ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Andrzej KAMIŃSKI

JANA MIKUSIŃSKIEGO FILOZOFIA MATEMATYKI

Streszczenie

W związku z półwieczem rachunku operatorów Mikusińskiego przypomniane są fakty dotyczące tej teorii oraz podjęta próba scharakteryzowania indywidualnych cech twórczości jej autora.

JAN MIKUSIŃSKI'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Summary

In connection with the half-century of the Mikusiński operational calculus, some facts concerning the theory are reminded and an attempt is made to characterize individual features of the author's works.

ЯНА МИКУСИНСКОГО ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Резюме

В связи с полстолетием операционного исчисления Микусинского напомнены факты об этой теории и сделана попытка охарактеризовать индивидуальные свойства творчества автора.

1. Rachunek operatorów

Mija właśnie pół wieku od narodzin teorii matematycznej, której autorem jest polski matematyk, a jego nazwisko związało się nierozerwalnie z nazwą teorii, tworząc zbitkę pojęciową równie trwałą jak przestrzenie Banacha czy całka Lebesgue'a. Chodzi o *rachunek*

operatorów Mikusińskiego. Jak słusznie zauważył profesor Wiesław Żelazko na sesji naukowej z okazji rocznicy śmierci profesora Mikusińskiego, rachunek operatorów Mikusińskiego oraz przestrzenie i algebry Banacha są jedynymi teoriami matematycznymi z polskimi nazwiskami, stanowiącymi rozdziały klasyfikacji przedmiotowej przyjętej w Mathematical Reviews i powszechnie stosowanej w świecie matematycznym.

Formalnie rzecz biorąc, pierwsze prace dotyczące tej teorii ukazały się drukiem w roku 1947 ([7] i [8]), jej podstawy zostały opublikowane w pracy [10] z roku 1950, a książka [11] prezentująca tę teorię w 1953 roku. Jednak w istocie pierwszą publikacją, której ukazanie się należy uznać za narodziny teorii, była niewielka książeczka pt. „Hyperliczby", powstała w lipcu 1944 r. Warunki okupacyjne spowodowały, że okoliczności powstania tej książeczki były niezwykłe. Ze względów konspiracyjnych autor podał jedynie swoje inicjały: J. G.-M. (G. oznacza tu skrót nazwiska rodowego autora) i podobnie postąpił w przypadku osób, którym dziękuje we wstępie „za życzliwe i cenne uwagi". Cały nakład książeczki o łącznej objętości 27 stron wyniósł zaledwie 7 egzemplarzy i został przygotowany własnoręcznie przez autora, który powielił rękopis przy użyciu klisz rentgenowskich. Wszystkie egzemplarze zostały rozdane uczestnikom tajnego seminarium, prowadzonego w Krakowie przez profesora Tadeusza Ważewskiego, na którym autor przedstawiał swoje idee.

„Hyperliczby" zostały po latach wydrukowane w większym nakładzie i to jednocześnie w dwóch odległych miejscach. Stało się to w roku 1983 z okazji 70 rocznicy urodzin profesora Jana Mikusińskiego. Upamiętniona ona została wydaniem w Warszawie dedykowanego jubilatowi tomu 77 czasopisma „Studia Mathematica", który otwierały „Hyperliczby" w angielskim tłumaczeniu, a z drugiej strony wydaniem przez komitet organizacyjny konferencji na temat funkcji uogólnionych i przestrzeni zbieżnościowych w Santa Barbara w Kalifornii facsimile oryginału „Hyperliczb" wraz z angielskim tłumaczeniem. Jako ciekawostkę dodajmy, że z okazji wydania „Hyperliczb" w „Studia Mathematica" redakcja i uczniowie profesora Mikusińskiego pragnęli rozszyfrować wszystkie inicjały umieszczone we wstępie i zwrócili się z tym do autora, ale nawet on po latach nie mógł odtworzyć jednego nazwiska. Dopiero pomoc ks. prof. Andrzeja Turowicza, uczestnika tamtego seminarium, pozwoliła „złamać szyfr".

Główna idea sprowadzenia rachunku operatorowego na grunt algebraiczny tkwiła już w tej pierwszej pracy, choć została zrealizowana tam za pomocą hiperliczb, czyli par złożonych z liczb i funkcji, z odpowiednio zdefiniowanymi nań działaniami, stanowiącymi jednoczesne uogólnienie pojęcia liczby i funkcji. Do pełnej konstrukcji algebraicznych podstaw teorii brakowało wtedy jeszcze twierdzenia Titchmarsha, dotyczące splotu funkcji rzeczywistych określonych na półprostej dodatniej. Twierdzenie to zostało wprawdzie udowodnione przez E.C. Titchmarsha już w 1926 r. w pracy [17], ale było początkowo mało znane i różni, w tym bardzo znani matematycy niezależnie nadal poszukiwali jego

dowodu (M.M. Crum udowodnił je ponownie w 1941 r. w pracy [3]; Laurent Schwartz postawił je jako problem swojemu doktorantowi J. Dufresnoy, którego rozwiązanie zostało opublikowane w dwóch pracach [4] i [5] z 1947 r. i 1948 r.; Jan Mikusiński postawił je jako problem w Colloquium Mathematicum w 1950 r.). Zarówno oryginalny dowód Titchmarsha, jak i następne dowody były trudne i opierały się na badaniu rozkładu zer funkcji analitycznych (Titchmarsh) bądź szybkości wzrostu funkcji analitycznych lub harmonicznych (Crum, Dufresnoy). Dopiero dowód podany przez C. Ryll-Nardzewskiego w 1952 r. był pierwszym dowodem opartym wyłącznie na teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

W pierwszej książce opublikowanej w 1953 r. rachunek operatorów jest już przedstawiony jako kompletna algebraiczna teoria, oparta na twierdzeniu Titchmarsha.

Niech $\mathcal{R}$ oznacza pierścień funkcji ciągłych (oznaczanych przez f lub $\{f(t)\}$) na półprostej dodatniej $[0,\infty)$ nad ciałem $\mathbf{R}$ liczb rzeczywistych z operacjami:

$$\alpha f + \beta g := \{\alpha f(t) + \beta g(t)\}; \qquad fg := \left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}$$

dla $f, g \in \mathcal{R}$ oraz $\alpha f, \beta g \in \mathbf{R}$. Druga z operacji jest nazywana operacją splotu funkcji na $[0,\infty)$ i pełni rolę mnożenia w pierścieniu $\mathcal{R}$. Twierdzenie Titchmarsha orzeka, że równość $fg = 0$ na $[0,\infty)$ implikuje $f = 0$ na $[0,\infty)$ lub $g = 0$ na $[0,\infty)$, tzn. piercień $\mathcal{R}$ nie ma dzielników zera. To pozwala w naturalny sposób zdefiniować ciało $\mathcal{M}$ formalnych ułamków f/g, gdzie $f, g \in \mathcal{R}$, z działaniami określonymi podobnie jak w przypadku zwykłych ułamków liczbowych. Ciało $\mathcal{M}$ nazywamy ciałem operatorów Mikusińskiego. Ciało to obejmuje wszystkie liczby rzeczywiste α, które są identyfikowane z ułamkami postaci $\{\alpha\}/\{1\}$, gdzie $\{\alpha\}$ dla danej liczby α oznacza funkcję tożsamościowo równą α na $[0,\infty)$, a także wszystkie funkcje f lokalnie całkowalne na $[0,\infty)$, utożsamiane z ułamkami postaci

$$\frac{\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}}{\{1\}}.$$

Istnieją w nim jednak elementy, które nie są ani liczbami ani funkcjami, np. $l := \{1\} = \{1\}\{1\}/\{1\}$ pełni rolę operatora całkowania, bo

$$lf = \left\{\int_0^t f(\tau), d\tau\right\},$$

a $s := 1/l$ pełni rolę operatora różniczkowania, bo

$$sf = f' + f(0)$$

dla funkcji f klasy C^1 i. ogólniej,

$$s^n f = f^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{(i)}(0)$$

dla funkcji f klasy C^n.

Te zależności pozwalają sprowadzić metody rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych zwyczajnych do rozwiązywania równań algebraicznych, a także uprościć metody rozwiązywania równań cząstkowych. Konstrukcja nawiązuje do rachunku operatorowego O. Heaviside'a, inżyniera angielskiego, który wykonywał podobne algebraiczne rachunki, nie dbając jednak o ich poprawność ([6]). Ich matematyczne uzasadnienie przyniosło oparcie rachunku operatorowego na pojęciu transformaty Laplace'a, co jednak spowodowało konieczność narzucania ograniczenia na wzrost w nieskończoności rozpatrywanych funkcji. Teoria Mikusińskiego uwalnia od tych ograniczeń, dzięki czemu gwarantuje jednoznaczość rozwiązań badanych równań różniczkowych, a przy tym upraszcza rachunki zarówno przy rozwiązywaniu równań różniczkowych, jak i w bezpośrednich zastosowaniach w elektrotechnice, statyce belek, czy chromatografii. Z drugiej strony teoria ta okazała się niezwykle płodna matematycznie, dostarczając wielu nowych zagadnień i nieoczekiwanych rozwiązań, ciekawych z teoretycznego punktu widzenia.

Książka prezentująca tę teorię stała się prawdziwym bestsellerem i miała niezliczoną liczbę wydań. Słowo „niezliczoną" można tu rozumieć dosłownie, ponieważ mimo wysiłków wielu osób nie udało się dotąd określić całkowitej ilości wydań tej książki. Jest to spowodowane przede wszystkim dużą liczbą wydań japońskich, które ukazywały się ze znaczną częstotliwością i autor nie był o nich nawet informowany; wiedział tylko, że pierwsze wydanie japońskie ukazało się w 1957 r. i że było ich ponad dziesięć. Organizatorzy sesji naukowej zorganizowanej w 1988 r. w Katowicach i poświęconej pamięci profesora Mikusińskiego bardzo liczyli na to, że liczbę wydań japońskich książki pomoże ustalić zaproszony na sesję profesor Hikosaburo Komatsu, ale i jemu się to nie udało. Profesor Komatsu zdołał natomiast uzyskać informację, że ogólna liczba egzemplarzy sprzedanych w Japonii przekroczyła 20 000 i z pewnością był to jeden z największych bestsellerów matematycznych na rynku japońskim. Ponieważ Japońskie Towarzystwo Matematyczne liczy mniej niż 5 000 członków, jest oczywiste, że wśród nabywców książki Jana Mikusińskiego musieli być nie-matematycy, prawdopodobnie głównie inżynierowie. Nie jest więc całkowicie wykluczone, że boom w przemyśle samochodowym w Japonii, który wystąpił w parę lat po pojawieniu się tej książki w Japonii, miał z tym faktem jakiś związek, choć tego typu sugestie pojawiały się w rozmowach z japońskimi matematykami jedynie w formie żartu.

Nie ulega natomiast wątpliwości, że książka była największym bestsellerem spośród książek matematycznych polskich autorów. Wymieńmy wszystkie jej wydania z wyjątkiem japońskich:

1. Rachunek operatorów. PWN, Warszawa 1953 (*pierwsze wydanie polskie*).

2. Операционное исчисление. Издательство Иностранной Литературы, Москва 1956 (*wydanie rosyjskie*).

3. Operatorenrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (*wydanie niemieckie*).

4. Rachunek operatorów. PWN, Warszawa 1957 (*drugie wydanie polskie rozszerzone*).

5. Operational Calculus. Pergamon Press and PWN, New York-Warszawa 1959 (*pierwsze wydanie angielskie*).

6. Operátorszámítás. Müszaki Könyvkiadó, Budapest 1961 (*wydanie węgierskie*).

7. Operational Calculus. Pergamon Press and PWN, New York-Warszawa 1967 (*reprint pierwszego wydania angielskiego*).

8. Operational Calculus, volume I. PWN and Pergamon Press, Warszawa-Oxford 1983 (*tom I drugiego rozszerzonego wydania angielskiego*).

9. Operational Calculus, volume II. PWN and Pergamon Press and PWN, Warszawa-Oxford 1987 [wspólnie z T.K. Boehme] (*tom II drugiego rozszerzonego wydania angielskiego*).

2. Próba charakterystyki

Jubileusz półwiecza, jakie upływa od narodzin rachunku operatorów, jest okazją, by zastanowić się nad dość wyjątkowymi cechami twórczości autora tej teorii.

Cechami wyróżniającymi twórcę rachunku operatorów są przede wszystkim oryginalność, prostota i elegancja podejścia do każdego zagadnienia. Profesor Mikusiński zawsze starał się znaleźć swą własną drogę w poszukiwaniu odpowiedzi na interesujące go pytania. Nawet jeśli okazywało się, że znane jest w literaturze rozwiązanie jakiegoś zagadnienia, to nie zaprzestawał poszukiwań, gdy nie zadowalało ono jego poczucia piękna i prostoty. Instyktownie wyczuwał, kiedy dana teoria bądź dowód twierdzenia mogą być opracowane lepiej, przystępniej, a przede wszystkim bardziej elegancko. I na ogół mu się to udawało; znajdował co najmniej równoważny opis matematyczny, wyrażony jednak przy użyciu dużo bardziej elementarnych środków, a przez to dostępny znacznie szerszemu kręgowi potencjalnych odbiorców (miał na uwadze zwłaszcza inżynierów i studentów); często zaś prezentowana przez niego metoda okazywała się ogólniejsza. Nierzadko nowy opis stymulował innych i stanowił punkt wyjścia do ich badań. Chyba podstawowym kryterium, jakim kierował się w swojej pracy, było kryterium piękna i elegancji. Uważał, że matematyka jest w swej naturze piękna i tylko z powodu nieudolności twórców to piękno pozostaje niekiedy w ukryciu. Świadomie odrzucał zagadnienia zbyt skomplikowane. Profesor Stanisław Łojasiewicz pisał: „W tworzeniu matematyki niewielu tak jak

on kierowało się przede wszystkim pięknem dowodu i konstrukcji. W naszych czasach, kiedy techniczne szczegóły zalewają matematykę prowadząc do zaniedbania jej głębi i estetyki, jego działalność w ciągu całego życia jest szczególnie cennym przykładem. Był prawdziwym matematykiem-artystą " (zob. [1], str. 33).

Powstanie rachunku operatorów jest tylko jednym z wielu przykładów takiej postawy twórczej profesora Mikusińskiego. Podobnie było w przypadku innych teorii matematycznych. Kiedy dowiedział się o stworzonej właśnie przez Laurenta Schwartza teorii dystrybucji, natychmiast zauważył, że teorię tę można oprzeć na znacznie prostszych i bardziej intuicyjnych podstawach matematycznych. Napisał o tym do Schwartza, który zgodził się z nim i zasugerował opublikowanie tego pomysłu ([9]), choć sam nie zmienił już funkcjonałowego ujęcia swej teorii (bardzo zaawansowanej w tym momencie); uzyskało ono wkrótce ogromną popularność i stało się kanonem. Prof. Mikusiński, zajęty opracowywaniem swego rachunku operatorów, miał możliwość powrotu do idei uproszczenia teorii dystrybucji dopiero po kilku latach, ale zrealizował tę ideę, podając bardzo elementarną i ścisłą matematycznie definicję dystrybucji w [12], a następnie rozwijając ciągową teorię dystrybucji we współpracy z R. Sikorskim, a później P. Antosikiem ([15], [16], [1]).

Definicja Mikusińskiego dystrybucji nawiązuje do intuicyjnej idei aproksymacji dystrybucji ciągami funkcyjnymi, leżącej u podstaw tego pojęcia i jest całkowicie elementarna — wymaga znajomości jedynie pojęć różniczkowalności funkcji, zbieżności jednostajnej ciągu funkcji oraz pojęcia relacji równoważności. Jest przy tym tak prosta, że można ją sformułować w paru zdaniach:

Definicja 1. *Mówimy, że ciąg (φ_n) funkcji gładkich jest podstawowy, jeśli dla każdego otwartego (ograniczonego) przedziału $I \subset \mathbf{R}^d$ istnieje liczba całkowita nieujemna k oraz istnieje ciąg funkcji gładkich (Φ_n) (zarówno k jak i ciąg (Φ_n) mogą zależeć od przedziału I), takie że $\Phi_n^{(k)} = (\varphi_n)$ na I oraz ciąg (Φ_n) jest zbieżny jednostajnie (do pewnej funkcji ciągłej) na I.*

Definicja 2. *Mówimy, że ciągi (φ_n) i (ψ_n) funkcji gładkich są równoważne, jeśli dla każdego otwartego (ograniczonego) przedziału $I \subset \mathbf{R}^d$ istnieje liczba całkowita nieujemna k oraz istnieją ciągi (φ_n) i (ψ_n) funkcji gładkich (zarówno k jak i ciąg (Φ_n) mogą zależeć od przedziału I), takie że $\Phi_n^{(k)} = \Psi_n^{(k)} = \varphi_n$ na I oraz ciągi (Φ_n) i (Ψ_n) są zbieżne jednostajnie do tej samej funkcji (ciągłej) na I.*

Drugą z definicji można zastąpić następującą krótszą definicją równoważną, ale odwołującą się do wcześniejszej definicji:

Definicja 3. *Mówimy, że ciągi (φ_n) i (ψ_n) funkcji gładkich są równoważne, jeśli ciąg naprzemienny:*

$$\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots$$

jest ciągiem podstawowym.

Zdefiniowana w ten sposób równoważność jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią, tzn. jest relacją równoważności w zwykłym rozumieniu tych słów. Klasy równoważności ze względu na tę relację nazywamy dystrybucjami.

Definicja ta jest nieporównanie bardziej elementarna niż powszechnie przyjęta definicja Schwartza, określająca dystrybucję jako ciągły funkcjonał liniowy na przestrzeni $\mathcal{D}$ funkcji gładkich o ograniczonym nośniku, wyposażonej w dość trudno opisywalną topologię (tzw. topologię granicy induktywnej).

Kolejnym przykładem prostoty ujęcia jest definicja całki, podana przez Jana Mikusińskiego (zob. [13] i [14]), która jest przy tym bardzo ogólna i uniwersalna; w ten sam sposób (bez użycia pojęcia miary) definiuje się zarówno całkę Lebesgue'a, jak i całkę Bochnera (definicję tę podajemy poniżej), a nieznaczna modyfikacja definicji prowadzi do aksjomatycznej teorii całki, obejmującej także inne pojęcia całki (np. całkę Daniella).

Definicja 4. *Niech f będzie funkcją określoną na $\mathbf{R}^d$ o wartościach w ustalonej przestrzeni Banacha X. Funkcję f nazywamy całkowalną w sensie Bochnera (a gdy $X = \mathbf{R}$, w sensie Lebesgue'a), jeśli istnieje ciąg (I_n) przedziałów w $\mathbf{R}^d$ postaci*

$$I_n = [a_n, b_n) = [\alpha_{1,n}, \beta_{1,n}) \times \ldots \times [\alpha_{d,n}, \beta_{d,n})$$

oraz ciąg (λ_n) elementów przestrzeni X, takie że spełnione są dwa warunki:

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n\| \operatorname{vol}(I_n) < \infty$;

(*b*) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{I_n}(x) < \infty$,

przy czym równość w (b) zachodzi dla tych punktów $x \in \mathbf{R}^d$, dla których szereg po prawej stronie równości jest zbieżny bezwzględnie.

Symbol $\operatorname{vol}(I_n)$ oznacza tu objętość przedziału I_n, czyli liczbę

$$\operatorname{vol}(I_n) = (\beta_{1,n} - \alpha_{1,n}) \cdot \ldots \cdot (\beta_{d,n} - \alpha_{d,n}),$$

a χ_{I_n} jest funkcją charakterystyczną przedziału I_n, tzn. przyjmującą wartość 1 dla $x \in I_n$ oraz 0 dla $x \notin I_n$.

Definicja 5. *Całkę funkcji f spełniającą warunki (a) – (b) definiujemy wówczas wzorem:*

$$\int_{\mathbf{R}^d} f := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \operatorname{vol}(I_n).$$

3. Relacja równoważności

Profesor Mikusiński miał odwagę stawiać pytania nawet w najbardziej oczywistych sprawach, kwestionować pojęcia i metody uświęcone wieloletnią tradycją i powszechnie zaakceptowane w świecie matematycznym. Jako przykład takiego podejścia niech posłużą jego obserwacje dotyczące tak elementarnego i standardowego pojęcia, jakim jest relacja równoważności.

Niech będzie dany zbiór X i relacja $\sim$ na nim, będąca relacją równoważności w klasycznym rozumieniu tego określenia, tzn. spełniająca następujące warunki:

1° (zwrotność) $x \sim x$ dla każdego $x \in X$;

2° (symetryczność) jeśli $x \sim y$, to $y \sim x$ dla dowolnych $x, y \in X$;

3° (przechodniość) jeśli $x \sim y$ i $y \sim z$, to $x \sim z$ dla dowolnych $x, y, z \in X$.

Przez klasę równoważności (klasę abstrakcji) $[x_0]$ wyznaczoną przez ustalony element $x_0 \in X$, ze względu na relację $\sim$, rozumiemy zbiór tych wszystkich elementów $x \in X$, które są w relacji $\sim$ z x_0, tzn.

$$[x_0] := \{x \in X : x \sim x_0\}. \tag{1}$$

Z założeń 1° - 3° relacji $\sim$ wynikają następujące dobrze znane własności klas równoważności:

(i) jeśli $x_2 \in [x_1]$, to $[x_1] = [x_2]$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$;

(ii) jeśli $[x_1] \cap [x_2] \neq \emptyset$, to $[x_1] = [x_2]$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$;

(iii) $\sum_{x \in X} [x] = X$.

Prześledźmy standardowe dowody własności (i) -(iii), zwracając uwagę na to, z jakich spośród założeń 1° - 3° dotyczących relacji $\sim$ korzystamy.

Dla dowodu (i) zauważmy, że założenie $x_2 \in [x_1]$ oznacza, iż $x_2 \sim x_1$. Jeśli więc $y \in [x_1]$, tzn. $y \sim x_1$, to na mocy 2° i 3° (tzn. symetrii i przechodniości relacji $\sim$) wnioskujemy, że $y \sim x_2$, tzn. $y \in [x_2]$, co dowodzi inkluzji $[x_1] \subset [x_2]$. Podobnie, jeśli $y \in [x_2]$, czyli $y \sim x_2$, to założenie i przechodniość relacji implikują, że $y \sim x_1$, czyli $y \in [x_1]$, a to dowodzi przeciwnej inkluzji $[x_2] \subset [x_1]$ i w efekcie równości $[x_1] = [x_2]$.

Aby udowodnić (ii), przypuśćmy, że $y \in [x_1] \cap [x_2]$, tzn. $y \sim x_1$ i $y \sim x_2$. Stąd dzięki 2° i 3° wynika, że $x_2 \sim x_1$, tzn. $x_2 \in [x_1]$ i teraz tezę można uzyskać bądź stosując udowodnioną własność (i), bądź powtarzając rozumowanie z jej dowodu.

Zauważmy, że w dowodach własności (i) oraz (ii) nie korzystaliśmy z 1°, tzn. zwrotności relacji $\sim$. Zakładając 1°, wystarczy udowodnić własność (ii), bo własność (i) jest wówczas jej szczególnym przypadkiem ($x_2 \in [x_1]$ implikuje $[x_1] \cap [x_2] \neq \emptyset$ wobec faktu, że $x_1 \in [x_1]$ na mocy zwrotności).

Natomiast do dowodu własności (*iii*) założenie 1° jest niezbędne; bez niego (a w istocie bez jakichkilwiek założeń) zachodzi jedynie oczywista inkluzja:

$$\sum_{x \in X} [x] \subset X. \tag{2}$$

Inkluzja przeciwna wynika właśnie ze zwrotności relacji $\sim$.

Konstatujemy, że własność (*i*) (mówiącą, że definicja klasy równoważnoważności jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru reprezentanta tej klasy) oraz własność (*ii*) (stwierdzającą, że różne klasy równoważnoważności są parami rozłączne) można udowodnić jedynie w oparciu o założenia symetrii i przemienności (2° i 3°) relacji $\sim$. Założenie 1° zwrotności relacji potrzebne jest jedynie do wykazania własności (*iii*), która mówi, że wyjściowy zbiór X jest sumą mnogościową wszystkich klas równoważnoważności utworzonych przez jego elementy lub - jak to niekiedy określamy - zbiór X rozpada się na rozłączne klasy równoważności.

Rodzi się pytanie, czy własność (*iii*) jest w ogóle potrzebna, czy też może wystarczy nam fakt, że na rozłączne klasy równoważnoważności rozpada się pewien (niekoniecznie znany explicite) podzbiór Y zbioru X, a mianowicie zbiór

$$Y := \sum_{x \in X} [x],$$

występujący po lewej stronie inkluzji (2).

Przyjrzyjmy się podanej wcześniej definicji dystrybucji. Definicja składa się z dwóch części. W części pierwszej, będącej definicją wstępną, ze zbioru X wszystkich ciągów funkcji gładkich wyodrębnia się podzbiór Y, złożony z ciągów podstawowych. W części drugiej, stanowiącej właściwą definicję, w określonym uprzednio zbiorze Y wprowadza się relację równoważności (w tradycyjnym znaczeniu), przy czym jej określenie jest bardzo podobne do wcześniejszego określenia ciągów podstawowych.

Podobną sytuację mamy w przypadku klasycznej konstrukcji Cantora liczb rzeczywistych. Najpierw definiuje się ciągi podstawowe (p_n) liczb wymiernych jako te ciągi, które spełniają warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \forall \mathbf{N} \ni n, m > n_\varepsilon \quad |p_n - p_m| < \varepsilon.$$

Następnie w zbiorze wszystkich ciągów podstawowych wprowadza się relację równoważności, uznając za równoważne te ciągi $(p_n), (q_n)$, dla których zachodzi warunek

$$\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \forall \mathbf{N} \ni n > n_\varepsilon \quad |p_n - q_n| < \varepsilon.$$

Oczywiście w ostatniej nierówności q_n można zastąpić równoważnie przez q_m dla dowolnego $m > n_\varepsilon$.

Można mnożyć podobne przykłady . By uniknąć powtórzeń, autorzy czasami wyrażają drugą część definicji w inny, równoważny sposób, np. przez sprowadzenie do definicji podanej w pierwszej części (np. w definicji dystrybucji Definicję 2 można zastąpić Definicją 3, co jednak nie zmienia złożonego, dwuczęściowego charakteru definicji).

Rozwiązanie zaproponowane przez profesora Mikusińskiego jest proste: zmienić definicję relacji równoważności tak, by postulowane w niej były jedynie warunki 2° symetrii i 3° przechodniości. Dla odróżnienia nazwijmy tak zmodyfikowaną relację relacją podobieństwa.

Definicja 6. *Relację $\sim$ określoną na danym zbiorze X i spełniającą warunki 2° i 3° nazywamy relacją podobieństwa, a klasy $[\cdot]$ ze względu na tę relację, zdefiniowane wzorem* (1), *klasami podobieństwa.*

Jak wykazaliśmy, klasy podobieństwa mają własności (i) oraz (ii) i mogą być traktowane jako elementy nowego zbioru, zbioru wszystkich klas podobieństw. W praktyce upraszczają się konkretne definicje relacji, bo ich część wstępna staje się teraz zbyteczna.

Literatura

[1] Antosik P., Kamiński A. (edytorzy): Generalized Functions and Convergence, World Scientific, Singapore 1990.

[2] Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R.: Theory of Distributions. The Sequential Approach, Elsevier-PWN, Amsterdam-Warszawa 1973.

[3] Crum M. M.: On the resultant of two functions, Quart. J. Math. Oxford Ser. 46 (1941), 108-111.

[4] Dufresnoy J.: Sur le produit de composition de deux fonctions, C. R. Acad. Sci. Paris 225 (1947), 857-859.

[5] Dufresnoy J.: Autour du théorème de Phragmén-Lindelöf, Bull. Sci. Math. 72 (1948), 17-22.

[6] Heaviside O.: Electromagnetic Theory, vol. I-III, London 1893, 1899, 1912.

[7] Mikusiński J.: Les méthododes algébriques dans l'analyse fonctionelle, C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 1685-1687.

[8] Mikusiński J.: L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionelle (Première partie), Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 2 (1947), 1-48.

[9] Mikusiński J.: Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible, Fund. Math. 35 (1948), 235-239.

[10] Mikusiński J.: Sur les fondements du calcul opératoire, Studia Studia Math. 11 (1949), 41-70.

[11] Mikusiński J.: Rachunek operatorów, PWN, Warszawa 1953.

[12] Mikusiński J.: Une définition de distribution, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 3 (1955), 589-591.

[13] Mikusiński J.: Sur une définition de l'intégrale de Lebesgue, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964), 203-204.

[14] Mikusiński J.: The Bochner Integral, Birkhäuser-Academic Press, Basel-New York 1978.

[15] Mikusiński J., Sikorski R.: The elementary theory of distributions (I), Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 12 (1957).

[16] Mikusiński J., Sikorski R.: The elementary theory of distributions (II), Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 25 (1961).

[17] Titchmarsh E. C.: The zeros of certain integral functions, Proc. London Math. Soc. 25 (1926), 283-302.

Abstract

The 50th anniversary of the Mikusiński operational calculus is the occasion for recalling some facts concerning this theory. The theory is an example of a very individual approach of its author to mathematics. In the article, an attempt is made to discribe characteristic features of the author's works on the base of some of his theories. In particular, his proposition of the new definition of the equivalence relation is discussed in detail.