ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Zofia PAWLIKOWSKA-BROŻEK, Krzysztof RECZEK

PRAWO NAJWYŻSZE JÓZEFA HOENE-WROŃSKIEGO

Streszczenie

Celem artykułu jest przedstawienie idei i twierdzeń, które J. Hoene-Wroński określił mianem „prawa najwyższego". Szkicujemy samą myśl Wrońskiego, jej percepcję u współczesnych, wreszcie odbicie, jakie znalazła w pracy Banacha.

DAS „LOI SUPRÉME" VON J. HOENE-WROŃSKI

Zusammenfassung

Der Zweck des Aufsatzes ist, die Ideen und Sätze, die J. Hoene-Wroński „Loi supréme" benannt hat, darzustellen. Wir zeigen in Grundrißen die Idee des „Loi supréme" in der durch Hoene-Wroński gegebenen Form, dessen Wahrnehmung bei derzeitigen Mathematikern und den Abdruck, den es in dem Aufsatz von S. Banach gefunden hat.

ON THE „LOI SUPRÉME" OF J. HOENE-WROŃSKI

Summary

The aim of our paper is to present the idea of the „Loi supréme" of J. Hoene-Wroński. We show the place the „loi supréme" takes in the philosophy of J. Hoene-Wroński, its perception by other mathematicians and, finally, its repercussion in the S. Banach's work.

Leżące w centrum naszego zainteresowania twierdzenie Józefa Marii Hoene-Wrońskiego znamy z publikacji [6]: Hoene-Wroński, „Wstęp do filozofii matematyki oraz technia algorytmii" w tłumaczeniu Paulina Chomicza (1937).

Praca jest bardzo trudna w czytaniu ze względu na oryginalną — żeby nie powiedzieć: osobistą — symbolikę i nomenklaturę. Ideę pracy poznać można też z omówień, przede wszystkim S. Dicksteina. Dicksteina fascynuje postać Wrońskiego, ton jego prac jest więc nieco emocjonalny. Widzi we Wrońskim równocześnie matematyka i filozofa, i nie potrafimy w jego pracach tych ról oddzielić.

Dotyczy to zresztą nie tylko pracy Dicksteina. Sama postać Wrońskiego jest bardzo tajemnicza. Uczestnik powstania kościuszkowskiego, po jego upadku — oficer armii Suworowa, wyjeżdżający wkrótce do Francji z zamiarem poświęcenia się pracy intelektualnej. Zajmuje się matematyką i naukami technicznymi, a równocześnie filozofią i teologią (staje się później sztandarową postacią mesjanizmu). Kariera wojskowa wiąże się z jego zainteresowaniami technicznymi, ale jego myśl techniczna i projekty inżynierskie nie przynoszą mu sławy. Nazwisko jego przeszło do historii przede wszystkim filozofii, a nie matematyki. Odkrycie „Prawa najwyższego" w 1803 roku jest w odczuciu samego Wrońskiego jakimś przełomem. Będąc o krok od wstąpienia do legionów, po dokonaniu odkrycia porzuca Wroński tę myśl i oddaje się bez reszty filozofii i matematyce. „Prawu najwyższemu" przypisuje wielkie znaczenie filozoficzne — a przecież praca ta jest bardziej związana z matematyką niż z filozofią.

Dlatego bardzo trudno jest precyzyjnie oddzielić warstwę filozoficzną pracy Wrońskiego od jej zawartości matematycznej.

Ale wracajmy do faktów. W roku 1810 Wroński przedstawił pracę „Premier Principe des mathématiques comme base de la Thechnie mathématique". Według Dicksteina [4] zawierała ona „wzór ogólny na rozwinięcie wszelkich funkcyj jednej lub wielu zmiennych na szereg nieskończony, postępujący według innych funkcyj dowolnych tejże zmiennej".

Praca nie została ogłoszona drukiem. Jej podstawowe idee wyłożone zostały krótko w wydanej w roku następnym rozprawie „Introduction à la philosophie des mathématiques et technie d'algorithmie".

Przedstawiona w roku 1810 rozprawa miała zostać zrecenzowana z ramienia Francuskiej Akademii Nauk przez Lagrange'a i Lacroixa. Raport tych matematyków nosi datę 15 października 1810 roku. Ocena rezultatu Wrońskiego nie wypada w jego świetle korzystnie.

Rezultaty swe Wroński sformułował już w roku 1804. Obejmowały one — o czym wspomnieliśmy — bardzo ogólnie ujętą teorię rozwinięcia funkcji w szereg. Twierdzenie swoje Wroński nazwał „prawem najwyższym", jako że miało to być ogólne i jednolite ujęcie, w szczególnych przypadkach obejmujące szeregi interpolacyjne Lagrange'a i szeregi potęgowe Taylora, a także ułamki łańcuchowe i iloczyny nieskończone.

Rozprawa zyskała opinię negatywną. Omówienia [2] i [4] różnią się w szczegółach odpowiedzi na pytanie: Lagrange, Lacroix, czy też obaj jednomyślnie wypowiedzieli się negatywnie na temat pracy Wrońskiego? Według Dicksteina Lagrange był powściągliwszy w krytycznej ocenie pracy, co mogłoby być związane ze zbieżnością zainteresowań jego i

Hoene-Wrońskiego, wydaje się jednak prawdopodobniejsze, że — jak pisze Boyer [2] — obaj recenzenci ocenili pracę zdecydowanie negatywnie.

Z jednej strony sens „Prawa najwyższego" jest wyłożony mgliście i niekonkretnie, co zapewne nie spodobało się recenzentom. Z drugiej zaś strony, wprowadził w swej rozprawie istotnie nowe idee. Pojawił się wyznacznik — zwany później wrońskianem. Wydaje sie, że już w tej pracy można się doszukać wskazówek odnośnie do jego wielorakiej roli — w teorii interpolacji liniowej oraz w teorii równań różniczkowych.

Tak więc praca Wrońskiego otwierała raczej perspektywę algebraiczną (co z kolei było bliskie podejściu Lagrange'a). Wydaje się, że brakowało w niej odpowiedzi na pytanie: na ile wymienione metody rozwinięcia pozwalają przybliżyć wartość funkcji. Być może to było przyczyną, dla której Lacroix przedstawił opinię na temat pracy Wrońskiego surowszą od opinii reprezentującego bardziej algebraiczne podejście Lagrange'a (jeśli rację ma Dickstein).

Zwróćmy uwagę na daty. Pierwsze ścisłe ujęcie zbieżności znajdujemy dopiero w dziele Cauchy'ego „Cours d'Analyse", wydanym w roku 1821. W tej sytuacji trudno zarzucić Wrońskiemu zaniedbanie — raczej należy zauważyć, że był dzieckiem swojej epoki, a nie wyprzedził jej.

Jak na mapie dokonań matematycznych określić miejsce pracy Stefana Banacha „O „prawie najwyższym" J. Hoene-Wrońskiego"?

Należałoby zacząć od pytania: skąd zainteresowanie Banacha pracą Wrońskiego? Jedyną wskazówką może być dla nas uwaga, przekazana przez H. Steinhausa. Przeglądając edycję dzieł Hoene-Wrońskiego Banach wyraził wobec Steinhausa zaskoczenie, że jego „prawo najwyższe" jest twierdzeniem o charakterze matematycznym, a nie filozoficznym (a zostało włączone przecież do dzieła filozoficznego!). Używamy sformułowania: „o charakterze matematycznym" zamiast „twierdzenie matematyczne", bo ścisłej matematycznej formy „Prawo najwyższe" nie miało. Być może obserwacja tego niedostatku stała się inspiracją dla Banacha ...

Banach podchodzi do problemu bardzo trzeźwo. Z jednej strony docenia ogólność podejścia Wrońskiego, z drugiej zaś zdaje sobie sprawę, że idee (bo chyba jeszcze nie wzory) Wrońskiego nie są tak uniwersalne, jak tego pragnął romantyczny autor.

Banach zajmuje sie jedynie rozwinięciami w szeregi. Praca opublikowana jest w „Biuletynie Polskiej Akademii Umiejętności" w roku 1939. Wydaje się, że epoka ułamków łańcuchowych w jakimś sensie przeszła już do historii (przynajmniej chwilowo), a Banach z idei Wrońskiego wychwytuje to, co dla jego czasów jest najistotniejsze. Formułuje szereg ogólnych rezultatów w języku analizy funkcjonalnej, a ich ukoronowaniem jest twierdzenie mówiące, że funkcje dające się rozwinąć w zbieżny szereg funkcyjny wedle zadanego algorytmu tworzą pewną przestrzeń wektorową. Na zakończenie ilustruje swoje rezultaty paroma modelami, których efektywność jest znana z analizy matematycznej.

Punktem wyjścia dla Banacha jest obserwacja, że jeśli suma szeregu

$$\sum a_i x_i(t)$$

w dowolnym punkcie ma być równa wartości funkcji $x(t)$, to współczynniki a_i szeregu są wartościami funkcjonałów liniowych określonych na pewnej przestrzeni funkcyjnej, do której ta funkcja należy. Ta przestrzeń funkcyjna zależy bezpośrednio od zadanego z góry („całkowicie dowolnie" — jak twierdzi Wroński) ciągu funkcji x_i. Uściślając powyższe założenia, autor wprowadza abstrakcyjną przestrzeń Banacha E (przestrzeń funkcyjną, której elementy będą rozwijane w szereg) oraz klasę (B^*) funkcjonałów liniowych (ciągłych) określonych na dowolnych podprzestrzeniach tej przestrzeni, domkniętą w zawężeniu do każdej z podprzestrzeni. Tym podprzestrzeniom narzuca spełnianie warunku zwanego przezeń warunkiem (A), zdefiniowanego jak następuje:

Niech L oznacza omawianą podprzestrzeń; L spełnia warunek (A), jeśli

$$\forall_{(x_n)\subset L}\exists_{(M_n)\subset(0,+\infty)}\forall_{(a_n)\subset R} : \sum |a_n|M_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n x_n \text{ jest szeregiem zbieżnym.}$$

Widać wyraźnie, że zupełność przestrzeni L implikuje warunek (A). Banach wykazuje, że jeśli każda z podprzestrzeni L_k spełnia warunek (A), to i ich przecięcie go spełnia. Co więcej, dowodzi, że

$$\|\sum a_n x_n\| \leq K \sum |a_n| M_n,$$

gdzie K jest stałą zależną od ciągu (x_n).

Aby współczynniki a_n były jednoznacznie określone, należy nałożyć pewne warunki na ciąg (x_n). Takie warunki formułuje Banach: Niech będzie dany ciąg funkcjonałów (f_j) z klasy (B^*), przy czym dziedziną funkcjonału f_j jest pewna podprzestrzeń L_j, zaś ciąg (x_n) niech będzie zawarty w przecięciu L wszystkich przestrzeni L_j. Warunkiem jednoznaczności rozwinięcia jest, aby z ciągu równości

$$f_j(\sum_1^n a_i x_i) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

wynikało $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Warunek ten można w konkretnych sytuacjach wyrazić jako warunek Haara, gdzie wyznacznik

$$det[f_j(x_i)]$$

przyjmuje postać wrońskianu.

W ostatnim twierdzeniu w pracy Banacha udowodnione jest istnienie przestrzeni liniowej, której elementy dają się przedstawić w postaci omawianego szeregu.

Z tego można już wydedukować twierdzenia o postaci i zbieżności szeregów interpolacyjnych Lagrange'a czy Taylora. Praca Banacha zawiera wniosek: klasa funkcji, dla których szereg interpolacyjny jest zbieżny, stanowi pewną funkcyjną przestrzeń liniową.

Wydaje się, że Banach pragnął raczej doprecyzować i rozjaśnić to, co filozof Wroński chciał ofiarować matematyce. Praca jego nieco przybliża nam postać dosyć tajemniczą, jaką był Józef Maria Hoene-Wroński, pamiętany dzisiaj przede wszystkim przez historyków filozofii, a przecież zasłużony także matematyce.

Aneks

Kilka słów powiemy o autorze „prawa najwyższego". Józef Maria Hoene-Wroński urodził się 23 sierpnia 1776 r. w Wolsztynie w Poznańskiem jako pierwszy syn Antoniego Höne (Heyna) budowniczego - architekta przypuszczalnie sprowadzonego z Czech, od 1780 występującego jako szlachcic osiadły w Poznaniu, i Elżbiety z Pernickich. Tak data urodzenia, jak i imiona i nazwisko wymagają pewnych wyjaśnień, ponieważ są podawane różnie w źródłach.

Data urodzenia i imię zostały ustalone według ksiąg metrykalnych w 1902 r. przez Zenona Przesmyckiego. Na chrzcie otrzymał imię Józef, a Maria przyjął w dorosłym życiu, podobnie jak nazwisko Wroński, pod którym służył w wojsku rosyjskim i używał go także w Marsylii. W 1800 r. zgłosił Naukowemu Towarzystwu w Marsylii (którego był członkiem) swoje rodowe nazwisko Höne (Hoehné), a od 1811 r. używał obydwu nazwisk.

Józef Hoene uczył się w Poznaniu (1786 - 1790), później prawdopodobnie w Warszawie. W wieku 18 lat (1794) wstąpił do artylerii i służył pod dowództwem T. Kościuszki, awansował do rangi kapitana, walczył w obronie Warszawy. Po bitwie pod Maciejowicami został wzięty do niewoli i wstąpił do wojska rosyjskiego do sztabu Suworowa, tam awansował do stopnia majora. W 1797 r. podał się do dymisji z zamiarem poświęcenia się jedynie pracy naukowej. Wrócił do Polski po część spadku po rodzicach (ojciec zmarł w 1795 r.) i wyjechał z ojczyzny na zawsze.

Studiował w Niemczech prawo i filozofię w Halle i Getyndze, następnie wyjechał do Paryża i Marsylii w celu zaciągnięcia się do Legionów. W 1800 r. przyjął obywatelstwo francuskie (w tym roku wrócił do rodowego nazwiska). W Marsylii cieszył się uznaniem, został powołany na członka korespondenta Akademii Marsylskiej, był członkiem Towarzystwa Lekarskiego w Marsylii, w 1801 r. otrzymał z polecenia francuskiego astronoma Lalande'a stanowisko w Obserwatorium.

15 sierpnia 1803 r. zmienia życie Józefa Hoene. Jest to dzień, w którym odkrył „loi supréme", wtedy przypuszczalnie przyjął imię Maria (w dzień Najświętszej Marii Panny), porzucił myśl o Legionach całkowicie pochłonięty nowym odkryciem. Dużo pisał. W 1810 r. ożenił się z Wiktorią Henryką Sarrazin de Montferrier (1785 - 1865), poetką i wyjechał do Paryża na stałe, aby tam zapoznać świat naukowy ze swoimi pracami, a przede wszystkim z „prawdą absolutną". Oczekiwania Hoene-Wrońskiego nie spełniły się.

Paryskiej Akademii Nauk przedstawił rozprawy:

1. Premier Principe des mathématiques comme base de la Technie mathématique. Zawierała „prawo najwyższe".
2. Réfutation de la theorie de fonctions analytiques de Lagrange.
3. Rozprawa dotycząca rozwiązywania równań wszystkich stopni.

Dwie pierwsze uzyskały nieprzychylną opinię (1. opinia Lagrange'a i Lacroix publikowana w Moniteur Universel (15. XI. 1810), 2. opinia Lagrange'a i Arago z 11. XI. 1810), trzecia prawdopodobnie nie była rozpatrywana. Wroński nie zgodził się z opiniami. Historię sporu z Akademią opublikował w „Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Dediée á l'Institute Impérial de France" (Paris, 1812).

W 1811 r. Wroński wydał „Introduction à la la Philosofie des Mathématiques et technie de l'Agorithmie" (Paris, ss. 284), dedykowaną carowi Aleksandrowi I, „w którym podówczas upatrywano przyjaciela Polski" — jak napisał Paulin Chomicz tłumacz na język polski dzieła Wrońskiego „Filozofia matematyki. Wstęp do filozofii matematyki oraz technia algorytmii. Część pierwsza. Wstęp do filozofii matematyki" (Warszawa, 1937). Filozofii matematyki dotyczyły także dzieła Wrońskiego: „Philosofie de l'Infini" (Paris, 1814), „Philosophie de la Technie algorithmique" (Première section, contenant la loi suprème et universelle de mathématiques. Paris, 1815. Second section, contenant les lois des séries comme préparation à la réforme des mathématiques. Paris, 1816 - 1817, ss. 646).

W 1820 r. wyjechał do Anglii mając nadzieję na uzyskanie nagrody naukowej i to nie powiodło się. Wydał w Londynie „A Course of Mathematics" (1821, ss. 40) (Przekład polski A. Bukatego pt. „Wstęp do wykładu matematyki przez H. Wrońskiego. Paryż, 1880, wydał L. Niedźwiecki). Po trzech latach niepowodzeń powrócił do Paryża.

Od 1831 r. poświęcił się „mesjanizmowi" i zagadnieniom technicznym. Pomysły Wrońskiego zyskiwały okresowo sponsorów, dzięki którym wydawał swoje dzieła, konstruował przyrządy, po prostu żył, chociaż w bardzo skromnych warunkach. Po 1840 r. przeniósł się wraz z żoną do miejscowości Neuilly pod Paryżem, gdzie w nędzy i opuszczeniu zmarł 9. VIII. 1853 r.

Spuścizna rękopiśmienna Wrońskiego zawierająca głównie prace matematyczne i filozoficzne znajduje się w Bibliotece w Kórniku (około sto druków i trzysta rękopisów). Nad skatalogowaniem tego zasobu pracował między innymi Samuel Dickstein, który zabiegał o wydanie w Polsce rękopisów matematycznych w dziełach zbiorowych. We Francji w 1925 r. wydano prace matematyczne Wrońskiego w czterotomowym dziele: „Oeuvres mathématiques", t. 1 - 4, (Paris, 1925).

W 1827 r. pojawiło się słynne dzieło Lagrange'a „Theorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel", oparte na metodzie „fonctions dérivée" z 1772 r.

Wśród krytycznych głosów dotyczących metody Lagrange'a był głos Jana Śniadeckiego, który wyjaśniał, że jest ona w zasadzie identyczna z metodą granic. Krytyczny stosunek do metody Lagrange'a miał też Hoene-Wroński. Posłużymy się cytatem, oddając glos historykowi matematyki Carlowi B. Boyerowi:

„Interesujący, lecz nieco chybiony atak przeciw stanowisku Lagrange'a podjął inny polski matematyk, Hoene-Wroński. Jako gorący zwolennik metody różniczkowej Leibniza i filozofii transcendentalnej Kanta, protestował dość ostro przeciwko usunięciu nieskończoności z analizy, które chciał narzucić Lagrange. Krytykował Lagrange'a nie tyle za brak ścisłości logicznej w jego swobodnym posługiwaniu się szeregami nieskończonościowymi — choć słusznie kierował pod adresem Lagrange'a pytanie, skąd bierze sie szereg $f(x+i) = A + Bi + ci^2 + di^3 + \ldots$, od którego rozpoczynał swój wywód szeregu Taylora — za brak dostatecznie szerokiego poglądu." ([2], s. 370).

Wiadomo, że ten szeroki pogląd to „prawo najwyższe". Na rachunek różniczkowy miał spojrzenie bardzo dalekie od obecnego. Uważał mianowicie, że stanowi on pewien „algorytm pierwotny rządzący tworzeniem się wielkości", a jego twierdzeniom przyznawał status „prawdy absolutnej".

Literatura

[1] Banach S.: Über das „Loi suprème" von J. Hoene-Wroński. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A: Sciences Mathématiques, (1939), s. 2 - 10.

[2] Boyer C. B.: Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć. PWN, Warszawa 1964, ss. 471.

[3] Dickstein S.: Hoene-Wroński. Jego życie i prace. Kraków 1896.

[4] — : O „prawie najwyższem" Hoene-Wrońskiego w matematyce. Prace Mat. Fiz., t. 2, (1890), s. 145 - 168.

[5] Gawecki B. J.: Wroński i o Wrońskim. PWN, Warszawa 1958, ss. 163.

[6] Hoene-Wroński: Wstęp do filozofii matematyki oraz Technia algorytmii (przekład z franc. Paulina Chomicza). Inst. Wyd. „Biblioteka Polska", (1937), ss. 282.

Abstract

The aim of our paper is to present the idea of the „Loi supréme" of J. Hoene--Wroński. We show the place the „loi supréme" takes in the philosophy of J. Hoene--Wroński, its perception by other mathematicians and, finally, its repercussion in the S. Banach's work.