

Edward SIWEK

## KILKA UWAG O POCZĄTKACH GEOMETRII

### Streszczenie

W kulturze śródziemnomorskiej wiedza geometryczna i arytmetyczna pojawia się już na początku trzeciego tysiąclecia przed n. Chr. wraz z powstawaniem wspólnot rolniczych w Egipcie i Babilonii. W tym czasie wiedzę matematyczną dysponują bardzo wąskie klany specjalistów, głównie kapłanów. Wiedza ta ma charakter czysto utylitarny, jest opanowywana pamięciowo, a weryfikowana doświadczeniem.

Począwszy od VI wieku przed n. Chr., w starożytnej Grecji dociekania naukowe mają już naukowy, wyraźnie poznawczy charakter i są szerzej upowszechniane. Jednak nie stanowią one jeszcze wyodrębnionej dyscypliny naukowej, lecz stanowią najlepiej uzasadnioną część filozofii greckiej.

Wyodrębnianie się matematyki w osobną dziedzinę nauki dokonuje się bardzo wolno w pierwszych stuleciach po n. Chr. między innymi w wyniku pojawienia się pisanych dzieł matematycznych Hipokratesa z Chios, Euklidesa, Apoloniusza i innych.

## REMARKS ON THE ORIGIN OF GEOMETRY

### Summary

In mediteranean civilisation the beginning of geometrical and arithmetical activity was contemporary with the forming of agricultural communities at beginn of third millenary in antique Egypt and Mesopotamia. Mathematical knowledge of that time is characterised by small propagation, experimental derivation and subordinatio to practical needs.

Geometry of antique Greece was more propagated and of scientific character but was not a distinct domain of Greek philosophy. He formed at most exact and best verificate part of Greek science. Step by step he became a distinct science in the first and second centuries p. Ch. also as resulting of thoses bookes as theses of Hippocrates from Chios, Euclid, Apollonius and other.

## EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER URBILDUNG DER GEOMETRIE

### Zusammenfassung

In mittelländische Kultur die Betrachtung der geometrischen und arithmetischen Probleme erscheint sich gleichzeitig mit dem Landwirtschaftentstehung die in Babylonien und Ägypten von Anfang der dritten Jahrtausend v. Chr. erfolgte. In dieser Zeit die experimental geprüfte und sehr eng uverbreite mathematische Kenntnis nur praktischen Bedarfen diene.

Seit 6. Jahrhundert v. Chr., in griechische Philosophie, geometrische Untersuchung verbreit sich besser und nimmt wissenschaftig Charakter an. Obwohl Geometrie, neben Arithmetik, bei Platon aus Name genannt ist, doch in dieser Zeit sie keine Rolle der selbstständige Lehre sondern des höchst exact und best begründet Philosophieanteil spielt.

Die Unterscheidung der Mathematik als selbstständige Lehre erfolgt sich stufenweise inersten Jahrhunderte n. Chr. unter anderen infolge der Bücher von Hippokrates aus Chios, Euklid, Apolonius und anderen.

Liczne spośród obecnie uprawianych dyscyplin naukowych wyodrębniły się z ogólnej nauki, która w starożytności nazywała się filozofią. Wyodrębnienie to następowało w miarę gromadzenia coraz większej wiedzy z danego zakresu, związanym z tym zawężaniem zainteresowań uczonych, a wreszcie — wypracowywaniem coraz bardziej specjalistycznych metod i technik badawczych. Ucząc matematyki nie sposób nie zadać sobie pytania, czy matematyka, która od samego początku zajmowała poczesne miejsce w filozofii greckiej, też wyłoniła się z niej i kiedy, czy też była od niej wcześniejsza? A może była jej źródłem? To pytanie prowadzi do dalszych pytań w rodzaju: jak dawno powstała matematyka? jakie były jej początki? Czy zrodziła ją potrzeba liczenia, czy może potrzeby natury geometrycznej? Pytania można mnożyć.

Podobne pytania matematycy i historycy kultury zadawali sobie od dawna, a w miarę gromadzenia materiału archeologicznego odpowiadali na nie. Trud odczytywania papirusów i glinianych tabliczek wypełnionych nieznanymi znakami pozwalał początkowo ustalać jedynie fakty pojedyncze i nie zawsze spójne. Z czasem pojawiły się jednak opracowania coraz pełniejsze i dziś możemy z nich korzystać. Jest to bardzo pożyteczne, gdyż poznanie początków kultury ludzkiej pozwala lepiej zrozumieć to, co dziś robimy. Jednak wiedza historyczna dotycząca rozwoju matematyki często szerzy się nie w oparciu o rzetelne opracowania historyczne, lecz w oparciu o przekaz ustny ulegający uproszczeniu, zniekształceniu i spłyceciu. Dlatego też warto przypomnieć niektóre ustalenia i snuć wnioski oparte na opracowaniach badań historycznych.

Wprawdzie neolityczne wykopaliska ornamentów datowane na około ósme tysiąclecie przed naszą erą świadczą, że już wtedy znano między innymi równoległość i prostopadłość odcinków prostoliniowych, przystawanie, podobieństwo i symetrię różnych figur oraz liczby określające niewielkie ilości przedmiotów, jednak o tak odległych czasach mamy

bardzo mało informacji z interesującego nas zakresu i dlatego nie będziemy ich tu analizować. Nieco później, w dolinach wielkich rzek położonych w ciepłym klimacie zaczęły powstawać społeczeństwa rolnicze wykorzystujące naturalne nawadnianie i użyźnianie gleby przez rzeki. Rzeki jednak nie tylko użyźniały gleby, lecz i niszczyły je. Trzeba więc było podejmować prace irygacyjne, co doprowadziło te społeczeństwa do wysokiego stopnia zorganizowania, a powtarzające się okresy urodzaju i nieurodzaju powodowały konieczność gromadzenia zapasów, gospodarowania nimi oraz doskonalenia rachuby czasu. To zaś wymagało coraz szerszego posługiwania się rachunkiem, mierzenia pól i objętości oraz projektowania systemów irygacyjnych, spichrzów itp. Ponieważ była to w owych czasach bardzo trudna sztuka, niedostępna nie tylko dla szerokich rzesz społeczeństwa, lecz nawet dla panujących, więc posiadający ją tworzyli wąskie klany wysoko cenionych specjalistów, przeważnie kapłanów, a rzadko świeckich. Wysoka wartość tej umiejętności, połączona z jej niedostępnością nawet dla możnych, nadawała jej charakter magiczno-sakralny. W istocie zaś była to jedynie pewna umiejętność posługiwania się liczbami, schematycznymi rysunkami i obserwacjami astronomicznymi w celach ściśle praktycznych.

Jakkolwiek tego rodzaju kultury powstały nie tylko nad Nilem oraz Eufratem i Tygrysem (także nad Indusem, Gangesem, Huangho czy Jangcy), to jednak najlepiej znane i w pewnej mierze reprezentatywne są kultury egipska i babilońska. Dziś wiemy, że specjaliści owych kultur potrafili obliczać pola niektórych figur (przy czym pole koła obliczali z dużą dokładnością), objętości zbiorników, operowali nie tylko liczbami naturalnymi, lecz i ułamkami, a większość wykrytych związków między nimi zapisywali w skrętnie przechowywanych tablicach (np. egipski papirus Rhind). Ponadto w Mezopotamii bieglej rachowano dzięki stosowanemu tam pozycyjnemu systemowi notacji liczb. Babilończycy potrafili posługiwać się nie tylko równaniami liniowymi, lecz także niektórymi równaniami kwadratowymi i układami dwóch równań. Znano też pitagorejski związek dla wielu trójkątów prostokątnych.

W tym też czasie, datowanym na trzecie tysiąclecie i pierwszą połowę drugiego tysiąclecia przed naszą erą, spotykamy się z początkami nauczania matematyki. Wysoka przydatność, a nawet niezbędność społeczna specjalistów potrafiących rozwiązywać problemy gospodarcze i budowlane za pomocą sztuki rachowania i rysowania, powodowała konieczność kształcenia następców i zastępców owych fachowców. Toteż kształcili oni starannie wyselekcjonowanych adeptów dopuszczając ich tym samym do swoich tajemnic i włączając do zamkniętych klanów. Kształcenie to polegało głównie na niezawodnym opanowaniu pamięciowym licznych związków i operacji liczbowych oraz bardzo szczegółowych przepisów postępowania zmierzających do rozwiązywania poszczególnych zadań praktycznych. To też było bardzo skrupulatnie egzekwowane od uczniów. Jednak mistrzowie posiadali niekiedy pewne własne spostrzeżenia matematyczne, nie służące bezpośrednio praktyce. Tych spostrzeżeń na ogół nie ujawniali uczniom, natomiast formułowali rozmaite zagadki, które za pomocą swych tajemnic tylko oni potrafili rozwiązać. Posiadanie takich tajemnic

znakomicie podnosiło wartość i sławę mistrza i właściwie tylko temu służyło.

Czy zakres umiejętności posiadanych przez kapłanów można uznać za początki matematyki? Odpowiedź na to pytanie nosi cechy subiektywności. Z jednej bowiem strony szacunek budzi skuteczność praktycznego wykorzystania jakże skromnych środków matematycznych, czy dokładność dokonywanych obliczeń. Z drugiej jednak strony nic nie wskazuje na to, że w owym czasie posługiwano się abstrakcyjnymi pojęciami matematycznymi lub że formułowano ogólne tezy. Nie natrafiono też na jakiegokolwiek próby uzasadniania znanych związków czy ustalenia ich przyczyn. Wręcz przeciwnie, wydaje się, że były one ustalane i weryfikowane raczej empirycznie. Brak więc tej „matematyce” elementów istotnych z dzisiejszego punktu widzenia. Brak ten jest tym bardziej widoczny, że następny, dość dobrze poznany okres dziejów kultury ludzkiej, cechowało już daleko bardziej naukowe podejście do matematyki, w dużej mierze spełniające nawet współczesne wymogi.

Z okresu XIII - VII stulecia p. n. e. nie zachowały się prawie żadne dokumenty myśli matematycznej. Wiadomo jedynie, że w tym czasie nastąpiła we wschodniej części basenu śródziemnomorskiego wielka migracja ludów powodująca upadek państw minojskiego i hetyckiego w Mezopotamii oraz zniszczeń kultur babilońskiej i egipskiej. Na tym terenie pojawiły się nowe ludy, takie jak Asyryjczycy, Fenicjanie, Grecy i Żydzi, i wymieszały się z dawną ludnością tych terenów. Oprócz rolnictwa intensywnie rozwinął się handel, a obok miast będących centrami administracyjnymi regionów rolniczych powstają typowo handlowe miasta u wybrzeży morskich, takie jak: Milet i Smyrna oraz Ateny i Korynt nad Morzem Egejskim, Tarent, Kroton i Syrakuzy nad Morzem Jońskim, a później (około 330 r. p. n. e.) Aleksandria. Kupcy, podróżujący do odległych miejsc, byli bardziej niezależni od władców niż osiadli rolnicy i rzemieślnicy. Byli też zainteresowani tym, by miasta handlowe mogły organizować się zgodnie z potrzebami handlu, co stanowiło załóżek ich samorządności, a później – demokracji. W tym też czasie dokonano dwóch wielkich wynalazków: alfabetu i pieniądza.

Dokumenty świadczą, że w VI wieku p. n. e. w tych właśnie ośrodkach handlowych uprawiana była działalność naukowa na nieporównanie wyższym poziomie niż około tysiąc lat wcześniej w Egipcie i Mezopotamii i na szerszą skalę. W pierwszej połowie tego stulecia powstała tzw. jońska szkoła filozofii przyrody, której twórcą był Tales z Miletu. Celem ich dociekań było na przykład zrozumienie istoty i pochodzenia materii. Były to więc cele nie bezpośrednio praktyczne, lecz typowo poznawcze. Tales i jego uczniowie posługiwali się już na co dzień takimi pojęciami abstrakcyjnymi, jak odcinki, kąty, wielokąty i ich przystawanie, prostopadłość i równoległość, opisywanie okręgów na trójkątach i inne, oraz formułowali ogólne twierdzenia w dzisiejszym sensie. Za odkrycie twierdzenia o kątach wpisanych w półokrąg i twierdzenia doń odwrotnego Tales podobno złożył bogom sowitą ofiarę. Nie ma wprawdzie dokumentów świadczących, że Tales i jego uczniowie dowodzili otrzymane twierdzenia, jednak nie sposób przyjąć, że były to tezy ustalane bezkrytycznie.

Z pewnością były one starannie analizowane i uzasadniane, choć raczej w tym celu, by samemu zrozumieć przyczynę ich prawdziwości, niż by przekonać o niej kogoś innego.

W drugiej połowie VI wieku p. n. e. powstał nowy nurt w nauce greckiej interesujący się głównie człowiekiem i jego stosunkiem do świata. Był to więc nurt humanistyczny, etyczno - religijny, reprezentowany przez grupę pitagorejczyków, która działała przez ponad sto lat. Podobnie jak w nurcie przyrodniczym i w tym nurcie humanistycznym rozważania zaliczane dziś do matematycznych odgrywały podstawową rolę. Pitagorejczycy początkowo zajmowali się głównie liczbami naturalnymi wykrywając szereg związków między nimi oraz ich odniesienia do zjawisk akustyczno - muzycznych czy kosmologicznych i dostrzegając w nich wyraz ogólnej doskonałości. W połączeniu z etyczno - religijnymi zainteresowaniami pitagorejczyków nadawało to arytmetyce pitagorejskiej charakter mistyczny. Dopiero odkrycie niewspółmierności odcinków spowodowało rewizję podejścia do arytmetyki, która odtąd została silnie zgeometryzowana. Polegało to na traktowaniu liczb i związków między nimi prawie wyłącznie jako wyników pomiarów długości, pól czy objętości i odzwierciedlaniu przez nie zależności geometrycznych. Podejście to tak się rozpowszechniło, że przetrwało stulecia i stało się podstawową ideą w wydanych półtora stulecia później „Elementach” Euklidesa oraz późniejszych dziełach. Doprowadziło ono także pitagorejczyków do podjęcia problematyki geometrycznej polegającej nie tylko na sformułowaniu i udowodnieniu znanego twierdzenia Pitagorasa, lecz także na wykonaniu licznych konstrukcji, w tym konstrukcji pięciokąta foremnego oraz czworoscianu, ośmiościanu czy dwudziestościanu. Konstrukcja pięciokąta foremnego była chyba najwyższym cenionym osiągnięciem pitagorejczyków, gdyż jako symbol swej grupy przyjęli pentagram składający się z pięciokąta foremnego z wpisaną wewnątrz pięciopromienną gwiazdą. Tę figurę cechują doskonale proporcje, licznie występujące w naturze i często naśladowane w sztuce, co jest kolejnym wyrazem piękna i doskonałości tak cenionych i poszukiwanych przez pitagorejczyków. Geometrycznym zainteresowaniom pitagorejczyków zawdzięczamy także pierwsze znane definicje i dowody.

Rezygnując z dalszego chronologicznego opisu rozwoju nauki greckiej, spróbujmy wyciągnąć kilka wniosków dotyczących pytań zasygnalizowanych na początku opracowania. Przede wszystkim nasuwa się obserwacja, że zagadnienia zaliczane dziś do matematyki były od samego początku obecne w kulturze ludzkiej, nie tylko umysłowej, ale i materialnej. Wprawdzie początkowo nie miały one charakteru naukowego, nawet przy skromnych wymaganiach stawianych z dzisiejszego punktu widzenia, ale też w owym czasie (III i II tysiąclecie przed naszą erą) nie istniała w ogóle nauka spełniająca tego rodzaju kryteria. Jednak już wtedy wiedza i umiejętności matematyczne były wysoko cenioną i rzadką wartością wykorzystywaną w życiu ówczesnych ludzi oraz stanowiącą o postępie i rozwoju społeczeństw.

Mimo trudności prześledzenia procesu powstawania nauki greckiej i roli, jaką odegrała w nim „pranauka” babilońsko - egipska, od początku obserwujemy w nauce greckiej

nie tylko obecność zagadnień matematycznych, ale ich pozycję wiodącą, współtworzącą istotne wartości nauki greckiej. Zaliczyć do nich można postawienie obok naturalnego pytania: jak jest? drugiego, kapitalnego z poznawczego punktu widzenia, pytania: dlaczego tak jest? Można zasadnie przypuszczać, że już w VI w. p.n.e. właśnie to pytanie kierowało umysły myślicieli greckich ku zagadnieniom geometrii i arytmetyki, bo wówczas właściwie tylko te zagadnienia pozwalały zadowalająco analizować przyczyny i odpowiadać na pytanie: dlaczego? Tylko w tym zakresie możliwe były tezy dokładne i jednoznaczne oraz precyzyjne uzasadnienia, służące nie tyle sprawdzeniu prawdziwości wypowiedzianych twierdzeń, co ujawnianiu ich przyczyn. Na marginesie tego warto zupełnie współcześnie zauważyć, że dowód twierdzenia ma dwojaką rolę do spełnienia. Jedna z nich polega na przekonaniu się o prawdziwości twierdzenia, a druga, bardziej pierwotna zarówno historycznie, jak i z punktu widzenia potrzeb poznawczych człowieka, polega na ujawnieniu istotnych przyczyn jego prawdziwości. Ma to określone znaczenie w nauczaniu matematyki zawsze i na wszystkich poziomach.

Geometria i arytmetyka była dla myślicieli starożytnych nie tylko terenem, na którym uczyli się analizowania przyczyn i rozwiązywania problemów, lecz także — dziedziną uczącą formułowania tez, umiejętności argumentowania i przekonywania oraz innych cech koniecznych w działalności poznawczej w każdej dziedzinie. Nie pozostawało to zapewne bez wpływu na rozwój nauki, a także na ateński wynalazek z V w. p. n. e., jakim była demokracja. Ta kształtująca możliwości poznawcze cecha matematyki była racją dla powszechnego nauczania matematyki w znacznym wymiarze godzin aż do czasów obecnych.

Wiele wskazuje na to, że problematyka geometryczna i arytmetyczna, choć od początku współtworząca naukę grecką, nie była z niej wyodrębniona. Wprowadzie terminy „geometria” (pomiar ziemi), „arytmetyka” (nauka o liczbach) i „matematyka” (poznawanie) są pochodzenia greckiego, a Platon w swym quadrivium z nazwy wymienia geometrię i arytmetykę obok astronomii i muzyki, to jednak wielu myślicieli greckich łączyło zainteresowania matematyczne z innymi zagadnieniami naukowymi, a niewielu myślicieli tego okresu pomijało zagadnienia matematyczne.

Wśród wielu znanych szkół naukowych tego okresu brak takich, które zajmowały się wyłącznie, lub choćby głównie, problematyką zaliczaną dziś do matematyki. Można więc sądzić, że w okresie rozwoju nauki starożytnej matematyka w dzisiejszym sensie tego słowa była jej istotną i organiczną częścią, a nie była jeszcze wyodrębnioną z niej osobną dyscypliną naukową. Z tego wynika, że matematyka wyodrębniła się z nauki starożytnej później, podobnie jak inne dyscypliny naukowe. Powstaje więc pytanie: kiedy to nastąpiło i pod jakim wpływem?

Udzielenie odpowiedzi na to pytanie wymagałoby dalszej dość dokładnej analizy rozwoju myśli ludzkiej w pierwszych stuleciach nowej ery, co wykracza poza ramy tego referatu. Poza tym nie sposób ustalić nawet przybliżonej daty takiego wyodrębnienia, gdyż do dziś matematyka ma swoisty, interdyscyplinarny charakter i wciąż rozwija się pod wpły-

wem innych dyscyplin, uczestnicząc także w ich rozwoju. Jest więc owo wyodrębnienie się faktem w dużej mierze umownym, a w dużej mierze zespolenie matematyki z całą nauką, a nawet szerzej — z kulturą ludzką, trwa nadal. W polityce edukacyjnej niektórych współczesnych społeczeństw ta uniwersalna rola i wartość matematyki stały się niedoświadczane, co przejawia się na przykład w stałym redukowaniu czasu i zakresu kształcenia matematycznego i jego izolacji od innych przedmiotów.

Jakkolwiek trudno ustalić, kiedy i w jakiej mierze matematyka wyodrębniła się z ogólnej nauki, zwanej w starożytności filozofią, to jednak można i warto zauważyć jeden z czynników mających wpływ na krystalizowanie się matematyki w zwartą dyscyplinę naukową. Tym czynnikiem są książki matematyczne. Pierwszym znanym opracowaniem matematycznym, a prawdopodobnie także pierwszym pisaniem dziełem naukowym, jest „Stoicheja” Hipokratesa z Chios, pochodzące z połowy V w. p. n. e. a zawierające systematyczny i dedukcyjny wykład ówczesnej wiedzy geometrycznej, głównie uzyskanej przez pitagorejczyków i będącej pierwowzorem dla „Stoicheja geometrii” Euklidesa. Pierwsze z tych opracowań znane jest tylko we fragmentach, natomiast drugie, napisane około 130 lat później, było dość szeroko upowszechnione w następnych stuleciach i odegrało rolę chyba najpowszechniej znanego podręcznika matematyki w historii. Jego znaczenie polega również na tym, że zwyczaj pisania dzieł matematycznych był kontynuowany w następnych stuleciach, kiedy powstały pisane dzieła Apoloniusza („Stożkowe”), Nikomachosa („Wstęp do arytmetyki”), Diofanta („Arytmetyka”), Pappusa („Zbiór matematyczny”) i dalsze. Nie ulega wątpliwości, że te opracowania syntetyzujące wiedzę matematyczną spowodowały wykrystalizowanie się matematyki w zwartą dyscyplinę naukową. „Stoicheja geometrii” Euklidesa doczekała się po 22 stuleciach swoistego kolejnego wydania w postaci „Gründlagen der Geometrie” Hilberta i w tej nowej wersji tłumaczonej na wiele języków nadal pełniła swą rolę uniwersalnego podręcznika geometrii. Widać stąd, jak potężna i nie ograniczona czasowo i terytorialnie może być rola książki matematycznej.

## Abstract

In mediterranean civilisation the beginning of geometrical and arithmetical activity was contemporary with the forming of agricultural communities at beginning of third millenary in antique Egypt and Mesopotamia. Mathematical knowledge of that time is characterised by small propagation, experimental derivation and subordination to practical needs.

Geometry of antique Greece was more propagated and of scientific character but was not a distinct domain of Greek philosophy. He formed at most exact and best verificate part of Greek science. Step by step he became a distinct science in the first and second centuries p. Ch. also as resulting of thoses bookes as theses of Hippocrates from Chios, Euclid. Appolonius and other.