpowiedź na drugie pytanie wymagałaby bardzo gruntownych badań historycznych, polegających na sumiennym przeglądnięciu sporej liczby prac i podręczników z równań różniczkowych (pod warunkiem, że prace te byłyby osiągalne). Odpowiedź na pierwsze pytanie, w świetle tego co wyżej powiedziano, wydaje się być prosta. Mianowicie, powszechnie uważa się, że funkcję Greena pierwszy wprowadził Green w pracy „Essay on the Application of the Mathematical Analysis of the Theories of Electricity on Magnetism". Jeżeli jednak zwrócimy uwagę na to, że w przypadku całej przestrzeni rozwiązanie podstawowe dla równania ciepła jest funkcją Greena (gdyż część regularna odpada — przeciwnie niż w przypadku obszarów ograniczonych), to wobec tego, co powiedzieliśmy poprzednio o splocie i o pomyśle Poissona, stwierdzimy, że praktycznie pierwszy funkcję Greena do rozwiązania równania Fouriera na całej osi rzeczywistej wprowadził ok. 1820 roku właśnie Poisson.

Zwróćmy również uwagę na to, że bardzo już stara idea Poissona odżyła ostatnio w potencjałowej metodzie rozwiązywania równań różniczkowych. Świadczą o tym wyżej wypowiedziane uwagi o efektywnym rozwiązywaniu problemów granicznych dla równań parabolicznych i poliparabolicznych oraz częste stosowanie potencjałów do badania uogólnionych rozwiązań równań różniczkowych. Metoda potencjałowa daje najsilniejsze wyniki, jeśli chodzi o efektywne rozwiązywanie problemów granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych, z czym mieli ogromne kłopoty matematycy XVIII i XIX wieku.

W pracy z wyboru więcej uwagi poświęciliśmy równaniom cząstkowym parabolicznym i poliparabolicznym, marginalnie wspominając o równaniach eliptycznych, pomijając równanie typu hiperbolicznego i równania zwyczajne.

Literatura

[1] Barański F., Pieniążek A.: The limit parabolic problem for semi - curvilinear trapezium with Neumann boundary condition. The limit problems for differential equations. Cracow University of Technology, Monograph 118 (1991), 5 - 13.

[2] Barański F., Pieniążek A.: The limit problem for the system of the parabolic equations for curvilinear trapezium with Neumann boundary data. The limit problems for differential equations. Cracow University of Technology, Monograph 118 (1991), 22 - 32.

[3] Barański F., Musialek J.: Biparabolic problem for the curvilinear strip. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mat. - Fiz., z. 64, (1990).

[4] Barański F., Musiałek J.: Biparabolic problem for curvilinear strip. Opuscula Mathematica, z. 14 (1994), 35 - 51.

[5] Boyer C. B.: A history of Mathematics. JohnWiley, New York, 1968.

[6] Hachaj J.: George Green i jego dzieło — w dwusetną rocznicę urodzin. Materiały pokonferencyjne Konferencji Naukowo - Dydaktycznej Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej 23 - 28.09.1993, Janowice, 15 - 18.

[7] Havlitschek K.: Randwertaufgaben der Homogenen Warmeleitungsgleichung. Diss. Tubingen, 1951 (Deserble, Math. Annalen 140 (1960), 65 - 70.

[8] Hurd D. J., Kipling J. J.: The Origins and Growth of Physical Science (dwa tomy), Penguins Books, Harmondsworth, 1964.

[9] Kamke E.: Differentialgleichungen II. Partiale differentialgleichungen, Leipzig, 1962.

[10] Koroński J.: The three - parabolic problem for the time - spatial three - dimensional cylinder. Opuscula Mathematica, z. 6, (1990), 77 - 103.

[11] Koroński J.: The three - parabolic problem for the strip with boundary conditions of Lauricella type. Opuscula Mathematica, z. 6, (1990), 77 - 103.

[12] Koroński J.: The polyparabolic problem for the quart time plane with boundary conditions of Lauricella type. The limit problems for differential equations, Cracow University of Technology, Monograph 118, (1991), 95 - 116.

[13] Koroński J.: The polyparabolic problem for the time - spatial strip with boundary conditions of Lauricella type. The limit problems for differential equations, Cracow University of Technology, Monograph 118, (1991), 117 - 128.

[14] Koroński J.: The polyparabolic problem for the time - spatial three dimensional cylinder with boundary conditions of Riquier type. Opuscula Mathematica, No. 12 (1993), 25 - 38.

[15] Koroński J.: The three - parabolic problem for the strip with curvilinear trapezium. (in press — Fasciculi Mathematica).

[16] Koroński J., Motyl E.: The biparabolic limit problem for the strip with boundary conditions of the third kind. The limit problems for differential equations, Cracow University of Technology, Monograph 118, (1991), 143 - 160.

[17] Koroński J.: The periodic solution to biparabolic equation for the three dimentional time - spatial cylinder. (unpublished).

[18] Koroński J.: The periodic solution to three - parabolic equation for the three dimentional time - spatial cylinder with boundary conditions of Riquier type. (unpublished).

[19] Koroński J.: The first linear polyparabolic problem for the curvilinear time - spatial trapezium. Demonstratio Mathematica, vol. 27, nr 2 (1994), 351 - 366.

[20] Koroński J.: The first linear polyparabolic problem for the curvilinear time - spatial half - bounded domain with curvilinear boundary. (in press — Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej).

[21] Koroński J.: The nonlinear polyparabolic initial - boundary - value problem for the curvilinear time - spatial trapezium with boundary conditions of Lauricella type, (unpublished).

[22] Koroński J.: The periodic solution to polyparabolic equation for the three - dimentional time - spatial cylinder with boundary conditions of Riquier type, (unpublished).

[23] Koroński J.: Solution of nonlinear polyparabolic problem for the three - dimentional time - spatial cylinder with boundary conditions of Riquier type (unpublished).

[24] Krzyżański M.: Partial differential equations of second order. Vol. I, PWN, Warszawa, 1971.

[25] Levi E.: Sul equazione del calore. Annali di Mathematica, ser. 3, 14 (1908).

[26] Milewski J.: The limit parabolic problem for the trapezium with the boundary conditions of third kind. The limit problems for differential equations, Cracow University of Technology, Monograph 118 (1991). 212 - 234.

[27] Milewski J.: Green function and the limit problem for parabolic equation and for $n-$dimensional time - spatial piramidal domain. The limit problems for differential equations, Cracow University of Technology, Monograph 118 (1991), 235 - 261.

[28] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania. Tom I, PWN, Warszawa 1958.

[29] Struick D. J.: Krótki zarys historii matematyki (do końca XIX wieku). PWN, Warszawa 1960.

[30] Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, z. 3 (1981).

[31] Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, z. 4 (1978), „The limit problems for elliptic and parabolic differential equations", Kraków 1978.

[32] Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, z. 4 (1982), „The limit problems for elliptic and parabolic partial differential equations", Kraków 1982.

[33] Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Monograph 77 (1989), „The limit problems for differential equations", Kraków 1989.

[34] Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Monograph 118 (1991), „The limit problems for differential equations", Kraków 1991.

[35] Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Monograph 119 (1991), „Polyparabolic initial - boundary problems", Kraków 1991.

[36] Zeszyty Naukowe AGH, Opuscula Mathematica nr 1 (1985), Kraków 1985.

[37] Zeszyty Naukowe AGH, Opuscula Mathematica nr 3 (1987), Kraków 1987.

[38] Zeszyty Naukowe AGH, Opuscula Mathematica nr 4 (1988), Kraków 1988.

[39] Zeszyty Naukowe AGH, Opuscula Mathematica nr 5 (1989), Kraków 1989.

[40] Zeszyty Naukowe AGH, Opuscula Mathematica nr 6 (1990), Kraków 1990.

[41] Zeszyty Naukowe AGH, Opuscula Mathematica nr 10 (1991), Kraków 1991.

[42] Zeszyty Naukowe AGH, Opuscula Mathematica nr 12 (1993), Kraków 1993.

Abstract

The paper is a more extensive version of the lecture delivered at the Conference on History of Mathematics held in May 1994 in Rudy Raciborskie. It is a presentation of some remarks on the Green function and on the effective solutions to the limit problems for differential equations.

The first part concerns the informations about the Green function for Laplace, Poisson and Fourier equations.

In the second part the methods of the effective constructions to the solutions of the elliptic, parabolic and polyparabolic limit problems are presented. The spacious bibliography concerns the problems presented in this paper.