ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Zofia PAWLIKOWSKA-BROŻEK, Danuta WĘGLOWSKA,
Zbigniew WĘGLOWSKI

PEWNE PRIORYTETY W RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Streszczenie

W niniejszej pracy przedstawiamy osiągnięcia trzech matematyków polskich: Jana Śleszyńskiego, Antoniego Łomnickiego i Hugona Steinhausa. J. Śleszyński w 1892 w pracy [6] udowodnił pewien szczególny przypadek centralnego twierdzenia granicznego — A. Lapunow uzyskał podobny wynik dopiero w 1901. A. Łomnicki [3] w 1923 sformułował aksjomatykę rachunku prawdopodobieństwa, a H. Steinhaus [7], także w 1923 przedstawił przykład prawdopodobieństwa przeliczalnego wprowadzając prawdopodobieństwo za pomocą miary. A. Kołmogorow przedstawił swój kompletny układ aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa po dziesięciu latach w 1933.

SUR QUELQUES PRIORITÉS DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS

Resumé

Dans la note suivante nous presentons des résultats obtenus par trois mathématiciens polonais: Jan Śleszyński, Antoni Łomnicki et Hugo Steinhaus. J. Śleszyński en 1892 dans un travail [6] a demontré un certain cas du théorème sur la limite de probabilité — A. Liapounoff a obtenu un résultat similaire en 1901. A.Łomnicki [3] a formulé en 1923 un systéme d'axiomes du calcul des probabilités et H. Steinhaus [7], aussi en 1923, a presenté un example de probabilité denombrable introduisant probabilité à l'aide de mesure. A. Kolmogoroff a presenté son parfait systéme d'axiomes du calcul des probabilités après dix ans en 1933.

SOME PRIORITIES IN THE THEORY OF PROBABILITY.

Summary

In this paper we present the results obtained by three Polish mathematicians: Jan Śleszyński. Antoni Łomnicki and Hugo Steinhaus. J. Śleszyński proved in 1892 in the paper [6] a special case of central limit theorem — A. Lapunov obtained the similar result only in 1901. A. Łomnicki [3] formulated in 1923 the system of axioms in probability theory and H. Steinhaus [7]. also in 1923. presented an example of denumerable probability introducing the probability with the aid of measure. A. Kolmogorov presented his perfect system of axioms in probability theory only ten years later in 1933.

1. Wstęp

Wybitne osiągnięcia naukowe wiążą się zazwyczaj z nazwiskiem tego. kto ostatecznie rozwiązał problem. Zapomina się przy tym. że często ten ostatni postawił tylko kropkę nad i. podsumowując wieloletni trud rzeszy poprzedników. Z drugiej strony czasem też przecenia się zasługi tych poprzedników. jak to pamiętamy z niedawnej historii. Jakkolwiek by było. dobrze jest pamiętać. kto był wcześniej i co osiągnął. Zwłaszcza gdy był Polakiem.

Celem naszym jest wskazanie tego polskiego śladu w dwóch fundamentalnych problemach probabilistyki: aksjomatyce rachunku prawdopodobieństwa i centralnym twierdzeniu granicznym. Oba te zagadnienia były tematem referatów na V Szkole Historii Matematyki (Dziwnów 1991). Pierwszemu poświęcone były wystąpienia A. Jakubowskiego [2] i A. Zapały [10]. drugiemu D. Szynala [8]. Jedynie w [2] na stronie 99 jest wzmianka o pracach A. Łomnickiego [3] i H. Steinhausa [7]. natomiast o udziale Polaków w dowodzie centralnego twierdzenia granicznego nie ma ani słowa. Tymczasem w 1984 ukazał się artykuł E. Senety [5] z Uniwersytetu w Sydney. w którym autor na wstępie pisze: „... I. V. Sleshinsky (który wykonał w pełni ścisły dowód centralnego twierdzenia granicznego przed Markowem)". W tymże artykule na stronach 71 - 73 podaje obszerną notę biograficzną i nazwisko Jan Śleszyński. wyjaśniając. że poprzednie jest angielską transkrypcją z rosyjskiego. Sądzimy. że warto przypomnieć o pracach A. Łomnickiego i H. Steinhausa oraz wydobyć z zapomnienia Jana Śleszyńskiego.

2. Centralne twierdzenie graniczne

Dzieje centralnego twierdzenia granicznego zostały obszernie omówione przez D. Szynala [8]. Przypomnijmy więc tylko, że początkowo było ono formułowane dla konkretnych rozkładów (Bernoullego i Poissona), a pierwszą nieudaną próbę dla dowolnego rozkładu podjął w 1890 roku Czebyszew. Dowód Czebyszewa poprawił w 1898 jego uczeń A. Markow. W l. 1900 - 1901 ogłosił swoje twierdzenia graniczne Lapunow.

Praca Śleszyńskiego [6] ukazała się w 1892. Jej autor pochodził z polskiej rodziny ziemiańskiej osiadłej na Kijowszczyźnie. Urodził się w 1854 w Łysiance. Po ukończeniu gimnazjum w 1871 studiował w Odessie (1871 - 75) i w Berlinie (1881 - 82) u E. Kummera, L. Kroneckera i K. Weierstrassa. Wykładał na Uniwersytecie w Odessie od roku 1883. W 1893 uzyskał stopień dra (jak twierdzi E. Seneta [5] na podstawie rozprawy [6]). W 1909 przeszedł na emeryturę. Zaproszony w 1911 na wykłady na Uniwersytecie Jagiellońskim przeniósł się do Krakowa jako profesor kontraktowy, nadzwyczajny, a od 1919 do przejścia na emeryturę w 1924 jako zwyczajny. Zmarł w Krakowie w 1931.

Jego zainteresowania obejmowały algebrę liniową, logikę matematyczną, teorię liczb, funkcje analityczne i rzeczywiste, szeregi trygonometryczne, ułamki ciągłe i rachunek prawdopodobieństwa. Napisał dwutomową monografię „Teoria dowodu" (1925, 1929) oraz „Teorię wyznaczników" (1926). Interesująca nas praca Śleszyńskiego [6] nosi tytuł „O teorii metody najmniejszych kwadratów". W ustępach 3 - 9 autor dowodzi kolejno 7 twierdzeń, z których ostatnie na s. 254 brzmi następująco:

> Jeżeli P oznacza prawdopodobieństwo, że $\lambda_1\epsilon_1 + \ldots + \lambda_n\epsilon_n$ zawiera się w granicach $\pm 2l\sqrt{cA}$, to $\lim_{n\to\infty} P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int exp(-\alpha^2)d\alpha$, przy założeniu że liczby $|n\lambda_1|, \ldots, |n\lambda_n|$ przy wzroście n do nieskończoności zawierają się między skończonymi liczbami dodatnimi 1 i $L > 1$. ($A = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2$, $c = \frac{1}{2}\alpha^2$).

Jak autor dochodzi do tego twierdzenia? Rozważa błąd przy wyznaczaniu wartości $x_1, \ldots, x_m$ w oparciu o układ n równań ($n \gg m$), gdy prawe strony są obciążone błędem ϵ_i dla $i = 1, \ldots, n$. Pokazuje, że błąd wartości x można wówczas zapisać w postaci

$$\xi = \lambda_1\epsilon_1 + \ldots + \lambda_n\epsilon_n,$$

gdzie λ_i są pewnymi współczynnikami.

Zakładając, że wszystkie ϵ_i mają ten sam symetryczny rozkład z gęstością $f(x)$ zerującą się dla $|x| > \kappa$, wprowadza funkcję charakterystyczną $\phi(\alpha)$ i za jej pomocą wyraża prawdopodobieństwo P w postaci całki. Różnicę $|P - P_3|$, gdzie P_3 oznacza całkę z tezy, szacuje za pomocą różnic $|P - P_1|$, $|P_1 - P_2|$, $|P_2 - P_3|$, gdzie P_1 i P_2 są pewnymi całkami. Otrzymane oszacowania (twierdzenia 4 - 6) mają postać:

Tw.4 $|P - P_1| \leq (\pi R)^{-1} e^{-R}$, gdzie $R = \frac{1}{2} r \Lambda \Theta^2 (1 + r\lambda^2 \Theta^2)^{-1}$,

$\Theta > \max\{2^{1/2}[r(n\lambda_0^2 - 2\lambda^2)]^{-1/2}, 2\lambda_0^{-1}[r(n-4)]^{-1/2}\}$,

$\lambda_0 = \min\{\lambda_i\}$, $\lambda = \max\{\lambda_i\}$, r – stała.

Tw.5 $|P_1 - P_2| \leq 2h\, 3^{1/2} \Pi^{-1} \ln[\Theta v\, 3^{-1/2} + (1 + \Theta^2 v^2 3^{-1})^{1/2}]$

$h = \max\{\exp(1/4\, c\lambda^2 \Lambda \Theta^4 \kappa^2) - 1, 1 - \exp[-c^2 \lambda^2 \Lambda \Theta^4 (1 - e\lambda^2 \Theta^2)^{-1}]\}$,

$v = 2t(c\Lambda)^{1/2}$ jeśli $\Theta < (\lambda\kappa)^{-1}$.

Tw.6 $|P_2 - P_3| \leq (\Pi c \Lambda \Theta^2)^{-1} \exp(-c\Lambda\Theta^2)$.

Oszacowania te są ciężkie i niejasne. Założenia twierdzenia 7 o $n\lambda_i$ sprawiają wrażenie bardzo restryktywnych. Nic więc dziwnego, że (cytujemy za E. Senetą [5]) spotykamy opinię:

> „Nie wiedziałem początkowo, że próbę w tym kierunku zrobił Śleszyński. Niemniej jednak, gdy później zapoznałem się z tym, stwierdziłem, że nowe badania nie są zbędne, ponieważ Śleszyński, kontynuując idee Cauchy'ego, zrobił założenia zbyt ograniczające i jego badania nie mogą mieć zastosowania do bardziej ogólnych zagadnień" (A. Lapunow 1900).
>
> (praca Śleszyńskiego) ..... pominięta jest milczeniem w literaturze" (Gnedenko i Gikman 1956).

Czy zatem praca Śleszyńskiego rzeczywiście stanowi tylko nieciekawy przyczynek do zagadnienia, czy też, jak chce E. Seneta, jest pierwszym ścisłym dowodem centralnego twierdzenia granicznego? Oddajmy głos Senecie.

Po pierwsze, jeśli zapiszemy P jako prawdopodobieństwo tego, że

$$|\lambda_1 \epsilon_1 + \ldots + \lambda_n \epsilon_n| [2(c\Lambda)^{1/2}]^{-1} < t,$$

to łatwo zauważyć, że wyrażenie po lewej stronie jest jednorodne względem λ_i, czyli można licznik i mianownik podzielić przez n w stosownej potędze tak, by spełnione było założenie o $n\lambda_i$.

Po drugie, wartość Θ musi być dość duża (tw. 4) i nie za duża (tw. 5), ale wobec założenia o $n\lambda_i$ można przyjąć $\Theta = n^{\gamma+1/2}$, gdzie $0 < \gamma < 1/4$. Otrzymamy wówczas $h \leq const\ n^{4\gamma-1}$ ($4\gamma - 1 < 0$), co załatwia $|P - P_1|$ i $|P_2 - P_3|$. Trudniej jest z $|P_1 - P_2|$. Tu oszacowanie zależy od t, ale jak pisze Seneta - można się pozbyć tej zależności, co pokazał później Lapunow.

Z powyższych uwag wynika, że dowód Śleszyńskiego, przy odpowiedniej modyfikacji zapisu, jest dowodem centralnego twierdzenia granicznego, co prawda dla trochę szczególnej postaci rozkładu, ale przy założeniach słabszych niż u Markowa i Lapunowa, którzy zakładali istnienie momentów stopnia wyższego niż 2.

Na zakończenie zajrzyjmy do M. Fisza ([1], 209 - 210). Czytamy tam: ... twierdzenie Lindeberga - Levy'ego ...

Twierdzenie 6.8.1. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi niezależnymi o tym samym rozkładzie i skończonym odchyleniu standardowym $\sigma \neq 0$, to ciąg dystrybuant $(F_n(z))$ zmiennych losowych Z_n określonych wzorami

$$Y_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad Z_n = (Y_n - nm)(\sigma n^{1/2})^{-1}$$

spełnia dla każdej wartości z równość

$$\lim_{n \to \infty} F_n(z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{z} exp(-z^2/2)dz$$

Potem następuje jednostronicowy dowód w oparciu o metodę funkcji charakterystycznych. Czy nam to czegoś nie przypomina?

Powstaje pytanie, dlaczego praca Śleszyńskiego w ciągu przeszło stu lat została tylko raz doceniona. Odpowiedź jest prosta. Po pierwsze, sam tytuł i główna teza pracy sugerują, iż chodzi o metodę najmniejszych kwadratów. Po drugie, twierdzenie 7 stanowi wprawdzie podsumowanie wcześniejszych twierdzeń, ale jest jak gdyby lematem do twierdzenia końcowego i nigdzie nie jest powiedziane, że stanowi ono ważny samodzielny wynik. Po trzecie wreszcie, niezbyt szczęśliwy dobór oznaczeń, dłużyzny oraz pewne niedopowiedzenia i minimalne luki powodują, że całość jest słabo czytelna. A poza tym, komu miało zależeć na rozgłaszaniu osiągnięć Śleszyńskiego? Rosjanie mieli swoich — Markowa i Lapunowa — a Śleszyński, który wcześniej od nich osiągnął swoje wyniki, był Polakiem. Polacy zetknęli się ze Śleszyńskim dopiero, gdy miał 57 lat i jego zainteresowania nie dotyczyły już rachunku prawdopodobieństwa, a czasopisma, w którym opublikowano pracę Śleszyńskiego, nie ma w Bibliotece Jagiellońskiej. W tej sytuacji „odkrycia" Śleszyńskiego dokonano dopiero po 90 latach w dalekiej Australii.

3. Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa

Niekwestionowanym twórcą aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa jest Andriej Kołmogorow, który sformułował ją w książce „Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung" wydanej w 1933 w Berlinie. Jednak już wcześniej wielu uczonych próbowało włączyć probabilistykę do matematyki. O tych próbach, a szczególnie o pracach szkoły niemieckiej, mówiono w Dziwnowie (por. [2] i [10]). Omówienie prac Łomnickiego [3] i H. Steinhausa [7] będzie uzupełnieniem informacji o powstawaniu aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa.

A. Łomnicki i H. Steinhaus byli matematykami lwowskimi. Przypomnijmy pierwszego z nich, mniej znanego.

Antoni Łomnicki urodził się w 1881 we Lwowie, studia matematyczne na Uniwersytecie Lwowskim zakończył doktoratem w 1903. Pracował jako nauczyciel szkół średnich, przez rok przebywał w Getyndze, gdzie zetknął się z H. Minkowskim, D. Hilbertem i F. Kleinem. Po habilitacji w 1919 rozpoczął pracę na Politechnice Lwowskiej jako zastępca profesora, a od 1920 jako profesor nadzwyczajny (1921 - zwyczajny) i kierownik Katedry Matematyki II. Zajmował się logiką, teorią funkcji zmiennej rzeczywistej, rachunkiem prawdopodobieństwa i statystyką, jak również dydaktyką matematyki i kartografią, w której to dziedzinie był ekspertem. Wraz z innymi profesorami lwowskimi został rozstrzelany 4 lipca 1941.

Prace A. Łomnickiego i H. Steinhausa ukazały się w tym samym roczniku (1923) Fundamenta Mathematicae. Pierwsza datowana jest — Lwów, 19 XI 1920, druga — Getynga 18 VI 1922. Obie prace zawierają próby zdefiniowania prawdopodobieństwa za pomocą miary.

A. Łomnicki określa prawdopodobieństwo jako funkcję

$$p_{\mathfrak{M}}(m; \varphi_{\mathfrak{M}}(\epsilon)),$$

gdzie $\mathfrak{M}$ oznacza zbiór zdarzeń dopuszczalnych, m — zbiór przypadków sprzyjających danemu zdarzeniu, φ — rozkład masy (gęstość). Żąda przy tym, aby spełnione były postulaty:

I $p_{\mathfrak{M}}(o; \varphi_{\mathfrak{M}}(\epsilon)) = 0$

II $p_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}; \varphi_{\mathfrak{M}}(\epsilon)) = 1$

III Jeżeli $m_1 \cap m_2 = 0$, to

$$p_{\mathfrak{M}}(m_1 \cup m_2; \varphi_{\mathfrak{M}}(\epsilon)) = p_{\mathfrak{M}}(m_1; \varphi_{\mathfrak{M}}(\epsilon)) + p_{\mathfrak{M}}(m_2; \varphi_{\mathfrak{M}}(\epsilon))$$

IV Jeżeli $m_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $m_2 \subset \mathfrak{M}_2$, $m = m_1 \times m_2 \subset \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$, to

$$p_{\mathfrak{M}}(m; \varphi_{\mathfrak{M}}(\epsilon)) = p_{\mathfrak{M}_1}(m_1; \varphi_{\mathfrak{M}_1}(\epsilon)) p_{\mathfrak{M}_2}(m_2; \varphi_{\mathfrak{M}_2}(\epsilon)).$$

Ponieważ dla zbiorów nieprzeliczalnych A. Łomnicki wprowadza prawdopodobieństwo za pomocą miary, więc można przyjąć, że pominięty w tym zestawie pierwszy aksjomat Kołmogorowa jest również spełniony.

Praca Łomnickiego, choć zawierająca luki, stanowi jednak ważny etap na drodze do celu. Autor stawia przed sobą zadanie ([3], s. 36): podanie konstruktywnej definicji prawdopodobieństwa i konsekwentnie stara się je realizować.

Inny charakter ma praca H. Steinhausa [7]. Autor podaje teorię nieskończonych rzutów monetą. Poprzez odwzorowanie ich na ciągi zero - jedynkowe rozważane jako rozwinięcia dwójkowe liczb z przedziału [0, 1] zdarzenia losowe przechodzą na zbiory mierzalne, a prawdopodobieństwo jest miarą Lebesgue'a. Powstał w ten sposób w pełni zmatematyzowany model.

Dlaczego częściej wymienia się pracę Steinhausa, która dotyczy szczególnego modelu i szczególnej miary, niż pracę Łomnickiego, która stara się objąć zagadnienie całościowo?

Być może odpowiedź da nam częściowo przytoczone przez A. Jakubowskiego [2] zdanie z książki Kołmogorowa: „Odpowiadająca ogólnemu punktowi widzenia konstrukcja rachunku prawdopodobieństwa była w danych kręgach od pewnego czasu znana, brakowało jednak prezentacji pełnego i wolnego od zbędnych komplikacji systemu". Istotnie, praca Łomnickiego jest właśnie pełna tych „zbędnych komplikacji" i dlatego po wydaniu książki Kołmogorowa poszła w zapomnienie. Jest tu zresztą analogia ze Śleszyńskim. W obu przypadkach sugestia tytułu i znaczne rozmiary pracy zniechęcały do wnikliwego czytania. I w obu przypadkach, o czym mówimy w uwagach końcowych, przeszły niedostrzeżone pewne już niezaprzeczalne priorytety.

Proste wyjaśnienie ma też stosunkowo większa popularność pracy Steinhausa. Po prostu Steinhaus wykorzystał swój model do badania zbieżności pewnych szeregów, a tego już nikt nie ulepszył.

Na sesji poświęconej Hugonowi Steinhausowi K. Urbanik [9] wysoko ocenił osiągnięcia lwowskich matematyków: „finał należał do Kołmogorowa, ale dwóch matematyków polskich Hugo Steinhaus i Antoni Łomnicki doszło do półfinałów". Dlaczego Łomnicki i Steinhaus nie poszli dalej, wyjaśnił w 30 lat później Hugo Steinhaus. Stwierdził, że na drodze do powstania silnej lwowskiej szkoły probabilistycznej stanęły dwie przeszkody: siła atrakcyjna szkoły warszawskiej, zajmującej się wyłącznie teorią mnogości oraz katastrofa wojenna 1939.

4. Uwagi końcowe

Pora teraz na refleksje. Wydaje się, że ani Śleszyński nie był Lindebergiem czy Fellerem, ani Łomnicki i Steinhaus nie byli Kołmogorowami. Trzeba się chyba jednak zgodzić z E. Senetą, że Śleszyński był przed Markowem oraz z K. Urbanikiem, że po Łomnickim i Steinhausie był już tylko Kołmogorow. Możliwe, że osiągnięcia polskich matematyków byłyby znaczniejsze, gdyby nie fakt, że pracowali daleko od stolicy. Steinhaus tłumaczy, jaki to miało wpływ na matematykę we Lwowie. Śleszyński mógłby powiedzieć, że trudno było pracować w Odessie, gdy w odległym Petersburgu żył jeszcze Pafnucy Czebyszew otoczony gronem równie genialnych uczniów.

Na zakończenie dwie uwagi. D. Szynal w [8] na stronie 197 pisze: „Lapunow ... wprowadził nową metodę badawczą (metodę funkcji charakterystycznych)", ale wiemy, że J. Śleszyński stosował funkcje charakterystyczne już 8 lat wcześniej. Z kolei K. Urbanik w [9] na stronie 45 napisał: „Głębokie znaczenie wyniku Kołmogorowa polega także na uchwyceniu paraleli między niezależnością stochastyczną a produktowaniem kartezjańskim". Czy to przypadkiem nie koresponduje z czwartym postulatem Łomnickiego ([3], s. 43)? Wydaje się zresztą, że w zagadnieniach niezależności stochastycznej A. Łomnicki

wyprzedził nie tylko Kołmogorowa. P. Matuła w [4] podaje definicję funkcji niezależnych wprowadzoną w 1936 przez H. Steinhausa w pracy „Le courbe de Peano et les fonctions independantes". Definicja ta pokrywa się z pojęciem niezależności w pracy A. Łomnickiego [3] napisanej 16 lat wcześniej.

W podanym wykazie literatury znajdują się tylko te pozycje, z których autorzy bezpośrednio korzystali. Zainteresowanych pełniejszą bibliografią odsyłamy do prac [5], [8] i [10].

Literatura

[1] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1969.

[2] Jakubowski A.: Wokół aksjomatyki teorii prawdopodobieństwa: Niemcy, początek XX wieku. Probabilistyka i mechanika w szkicach historycznych, cz. I, Probabilistyka, Szczecin (1992), s. 98 - 102.

[3] Łomnicki A.: Nouveaux fondements du calcul des probabilités. Fund. Math. 4 (1923), s. 34 - 71.

[4] Matuła P.: Probabilistyka w pracach Hugona Steinhausa. Probabilistyka, Szczecin (1992), s. 259 - 268.

[5] Seneta E.: The Central Limit Problem and Linear Least Squares in Pre - Revolutionary Russia. The Background Math. Scientist 9 (1984), s. 37 -77.

[6] Śleszyński J.: O teorii metody najmniejszych kwadratów (w jęz. rosyjskim). Zap. Mat. Otdel. Noworossijskogo Obszczestwa Estestwoispytatielej, 14 (1892), s. 201 - 264.

[7] Steinhaus H.: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure. Fund. Math. 4 (1923), s. 286 - 310.

[8] Szynal D.: Centralne twierdzenie graniczne od Abrahama de Moivre'a do Williama Fellera. Probabilistyka, Szczecin (1992), s. 178 - 208.

[9] Urbanik K.: Idee Hugona Steinhausa w teorii prawdopodobieństwa. Wiad. Mat. XVII (1973), s. 39 - 50.

[10] Zapala A.: O aksjomatach teorii prawdopodobieństwa. Probabilistyka, Szczecin (1992), s. 103 - 120.

Abstract

The authors presented the results obtained by J. Śleszyński, A. Łomnicki and H. Steinhaus.

J. Śleszyński proved the central limit theorem. Of course his proof is not complete and he considered only a special case but he obtained his results ten years earlier than A. Lapunow and he was undeniably the first who used the method of characteristic functions to prove the theorem. Moreover his assumptions are weaker than those of Lapunow and close to the assumptions of Lindeberg.

A. Łomnicki formulated the system of axioms in the theory of probability based on the theory of measure. It was not perfect system and it was presented in rather complicated form. Nevertheless after him was only Kolmogorov and A. Łomnicki had the undeniable priority in observation of the connection between stochastic independence and cartesian product, the paper of Steinhaus was published only 13 years later.

An ingenious example of H. Steinhaus showed that the new concept of probability, which was obtained with the aid of measure, may be applicated to solve some practical problems.

Recapitulating the above observations we may say that the achievements of J. Śleszyński, A. Łomnicki and H. Steinhaus are significant and therefore they need to be reminded.