ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Jerzy MIODUSZEWSKI

LEMAT URYSOHNA CZY TWIERDZENIE ŁUZINA-MIEŃSZOWA?

Streszczenie

Lemat Urysohna był opublikowany i — jak można sądzić, był odkryty — rok później niż twierdzenie znane jako twierdzenie Łuzina-Mieńszowa. To drugie twierdzenie było w istocie dowiedzione przez W. Bogomołową w jej jedynej opublikowanej (1924) pracy. Dowody obu twierdzeń biegną równolegle. Nie może być wątpliwości o priorytecie Bogomołowej, ale Urysohn był tym, który ocenił znaczenie twierdzenia dla systemu pojęć topologii.

ЛЕММА УРЫСОНА ИЛИ ТЕОРЕМА ЛУЗИНА-МЕНЬШОВА?

Резюме

Лемма Урысона появилась в печати — и как можно судить, была открыта — год позже чем теорема известна под названием теоремы Лузина-Меньшова. На самом деле эта теорема была доказана В. Богомоловой в ей единственной публикованной работе (1924). Доказательства обоих теорем паралельны. Нет сомнения в первенстве Богомоловой, но Урысон был тем, кто заметил важность теоремы для системы понятий топологии.

URYSOHN'S LEMMA OR LUSIN-MENCHOFF THEOREM?

Summary

The Urysohn Lemma was published and — as it can be thought — also discovered, a year later then the theorem called Lusin-Menchoff. The last one was proved in fact by Bogomolova 1924, the author of a single paper. Proofs of the mentioned theorems — as in commonly known — go paralelly. There is no doubt in the priority of Bogomolova, but is was Urysohn who understood the topological meaning of the result.

Znanym i znanym autorowi jedynie z legendy matematykom moskiewskim, którzy dokonali wielkich dzieł, ale którym ich emocjonalna postawa wobec nauki nie zawsze pozwalała na obiektywizm wobec własnych odkryć.

Twierdzenie nazywane *lematem Urysohna* wypowiada się zwykle tak: *jeśli $F \subset U$, gdzie F jest podzbiorem domkniętym, a U podzbiorem otwartym przestrzeni normalnej X, to istnieje funkcja ciągła $f : X \to [0,1]$, taka że $f(x) = 0$ dla $x \in F$ i $f(x) = 1$ dla $x \in X - U$.*

Przez przestrzeń *normalną* rozumie się przestrzeń topologiczną, taką że mając jej podzbiór domknięty F i podzbiór otwarty U, takie że $F \subset U$, zawsze daje się znaleźć jej podzbiór domknięty K, taki że

$$F \subset \mathrm{int} K \subset K \subset U. \tag{1}$$

Najczęściej w miejsce $\mathrm{int} K$ stawia się zbiór otwarty V, a za K bierze się domknięcie $\bar{V}$ zbioru V; warunek (1) przyjmuje wtedy postać:

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U, \text{ dla pewnego } V \text{ otwartego.} \tag{1'}$$

Nie zawsze normalność była tak rozumiana: Tietze w swojej pracy (1923) [1], w której przedyskutował systematycznie warunki oddzielenia począwszy od T_0, poprzez T_2, normalność — tj. *warunek* T_4 — rozumiał jako możliwość oddzielenia (niemieckie *Trennung*, stąd litera T) zbiorów domkniętych rozłącznych ich otoczeniami rozłącznymi. Równoważność tak wypowiedzianego warunku T_4 z warunkiem (1) jest prostym ćwiczeniem logicznym, ale jak się wydaje, przejście do formy (1) miało dla tematu, który tu poruszamy, ważne znaczenie.

Lemat Urysohna pochodzi z pracy Urysohna *Über die Mätchtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, drukowanej w Mathematische Annalen 94 (1925), 262 - 295; w roku 1951 praca ta była przedrukowana w wersji rosyjskiej w *Trudach po topologii i drugim oblast'jam matiematiki* (dwutomowych dziełach zebranych Urysohna), które wyszły pod redakcją i z komentarzami P. S. Aleksandrowa (p. tom I *Trudów*, s. 177 - 218). Urysohn ukończył ją w sierpniu 1924, trzy dni przed swoją tragiczną śmiercią. Praca jest niejednolita co do treści. Ma trzy aneksy. To, co dla nas najważniejsze, a więc lemat Urysohna, jest w aneksie trzecim i wygląda na rzecz powstałą dopiero już po napisaniu głównych twierdzeń pracy [2].

Zgodnie z zapowiedzią z tytułu pracy, Urysohn zajmuje się problemem mocy przestrzeni spójnych. Głównym wynikiem zasadniczego trzonu pracy jest konstrukcja przestrzeni topologicznej T_2 przeliczalnej spójnej [3]. Przeciwwagą jest twierdzenie orzekające, *że przestrzeń normalna wymiaru dodatniego — tym bardziej spójna — nie może być mocy mniejszej niż continuum* [4].

Urysohn rozumie najpierw (w rozdziale wstępnym) normalność w formie warunku T_4, tj. tak jak ją rozumiał Tietze, ale kiedy przystępuje do dowodu wspomnianego twierdzenia, poprzedza ten dowód lematem, w którym dowodzi implikacji: $T_4 \Rightarrow (1')$. Warunek normalności w formie $(1')$ (tym samym i w formie (1)), musiał być więc dla Urysohna nowością.

Warunek $(1')$, zapewniający wstawianie między zbiór domknięty i zawierający go zbiór otwarty zbioru otwartego wraz z domknięciem, pozwala na iterację postępowania. W rezultacie, mając zbiór domknięty F i zawierający go zbiór otwarty U, Urysohn dostaje dobrze znany z podręczników topologii łańcuch zawierań:

$$F \subset \ldots \subset V_r \subset \overline{V}_r \subset \ldots \subset V_s \subset \ldots \subset U, \tag{2}$$

gdzie r i s, $r < s$, są liczbami postaci $k/2^n$, $1 \leq k \leq 2^n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, a V_t są zbiorami otwartymi.

Posługując się łańcuchem zawierań (2) dla odpowiednio dobranej pary $F \subset U$, dostaje wspomniane wyżej twierdzenie (nie budując przy tym żadnej funkcji).

W głównym trzonie pracy żadnego innego zastosowania łańcuchy zawierań (2) nie mają. Jest to nieoczekiwane dla współczesnego czytelnika, bo spodziewałby się raczej zastosowań bardziej mu znanych, a przede wszystkim twierdzeń metryzacyjnych.

Tymczasem pewne twierdzenia metryzacyjne Urysohn ma już za sobą, ale w celu ich uzyskania posługuje się metodami całkiem innymi niż te, które rozwija w omawianej tu pracy. Posługuje się tam ciągami pokryć zbiorami otwartymi, wpisywanymi kolejno jedne w drugie w odpowiedni sposób. Pełny wyraz znalazła ta metoda w twierdzeniu Aleksandrowa-Urysohna z roku 1923 [5].

Dopiero w aneksie trzecim omawianej pracy Urysohn korzysta z konstrukcji (2) w celu wykazania, że *na przestrzeniach normalnych wielopunktowych zawsze można zbudować funkcję rzeczywistą ciągłą nie redukującą się do stałej.* Wspomniany jego przykład przestrzeni przeliczalnej spójnej dowodził nieprawdziwości tego twierdzenia w zakresie przestrzeni T_2.

Twierdzenia dowodzi od razu w formie ostrzejszej, podanej na wstępie tego artykułu.

Funkcję f określa wzorem

$$f(x) = \inf\{r : x \in V_r\}, \tag{3}$$

gdzie V_r mają to znaczenie co w (2).

Pisze, że rozwiązuje problem Frécheta [6], który pytał, jakie warunki mnogościowe mają spełniać przestrzenie topologiczne, aby można było na nich określić nietrywialne funkcje rzeczywiste ciągłe. Tego rodzaju warunkiem okazała się normalność [7].

W teorii funkcji rzeczywistych znane jest jako *twierdzenie Łuzina-Mieńszowa* następujące twierdzenie:

(5) *Jeśli (na prostej) F jest zbiorem doskonałym, a U zbiorem mierzalnym jednorodnym, takim że $F \subset U$, to istnieje zbiór doskonały K, taki że*

$$F \subset \overset{\bullet}{K} \subset K \subset U.$$

Przez *punkt gęstości* zbioru mierzalnego A (leżącego na prostej) rozumie się punkt a (niekoniecznie należący do A), taki że

$$\lim_{h \to 0, h>0} \frac{\mu(A \cap (a-h, a+h))}{2h} = 1,$$

gdzie μ oznacza miarę Lebesgue'a. Twierdzenie Lebesgue'a orzeka, że prawie wszystkie (w sensie μ) punkty zbioru mierzalnego są jego punktami gęstości. Przez $\overset{\bullet}{A}$ został oznaczony zbiór punktów gęstości zbioru mierzalnego A należących do A. Zbiór jednorodny w sensie miary to zbiór mierzalny równy zbiorowi swoich punktów gęstości. Zbiory otwarte są jednorodne w sensie miary. Do zbioru domkniętego należą wszystkie jego punkty gęstości, co jest również łatwo widoczne. Jest formalne podobieństwo operacji „•" do operacji wnętrza. Te uwagi objaśniają formalne znaczenie twierdzenia (5).

Nazwa twierdzenia (5) jest umowna. Nie pochodzi ono z żadnej z prac matematyków figurujących w nazwie twierdzenia. Twierdzenie pochodzi z pracy W. S. Bogomołowej, *Ob odnom kłassie funkcij wsiudu assimptoticzeski nieprcrywnych*, Matiematiczeskij Sbornik 32 (1924), 152 - 171. Autorka — prawdopodobnie studentka Łuzina — zamieszcza to twierdzenie pisząc, że było ono „dowiedzione przez N. N. Łuzina i D. E. Mieńszowa. Nie znając ich metody, otrzymałam nieco później inny dowód, który tu przedstawiam".

Twierdzenie Bogomołowej jest nieco szczegółowsze. Przytoczone tu zostało w wersji uwspółcześnionej; p. L. I. Kapłan, S. G. Słobodnik, *Monotonnyje prieobrazowanija i differencialnyje swojstwa funkcij*, Matiematiczeskije Zamietki 22 (1977), 859 - 871. Są to jedyni autorzy, którzy cytują Bogomołową. Inni piszą „twierdzenie Łuzina-Mieńszowa", nie podając źródła, a jeszcze inni piszą „tzw. twierdzenie Łuzina-Mieńszowa" nie bacząc na małą elegancję tego zwrotu. Dowód twierdzenia u Bogomołowej jest trudny (zresztą dowodzi ona wersji nastawionej na specyficzne zastosowania, o których będzie wzmianka niżej), ale i współczesne dowody są kłopotliwe: p. A. M. Brücknera, *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Mathematics 659, Springer 1978.

Mając zbiór doskonały F i zbiór U jednorodny w sensie miary, i taki że $F \subset U$, Bogomołowa — korzystając z (5) — buduje łańcuch zawierań

$$F \subset \ldots \subset \overset{\bullet}{K_r} \subset K_r \subset \ldots \subset \overset{\bullet}{K_s} \subset \ldots \subset U,$$

gdzie r i s, $s < r$, są liczbami postaci $k/2_n$, $k = 1, \ldots, 2_n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, a K_t są zbiorami doskonałymi, a potem buduje funkcję f o wartościach w $[0, 1]$ wzorem

$$f(x) = \inf\{r : x \in \overset{\bullet}{K_r}\}. \tag{4}$$

Dowodzi, że funkcja f jest aproksymatywnie ciągła[1], przy czym $f(x) = 0$ dla $x \in F$ i $f(x) = 1$ dla $x \notin U$.

W rzeczywistości wzór u Bogomołowej jest nieco inny — funkcja jest równa 0 poza U, a na F jest dodatnia, niekoniecznie równa 1; poza tym, specyficzna sytuacja umożliwiająca posługiwanie się miarą pozwala na zbudowanie funkcji, tak by była dodatnia na podzbiorze gęstym zbioru U, czego u Urysohna być nie mogło.

Bogomolowa podaje także ogólną metodę budowania funkcji wszędzie różniczkowalnych, których przedziały stałości dają w sumie zbiór gęsty.

Dopełnienie tej sumy przedziałów musi być zbiorem doskonałym, co jest oczywiste; ten zbiór musi być ponadto miary wszędzie dodatniej, co znaczy, że jego przekroje z przedziałami — jeśli są niepuste — są miary dodatniej.

Mając zbiór doskonały miary wszędzie dodatniej, Bogomołowa buduje funkcję wszędzie różniczkowalną, monotoniczną (nieujemną), której przedziałami stałości są składowe dopełnienia tego zbioru.

W tym celu, korzystając ze swego twierdzenia, buduje najpierw funkcję aproksymatywnie ciągłą f o wartościach w $[0,1]$, znikającą poza C (tak oznaczmy dany zbiór doskonały miary wszędzie dodatniej) i dodatnią na podzbiorze gęstym zbioru C (rolę zbioru U z jej twierdzenia pełni tu zbiór $\dot{C}$ złożony z wszystkich punktów gęstości zbioru C). Funkcja

$$g(x) = \int_0^x f$$

jest zapowiedzianą funkcją wszędzie różniczkowalną; więcej: $g'(x) = f(x)$ wszędzie, na mocy twierdzenia Lebesgue'a o funkcjach aproksymatywnie ciągłych (ograniczonych). Wobec znikania funkcji f poza C i jej dodatniości na podzbiorze gęstym zbioru C, składowe dopełnienia tego zbioru pokrywają się z przedziałami stałości funkcji g.

Funkcję różniczkowalną o gęstej sumie przedziałów stałości zbudował Mazurkiewicz (1916) (używał zwrotu: *pantachicznie przedziałami stała*), ale konstrukcja dotyczyła jednego przykładu. Bogomołowa wie o konstrukcji Mazurkiewicza od Łuzina, który z kolei wie o tym od Sierpińskiego, który jeszcze niedawno przebywał w Moskwie. Konstrukcja Bogomołowej daje teraz wszystkie tego rodzaju funkcje i wyjaśnia ich pochodzenie. We wstępie do swojej pracy pisze, że pisze tę pracę „według planu Profesora Łuzina".

*

Praca Bogomołowej (1924) była przedstawiona redakcji w maju 1923. Praca Urysohna (1925) była ukończona w sierpniu 1924. Ani Urysohn, ani komentator pracy w *Trudach*

[1] Funkcja jest *aproksymatywnie ciągła w punkcie a*, jeśli a jest punktem gęstości pewnego zbioru mierzalnego A i $f|A$ jest ciągła w a. Funkcja jest *aproksymatywnie ciągła*, jeśli jest aproksymatywnie ciągła w każdym punkcie. Szczegóły dowodu można znaleźć w artykule przeglądowym I. Krzemińskiej, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, 1994.

(1951) nie wspominają ani Łuzina — inicjatora pracy Bogomołowej — ani Bogomołowej, ani Mieńszowa, a przecież Urysohn jest o co najmniej rok spóźniony, a wszyscy wspomniani pracują na tym samym uniwersytecie!

Wpływ Urysohna na wspomnianą trójkę autorów — jakkolwiek niewykluczony — jest mało prawdopodobny, jeśli się zważy, że mając nawet jedynie zarys idei swego lematu, szedłby on wcześniej innym tropem ku twierdzeniom metryzacyjnym. Pomysł twierdzenia metryzacyjnego, które jest znane jako *twierdzenie Urysohna* głoszące, że *przestrzenie normalne z bazą przeliczalną są metryzowalne*, pojawia się dopiero w trzecim — ostatnim — aneksie pracy (1925). Twierdzenie jest sformułowane, ale dowód odkłada Urysohn do następnej pracy. Tę następną pracę odtworzył z jego notatek jego przyjaciel Paweł Aleksandrow umieszczając ją w Mathematische Annalen w tomie 94 (1925), 309 - 315 (przedrukowana w *Trudach*, tom II, s. 740 - 746).

Czy warto wracać do tej historii i rozniecać jeszcze jeden spór, jakich wiele w matematyce? Zresztą, trudno być pewnym, czy chodzi w ogóle o spór, bo nie ujawnił się w słowie drukowanym. A jeśli to spór, to czy nie lepiej rzec: „ostawtie etot spor Łuzitancew mieżdu soboju"?

Żeby usunąć tę wątpliwość, zgódźmy się, że fakty — jeśli już weszły do historii — przestają być własnością autorów zdarzeń. W naszym przypadku chodzi o twierdzenia, które weszły w skład gmachu matematyki. Przestają one być własnością autorów, a jeśli ich znaczenie wykracza poza zasięg lokalny, przestają być one także i własnością lokalnych środowisk.

Poza tym, wcale nie idzie już wtedy o osoby.

W sporze Newtona z Leibnizem można widzieć motywy osobiste. Ale są w nim motywy matematyczne: czy analiza jest algorytmem — jak chciał Leibniz — czy rozwinięciem geometrii Euklidesa wzbogaconej o czas i ruch — jak chciał Newton?

Popatrzmy również i na relacje między lematem Urysohna i twierdzeniem Łuzina - Mieńszowa od strony czysto matematycznej.

Oba twierdzenia mają w swoich dyscyplinach — pierwsze w topologii mnogościowej, drugie w teorii funkcji rzeczywistych — wysokie pozycje. Ale role tych twierdzeń w tych dyscyplinach mają odmienny charakter.

Lemat Urysohna przenika poprzez jego znaczenie w twierdzeniach metryzacyjnych i w teorii zanurzeń w produkty całą *architekturę* dyscypliny nazywanej obecnie *topologią ogólną*.

Rola twierdzenia Łuzina-Mieńszowa w teorii funkcji rzeczywistych jest inna.

Przede wszystkim umowny jest zakres tego twierdzenia. Przeważnie rozumie się je jako twierdzenie (5) uzupełnione konstrukcją funkcji (6). Jeśli tak, to trzeba zwrócić uwagę na to, że punkt ciężkości twierdzenia leży w (5), bo wzór (6) się sam narzuca, a sprawdzenie warunku aproksymatywnej ciągłości leży już w elementarnym wariancie twierdzenia (5) orzekającym, że

(5′) *Jeśli x jest punktem gęstości zbioru mierzalnego U, to istnieje zbiór doskonały K, dla którego x jest punktem gęstości, i który jest zawarty w zbiorze punktów gęstości zbioru U.*

Nie zmniejszy się ogólności, jeśli się założy, że U jest zbiorem jednorodnym w sensie miary. Twierdzenie (5′) orzeka wtedy, że jeśli $x \in U$, to istnieje zbiór doskonały K, taki że

$$x \in \dot{K} \subset K \subset U.$$

Twierdzenie (5′) też bywa nazywane *twierdzeniem Łuzina-Mieńszowa*.

Można twierdzenie (5) zaostrzyć tak, by zbiór doskonały K miał z góry przewidzianą miarę będącą liczbą z przedziału $(\mu(F), \mu(U))$ (w przedziale $(0, \mu(U))$ w wariancie (5′)).

A więc, twierdzenie Łuzina-Mieńszowa — nawet w swym najwęższym zakresie — jest w istocie serią twierdzeń.

Nakładając na K (z twierdzenia 5) jeszcze dalsze dodatkowe warunki, Zygmunt Zahorski (1941) zbudował funkcję ciągłą rosnącą, mającą pochodną wszędzie z wyjątkiem punktów z góry danego zbioru typu G_δ miary zero, w których pochodna jest nieskończona, wskazując na to, że mając łuk prostowalny można tak przeparametryzować zmienną opisującą ten łuk za pomocą odpowiednio dobranej funkcji tego rodzaju, by miał już wszędzie styczną.

Metoda wygładzania funkcji o wahaniu skończonym przez przeparametryzowanie jej dziedziny — zapoczątkowana przez Zahorskiego — została rozwinięta w latach sześćdziesiątych w samoistną teorię: A. M. Brückner i J. Leonard (1965), cytowana już książka A. M. Brücknera (1976), A. M. Brückner i C. Goffman (1976), L. I. Kaplan i S. G. Słobodnik (1977), i in.

*

Teoria funkcji rzeczywistych została zapoczątkowana w końcowych dziesięcioleciach ubiegłego wieku. Jest to teoria będąca raczej zbiorem faktów, bo elementów jednoczących jest mało. W latach dwudziestych naszego wieku nagromadziło się już dostatecznie dużo osobliwych przykładów funkcji i to w zakresie, który raczej powinien wykluczać osobliwości, bo w zakresie funkcji różniczkowalnych. Zaczęło się od funkcji *typu Pompeiu*, tj. funkcji różniczkowalnych z zerującą się pochodną na zbiorze gęstym brzegowym (Köpcke (1887), Pompeiu (1906)). Funkcje rosnące typu Pompeiu konstruuje się jednak względnie prosto pisząc wzór. Ale Köpcke (1890) odkrył osobliwość trudniejszą, budując funkcje różniczkowalne nigdzie niemonotoniczne, których konstrukcje budziły najpierw wątpliwości, a potem były wielokrotnie przetwarzane. Do krańcowej osobliwości doprowadził je Zalcwasser (1927). Była mowa o funkcji różniczkowalnej o gęstej sumie przedziałów stałości zbudowanej przez Mazurkiewicza, a także o roli, jaką spełniło twierdzenie Łuzina-Mieńszowa w wyjaśnieniu natury tej osobliwości. Dzięki twierdzeniu Łuzina-Mieńszowa umiemy dzisiaj (prace Zahorskiego) rozeznać strukturę osobliwości zarówno funkcji Mazurkiewicza, jak i Köpckego-Zalcwassera, oraz sposób, w jaki sprowadzają się one do osobliwości prostszych, np. osobliwości typu Pompeiu: to ostatnie, p. C. Weil, *On nonwhere monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 56 (1976), 388 - 389, gdzie redukcji do osobliwości typu Pompeiu dokonuje się metodą kategorii Baire'a.

Wyjaśniająca rola twierdzenia Łuzina-Mieńszowa daleka jest wszakże od kreowania architektury przedmiotu. Teorią funkcji rzeczywistych rządzą inne prawa rozwoju. Nie istnieje architectura teorii funkcji rzeczywistych.

*

Jest logiczna zależność między lematem Urysohna i twierdzeniem Łuzina- Mieńszowa, która musiała być rozumiana już przez Urysohna, bo inaczej trudno byłoby wytłumaczyć nagły jego zwrot ku nowej idei twierdzeń metryzacyjnych z ostatnich jego prac, a nawet przejścia do warunku normalności w formie (1′).

Środkiem do zrozumienia tej zależności jest *topologia gęstościowa* prostej, generowana przez zbiory jednorodne w sensie miary. Zbiory otwarte zwykłej topologii prostej są jednorodne w sensie miary. Stąd topologia gęstościowa majoryzuje zwykłą.

Twierdzenie (5′) orzeka o jej regularności. Twierdzenie (5) nie orzeka jednak o jej normalności, bo F nie jest dowolnym zbiorem domkniętym w topologii gęstościowej, lecz specjalnym, bo zakłada się o nim, że należy do topologii zwykłej. Mimo to postępowanie wstawiania zbioru pośredniego można iterować i w rezultacie otrzymać wzorem z (5) funkcję ciągłą, jeśli zmienną niezależną stopologizować gęstościowo. Ta ciągłość — z topologią gęstościową w dziedzinie funkcji — implikuje aproksymatywną ciągłość; możliwość otrzymania funkcji ciągłej znikającej na F i równej 1 poza U, przy oznaczeniach z (5), implikuje całkowitą regularność topologii gęstościowej.

Mimo swojej naturalności topologia gęstościowa była zauważona dość późno (Goffman i Waterman, 1961).

Wykształcony współcześnie matematyk poznaje najpierw lemat Urysohna, później zapoznaje się przy jakiejś okazji z topologią gęstościową, a kiedy zapozna się z trudnym i leżącym na peryferiach formalnego nurtu matematyki mnogościowej twierdzeniem Łuzina-Mieńszowa, może widzieć to twierdzenie jako wtórne wobec lematu Urysohna. Logika formalna nie jest jednak najlepszym przewodnikiem po historii odkryć. Kolejność odkryć była inna.

Przypisy

[1] H. Tietze, *Beiträge zur allgemeinen Topologie I, Axiome für verschiendene Fassungen des Umgebungsbegriff.* Math. Ann. 88 (1923), 290 - 312.
[2] Zwraca na to uwagę P. S. Aleksandrow — komentator pracy w *Trudach.*
[3] Przykład Urysohna uważany jest w pewnym sensie za niezadowalający: buduje on wprawdzie przestrzeń T_2, ale żadne dwa jej punkty nie dają się oddzielić otoczeniami o domknięciach rozłącznych. Tego „T_2" u Urysohna nie ma: w tych latach (za Hausdorffem) warunek T_2 był włączony do warunków określających przestrzeń topologiczną (*Umgebungsraum*).
[4] Przestrzenie regularne przeliczalne (istnienie bazy przeliczalnej też wystarczy) są normalne, więc Urysohn wnioskuje od razu, że nie mogą istnieć przestrzenie regularne przeliczalne spójne. Autor artykułu nie wie, czy istnieją (nieprzeliczalne) przestrzenie regularne i spójne, o mocy mniejszej niż continuum.
[5] P. Alexandroff, P. Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante pour q'une classe* (L) *soit une classe* (D). Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 177 (1923), 1274 - 1276.
[6] W tekście w Mathematische Annalen jest krótka wzmianka, w jakich okolicznościach Fréchet postawił ten problem. Nie wydaje się natomiast słuszna uwaga komentatora w *Trudach* (tom I, str. 205), w której problem Frécheta uważa się za „nieskolko nieopredielonnyj", pisząc o nim (w cudzysłowie!) „zadacza Fresze".
[7] Nie jest to najsłabszy warunek: całkowita regularność — dająca się opisać topologicznie — też wystarczy.

Osoby

Nikołaj N. Luzin (1883 - 1950). Czołowa postać matematyki moskiewskiej w latach, o których mowa w artykule. Grupa młodych matematyków skupionych wtedy wokół Łuzina przyjęła nazwę „Luzytanii".

D. E. Mieńszow (1892 - 1988). W okresie tu omawianym — najbliższy współpracownik Łuzina.

P. S. Urysohn (1898 - 1924). W sierpniu 1924 ginie tragicznie podczas przypływu morza u wybrzeża Bretanii.

P.S. Aleksandrow (1896 - 1982). Najbliższy współpracownik i przyjaciel Urysohna. Do problemów topologii mnogościowej wraca — po przeszło dwudziestoletniej przerwie, kiedy zajmował się problemami geometrycznymi topologii — odnawiając dawną szkołę.

Wiera S. Bogomołowa — autorka jedynej pracy; p. „Matiematika w SSSR za sorok let". Moskwa 1959.

Stefan Mazurkiewicz (1888 - 1945). Pracę *Konstrukcja funkcji różniczkowalnej mającej wszędzie gęsty zbiór przedziałów stałości* ogłosił w Pracach Mat. Fiz., tom 27, s. 195 - 201, w roku 1916. W pracach z lat 1917 i 1918 zbudował przykłady funkcji różniczkowalnych nigdzie niemonotonicznych — *pantachicznie oscylujących*, jak wtedy mówiono.

Zygmunt Zahorski. Twierdzenie znane jako twierdzenie Zahorskiego pochodzi z pracy *Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist*, Tôhoku Mathematical Journal 48 (1941), 32 - 330; praca wysłana ze Lwowa w sierpniu 1940.

Wacław Sierpiński (1882 - 1969). W latach, o których mowa w artykule, jest w Polsce i kieruje jej życiem matematycznym. Przedtem, w latach 1914 - 1918 przebywa w Moskwie (początkowo w Wiatce), internowany jako obywatel Austro-Węgier. Internowanie — za sprawą matematyków moskiewskich — zamienia sie w swobodny pobyt w Moskwie. Z tych lat datuje się jego przyjaźń z Łuzinem. Na temat tego okresu w życiu Sierpińskiego, p. artykuł Galiny Sinkiewicz *O wzajemnym wlijanii Sierpinskogo i Łuzina*. Matematyka przełomu XIX i XX wieku, Szczecin 1990, s. 135 - 140 (IV Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Pogorzelica 1989).

Abstract

The Urysohn Lemma was published and — as it can be thought — also discovered, a year later then the theorem called Lusin-Menchoff. The last one was proved in fact by Bogomolova 1924, the author of a single paper. Proofs of the mentioned theorems — as in commonly known — go paralelly. There is no doubt in the priority of Bogomolova, but is was Urysohn who understood the topological meaning of the result.