ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Włodzimierz TROCHANOWSKI

LEKCJE MATEMATYKI Z ELEMENTAMI HISTORII MATEMATYKI I ICH WPŁYW NA WYNIKI NAUCZANIA ORAZ ROZWÓJ ZAINTERESOWAŃ MATEMATYCZNYCH

Streszczenie

Celem wprowadzenia historii matematyki do nauczania szkolnego jest podniesienie zainteresowania uczniów matematyką, rozwój ich kultury matematycznej oraz wzrost wyników nauczania. Przedstawiono pewne treści z historii matematyki, które można realizować w szkole podstawowej i średniej. Fakty historyczne mogą obejmować 10 - 15 % lekcji, czyli 5 - 10 minut na jedną z nich w postaci pogadanki, rozwiązania zadania, objaśnienia rysunku itd. i powinny być omawiane z materiałem teoretycznym. Z badań eksperymentalnych wynika, że historia matematyki wpływa w 17 % na wzrost wiedzy uczniów, w 11 % na jej trwałość oraz przyczynia się do rozwoju zainteresowań matematycznych.

LESSONS OF MATHEMATICS WITH MATHS' HISTORICAL ELEMENTS AND THE EFFECT OF THEM ON TEACHING AND DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL INTERESTS

Summary

In order to raise an interest in maths by pupils and obtain an increase in the effectiveness in teaching this subject, one intends to introduce maths historical elements into school teaching. Some contents connected with maths history in primary and secondary school have been shown. It is supposed to occupy from 10 to 15 per cent of the lesson time at them, so it should last about 5 - 10 minutes per lesson. From the experimental research it follows that maths history causes an increase in knowledge of pupils by 17; per cent the persistence of the knowledge is higher by 11 per cent. The interest in mathematics increases as well.

УРОКИ МАТЕМАТИКИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ И ВЛИЯНИЕ ЭТИХ УРОКОВ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ОБЫЧЕНИЯ, А ТАКЖЕ НА РАЗВИТИЕ ИНТЕРЕСА УЧЕНИКОВ К МАТЕМАТИКЕ

Резюме

Целью введения истории математики в обучение является повышение интереса учеников к математике, а также результатов обучения. Приводятся отдельные фрагменты истории математики в начальной и средней школах. Исторические факты, представленные в виде беседы, решения задач, объяснения рисунков и т. п. должны занимать 10 - 15 % всех уроков, а во бремя одного урока — 5 - 10 минут.

Результаты экспериментального изучения этой проблемы свидетельствуют о том, что благодаря введению элементов истории на уроках математики рост знаний учеников увеличибается на 17 %, а прочность усвоения материала — на 11 %.

0. Wstęp

Wprowadzając elementy historii matematyki na lekcjach należy odpowiedzieć sobie na nastepujące pytania:

- po co je wprowadzamy?
- jakie treści z historii matematyki są najbardziej potrzebne uczniom?
- za pomocą jakich form, metod i środków dydaktycznych przekazywać uczniom treści historyczne?
- czy i w jakim stopniu elementy historii matematyki mają wpływ na wzrost wyników nauczania i rozwój zainteresowań matematycznych?

Na postawione powyżej pytania trudno jest jednoznacznie odpowiedzieć, lecz w praktyce szkolnej trzeba szukać najbardziej optymalnych rozwiązań.

Zasadnicze cele, które przyświecają wprowadzeniu elementów historii matematyki w szkołach, są następujące:

a) ożywienie i uatrakcyjnienie lekcji, tym samym rozwój zainteresowań przedmiotem,

b) pogłębienie zrozumienia przez uczniów matematyki i możliwość skonfrontowania poziomu wiedzy tej sprzed wieków z obecną, co stanowi dodatkową motywację do rozwiązywania zadań sprzed setek lat,

c) podniesienie ogólnej kultury matematycznej uczniów oraz zrozumienie miejsca i roli matematyki we współczesnym świecie.

Na podstawie badań ankietowych dotyczących stosowania historii matematyki na lekcjach (badaniem objęto stu nauczycieli matematyki szkół podstawowych i średnich) wynika, że nauczyciele widzą potrzebę jej stosowania w nauczaniu szkolnym, lecz nie zawsze wiedzą jak to zrobić. Między dostrzeganiem a stosowaniem historii matematyki na lekcjach istnieje tendencja malejąca. Na podstawie badań, rozmów z nauczycielami, literatury naukowej można zauważyć, że historia matematyki przenika do nauczania szkolnego bardzo wolno. Najbardziej wykorzystują historię matematyki na lekcjach nauczyciele z dużym stażem pracy, nauczyciele którzy ukończyli studium nauczycielskie oraz nauczyciele szczególnie zainteresowani tą dziedziną wiedzy. Obecnie sytuacja diametralnie się zmieniła, bo historia matematyki znalazła swoje miejsce w programie studiów matematycznych. Dotychczas wśród wielu przyczyn nieprzenikania historii matematyki do nauczania szkolnego można było zaliczyć między innymi braki w zakresie literatury naukowej tego przedmiotu.

Teraz okazuje się, że sytuacja znacznie się zmieniła, ponieważ można znaleźć pozycje książkowe [3], [21], [22], [23], [61] oraz ciekawe artykuły w czasopismach polskich, jak: „Delta", „Dydaktyka matematyki", „Matematyka", „Problemy Dydaktyczne Matematyki", „Nauczyciel i Matematyka", „Wiadomości Matematyczne", a także czasopisma zagraniczne. Autorzy podkreślają, że ciekawostki historyczne wzbudzają zainteresowanie nawet wśród tych uczniów, którzy uczą się matematyki jedynie z obowiązku, bowiem dla wielu uczniów matematyka nauczana w szkole jest często przedmiotem nielubianym.

Brak motywacji i zainteresowań do uczenia się matematyki, obok abstrakcyjności pojęć, wad programu i niewłaściwych metod nauczania, jest jedną z przyczyn niepowodzeń i trudności uczniów w jej uczeniu się. Taki układ powoduje, że matematyka jest nie tylko trudna, ale również staje się nudna dla uczniów. Sposób, w jaki uczeń traktuje matematykę, związany jest z jej specyfiką i z osobą nauczyciela. Muszą to być nauczyciele nie tylko „mili i kochani", ale nauczyciele umiejący w odpowiedni sposób przekazać uczniom wiedzę matematyczną i zdolni do rozbudzenia zainteresowań wśród uczniów tym przedmiotem.

Ponadto ważne jest przekonanie ucznia, że matematyka jest związana ściśle z człowiekiem i towarzyszy mu na każdym kroku, od zarania dziejów. Przykładem związku matematyki z życiem jest problem podwojenia sześcianu, rozwiązywany przez dwa tysiące lat, by w końcu znaleźć rozwiązanie negatywne, mówiące, iż konstrukcja platońska jest w tym przypadku niemożliwa. Chodzi również o to, aby zmieniać zły wizerunek matematyka, w obiegowej opinii, który to wizerunek często kojarzy się jako osoby dziwnej, mającej jedyne hobby — wymyślanie trudnych problemów, a jedyną rozrywkę — ich rozwiązanie. A przecież matematycy, to często ludzie wszechstronni, humaniści, ludzie oczytani, dowcipni, czasem frywolni, ciekawi.

Na fakty przedstawione powyżej można spojrzeć inaczej, gdy wykorzystamy w nauczaniu historię matematyki. Wprowadzenie historii matematyki na lekcje nie może być tylko suchym zestawieniem faktów albo rejestrem życiorysów sławnych ludzi. Powinna ona tłumaczyć sens wprowadzenia danego pojęcia, zadania, twierdzenia itp. oraz objaśniać dlaczego przebiegał on właśnie w taki a nie w inny sposób. Argumentacja może być historyczna lub matematyczna. Na przykład rozwój równań algebraicznych w okresie

Odrodzenia we Włoszech ma argumentację natury historycznej, natomiast rozwój grup w związku z rozwojem równań będzie wymagać uzasadnienia matematycznego.

Nasuwa się pytanie: czy naprawdę warto wprowadzać historię matematyki na lekcje i zapoznawać uczniów z dawnymi problemami? Nowa matematyka, której uczą się uczniowie (po zmianach programu w 1961, 1967 i późniejszych), ma mało wspólnego z dawną matematyką. Jedynie dawne problemy i teorie lepiej wyraża się za pomocą nowego języka i nowych pojęć. Odpowiedź na postawione pytanie jest jednoznaczna: należy historię matematyki wprowadzać do nauczania szkolnego, aby przełamać bierność, niechęć i zahamowania uczniów do tego przedmiotu, a tym samym wpłynąć na rozwój ich aktywności matematycznej. Rozbudzenie zainteresowań matematyką jest bowiem podstawowym warunkiem osiągania sukcesów w jej nauczaniu. Dlatego też niniejsze opracowanie ma być zachętą dla nauczycieli matematyki do inspirowania działań, aby w miarę możliwości wprowadzali uczniów w elementy historii matematyki na swoich lekcjach i zajęciach pozalekcyjnych.

1. Rys historyczny wprowadzania elementów historii matematyki do nauczania szkolnego

W naszej literaturze dydaktycznej brak jest naukowych opracowań dotyczących wykorzystania historii matematyki w nauczaniu i jej roli w podnoszeniu kultury matematycznej [11], [13], [32], [33], [35], [45], [46]. Problem wprowadzania do procesu nauczania historii matematyki nie jest nowy. Szczególny nacisk na nauczanie historii nauk w szkołach średnich kładł P. Tannery (1843 - 1904) — francuski historyk matematyki. Domagał się przeznaczenia półtorej godziny tygodniowo na wykład historii nauk dla uczniów ostatniej klasy, jako oddzielny przedmiot prowadzony przez specjalistów poszczególnych dyscyplin naukowych. Podobne poglądy reprezentował we Włoszech matematyk i historyk G. Loria (1862 - 1953) [3]. Już Komisja Międzynarodowa do Spraw Nauczania Matematyki, utworzona w 1908 r. na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Rzymie, wyraziła żądanie szerokiego uwzględniania rozwoju historycznego matematyki [43]. Nie będziemy wymieniać spotkań i konferencji, na których omawiane były kwestie związane z wykorzystaniem historii nauki. Wystarczy zauważyć, że już w 1952 r. zostały dokładnie sprecyzowane pytania w tym zakresie [45]: czy historia nauki może interesować uczniów? Czy nauczanie historii nauki jest potrzebne i jakie wnosi wartości do procesu dydaktycznego? Czy i w jakim stopniu oraz na miejscu jakiego materiału można ją włączyć do przeciążonych programów szkolnych? Kto jest najbardziej kompetentny by uczyć historii nauki? Na jakie elementy należałoby zwrócić uwagę w toku nauczania historii nauki?

Była to pierwsza Międzynarodowa Konferencja Nauczania historii, uznając doniosłość historii nauki nie tylko dla prawdziwego zrozumienia poszczególnych nauk, lecz również dla poznania ogólnej i całkowitej historii ludzkości, uchwaliła następującą rezolucję:
a) popiera akcję rządów, które wprowadziły nauczanie historii nauk do programów szkół średnich,
b) wyraża życzenie, ażeby we wszystkich krajach takie nauczanie zostało wprowadzone w szkołach podstawowych i średnich,
c) wyraża nadzieję, że reforma nauczania w szkołach wyższych, zmierzająca do zwiększenia liczby wykładów historii, myśli naukowej i historii nauk, przyczyni się skutecznie do kształcenia nauczycieli, którzy będą powołani do realizacji tego nauczania w szkołach.

W Polsce okresu międzywojennego elementy historii matematyki zostały uwzględnione po raz pierwszy w doskonałych podręcznikach w zakresie szkoły średniej z algebry i geometrii S. Kulczyńskiego i S. Straszewicza (1937). Przy niektórych tematach merytorycznych znajdujemy w tych podręcznikach informacje o rozwoju pojęcia liczby, początkach rachunku różniczkowego, Kartezjuszu, Newtonie i inne. Wiadomości historyczne były włączane do treści programowych. Natomiast S. Dickstein i E. Stamm [69] skłaniali się do wyodrębnienia kursu historii matematyki i prowadzenia go obok kursu matematyki szkolnej.

Po drugiej wojnie światowej tylko niektóre podręczniki szkolne zawierały elementy historyczne, przeważnie w postaci krótkich życiorysów matematyków, których elementy teorii realizowano w programie. W 1972 r. Komitet Historii Nauki i Techniki PAN opracował memoriał w sprawie nauczania w Polsce historii nauki i historii techniki, który we wnioskach organizacyjnych dla resortu oświaty i wychowania zawiera następujące postulaty [45]:
- określenie zagadnień historyczno - naukowych, jakie należy uwzględnić w programach szkolnych,
- rozdziały i fragmenty podręczników szkolnych różnych poziomów powinny byc opiniowane przez historyków nauki i techniki,
- nauczyciele przedmiotów obejmujących elementy historii nauki i techniki powinni być stopniowo dokształcani w tym zakresie,
- okręgowe ośrodki metodyczne powinny podjąć badania nad realizacją w szkołach obowiązującego programu nauczania w zakresie dotyczącym historii nauki i techniki.

Przejawem dużego zainteresowania historyków nauki nauczaniem reprezentowanej przez nich dyscypliny, było utworzenie — w ramach Międzynarodowej Unii Historii i Filozofii Nauki — specjalnej komisji zajmującej się tym zagadnieniem.

Komisja ta podczas zgromadzenia ogólnego w Moskwie w 1971 r. została zreorganizowana w taki sposób, aby działalnością swoją objąć mogła zarówno nauczanie historii nauki, jak i kształcenie przyszłych wykładowców tej dyscypliny. Na drugim Międzynarodowym Kongresie Nauczania Matematyki w Paryżu w 1972 r. pracowała „grupa robocza" zajmująca się związkami między historią i nauczaniem matematyki. Prace tej grupy kontynuowane były na kolejnym Kongresie w Karlsruhe w 1976 roku. Ogólny temat Kongresu brzmiał następująco: „Historia matematyki jako krytyczne narzędzie do sporządzania programu nauczania".

Na tym Kongresie został zatwierdzony związek pod nazwą Międzynarodowej Grupy do Badania Relacji Między Historią i Dydaktyką Matematyki. Informacje o pracach tej Grupy są publikowane systematycznie w kwartalniku międzynarodowym, ukazującym się od 1974 r. w USA „Historia Mathematica". Szczególnie aktywnym w pracach tej grupy jest R. J. K. Stowasser - przeodniczący. W redagowanym przez siebie czasopiśmie „Mathematiklehrer" ukazującym się od 1980 r. w Niemczech, publikuje materiały, które mogą być wykorzystane w pracy szkolnej. Są tu m. in. propozycje ujęcia pewnych zagadnień programu matematyki uwzględniając drogę ich historycznego rozwoju. Stowasser penetruje historię matematyki i wydobywa te fragmenty, które są atrakcyjne dla ucznia, niezbyt trudne, aby nie zniechęcać ucznia, oraz odpowiednio trafnie wytyczające ideę omawianego fragmentu wiedzy.

W Rosji elementy historii matematyki zajmują ważne miejsce w procesie kształcenia matematycznego [23]. Tam też w latach osiemdziesiątych ukazały się książki poświęcone historii matematyki w szkole dziesięcioletniej [16]. Celem tych podręczników jest dostarczenie konkretnej pomocy nauczycielom określonego materiału. Do każdego tematu programu szkolnego dane są krótkie pogadanki, które proponuje się prowadzić na lekcjach matematyki mimochodem. średnio na każde sześć lekcji przypada jedna pogadanka. W rozdziałach przeznaczonych dla kółka matematycznego znajduje się materiał historyczny dopełniający wiadomości przekazywane na lekcjach.

Program polskiej szkoły również zobowiązuje nauczyciela do przekazywania uczniom w procesie nauczania wiadomości z historii matematyki i zapoznania ich z życiorysem i działalnością wybitnych matematyków [51, 52]. Nie ma jednak w programie konkretnych wskazań na to, jakie wiadomości z historii matematyki należy przekazywać uczniom, w których klasach w jakiej objętości i w jakich działach matematyki szkolnej.

Z przedstawionych danych historycznych wynika różnorodność podejścia do kwestii historii matematyki w szkole i ważność tego zagadnienia dla kształcenia matematycznego. Z pewnością nie stanie się ona oddzielnym przedmiotem nauczania, jak również nie powinna być metodą i środkiem do opanowania pewnego zakresu matematyki, ale powinna tworzyć obraz matematyki jako nauki żywej i rozwijającej się, dawać możliwość przewidywania jej przyszłości.

2. Formy wprowadzania historii matematyki do nauczania szkolnego

Nie wydaje się rzeczą możliwą ustalenie jakichś stałych form i reguł postępowania przy wprowadzaniu historii matematyki do nauczania szkolnego [33], [34], [35], [37], [43], [46], [67], [68], [69]. Zależy to wyłącznie od inicjatywy nauczyciela i od znajomości przez niego historii matematyki. W jednym przypadku uwzględni on wyłącznie chronologię pojawienia się pewnych osiągnięć i dużo uwagi poświęci ich autorom, m. in. życiorysom, w drugim będzie chodziło o ukazanie jak poprzez badania poszczególnych uczonych narastała wiedza matematyczna. W pracy szkolnej obie te formy będą miały miejsce. W pierwszych latach nauki najlepiej jest stosować pierwszą formę, a dalszych latach — drugą formę, gdyż obie przyczyniają się do rozwoju umysłowego uczniów. Zaznajamianie uczniów z historią matematyki oznacza przemyślane, planowe wykorzystanie na lekcjach faktów z historii nauki i ich ścisłe powiązanie z systematycznym przekazywaniem materiału programowego. Gwarancja sukcesu leży w umiejętnym wykorzystaniu elementów historii matematyki w taki sposób, aby organicznie zlewały się one z wykładanym faktycznym materiałem. Z elementami historycznymi powinno się najpierw zapoznać uczniów na lekcjach matematyki, a dopiero w drugiej kolejności na zajęciach pozalekcyjnych. Jeśli zacząć taką pracę od klasy czwartej szkoły podstawowej i prowadzić ją systematycznie do klasy ósmej, a następnie w szkole średniej, to „element historyczny" z czasem stanie się dla samych uczniów konieczną częścią lekcji. W ten sposób elementy historyczne mogą się przyczyniać do zwiększenia motywacji w uczeniu się matematyki, a tym samym do zwiększenia skuteczności nauczania.

Chodzi o znalezienie takich form wprowadzania historii matematyki na lekcjach, które aktywizowałyby matematycznie wszystkich uczniów. Wśród wielu form, które można wykorzystać przy przekazywaniu treści historycznych na lekcjach i zajęciach pozalekcyjnych z matematyki, można wymienić następujące:

— „pogadanka", to umowny termin na lekcji, który oznacza podanie pewnego faktu z historii matematyki w formie opowiadania nauczyciela, rozpatrzenie i objaśnienie rysunku, krótką uwagę, rozwiązanie interesującego zadania itp.,

— referaty przygotowane przez uczniów na określone tematy,

— studiowanie i czytanie ciekawych artykułów z prac matematycznych i historycznych,

— studiowanie oryginalnej literatury historycznej z próbą zapisu w obecnej symbolice matematycznej,

— gry i zabawy matematyczno - historyczne,

— dyktando matematyczne i opis konstrukcji,

— rozwiązywanie zadań konkursowych i historycznych,

— wykonywanie samodzielnie prac na podstawie literatury z historii matematyki.

— studiowanie i oglądanie audycji radiowych i telewizyjnych oraz filmów z kaset magnetowidowych związanych z matematyką i historią,
— spotkania z wybitnymi nauczycielami i matematykami,
— różne formy aktywizacji na lekcjach matematyki, np. drama - zabawy tematyczne,
— symulacja odkryć matematycznych, od starożytności do czasów najnowszych,
— wieczornica związana z historią matematyki, pierwsza część teoretyczna a druga część w formie zabawy, np. dyskoteka,
— dodatkowe lekcje poświęcone historii matematyki,
— wycieczki historyczne, częściowo związane z matematyką,
— koło matematyczne prowadzone przez nauczyciela historii i matematyki,
— gazetka matematyczna szkolna i klasowa z ciekawymi opracowaniami,
— szkolne zawody, teleturnieje matematyczno - historyczne,
konkursy dotyczące działalności ludzi związanych z matematyką np. Leonardo da Vinci,
— spotkania z wybitnymi znawcami kultury i historii,
— teatrzyk historyczno - matematyczny,
— inne formy, które wg nauczyciela pozwalają realizować historię matematyki.

Bardzo ważne jest wykorzystywanie popularno - naukowych seriali telewizyjnych, w których pojawiają się tematy związane z matematyką, architekturą, rozwojem cywilizacji, np.: Życie codzienne w starożytnym Egipcie; Dzień w którym zmienił się wszechświat; Sztuka świata zachodniego; Mistrz i uczeń dawniej i dziś; Artysta i jego świat; Przestrzenie i inne [35]. Program telewizyjny „Przestrzenie", emitowany 17.07.1993 r. (wywiad i wspomnienia bliskich współpracowników o Profesorze W. Orliczu), zrobił na jednej z nauczycielek tak duże wrażenie, że opisała swoje spostrzeżenia w „Matematyce" nr 4 z 1994 r., dając jako przykład, w jaki sposób można humanizować nauczanie matematyki. Niezwykle barwny jest dramatyczny życiorys Z. Krygowskiej, która miała w życiu dwie pasje: góry i matematykę [29].

Inny sposób włączania historii matematyki do procesu dydaktyczno - wychowawczego szkoły to drużyna harcerska o specjalności matematycznej. Drużyna taka w latach 70, prowadzona była w Zielonej Górze [67], [68].

W programie działalności drużyny było pogłębianie wiadomości matematycznych poprzez zabawę, praktykę terenową, zdobywanie sprawności specjalistycznych, konkursy, turnieje, wydawanie czasopisma itd. Drużyna składała się z pięciu zastępów, po 10 osób w każdym, gdzie jeden zastęp składał się z uczniów klasy czwartej, drugi — klasy piątej, trzeci — szóstej itd. Pozwalało to w sposób ciągły przez okres pięciu lat zaznajamiać uczniów z tajnikami matematyki, przy równoczesnym realizowaniu założeń programowych Związku Harcerstwa Polskiego.

Poszczególne zastępy mogły wybierać nazwy wielkich matematyków, jak: Eulerowcy, Kartezjusze, Kopernikanie, Pitagorejczycy, Talesowcy, Platończycy i inni.

Na terenie szkoły bardzo ważną funkcję spełnia gazetka matematyczna, która pełni rolę pośrednika w realizacji innych form pracy i ma duże walory popularyzatorskie historii matematyki poprzez zamieszczanie ciekawych zadań, łamigłówek, anegdot, rysunków i innych materiałów. Spełnia nie tylko funkcję informacyjną, ale również popularnonaukową, dydaktyczną i wychowawczą.

Wykorzystany czas na ogół 5 - 10 minut na przedstawienie wiadomości z historii matematyki nie należy uważać za stracony, jeśli tylko nauczyciel potrafi fakt historyczny podać w ścisłym związku z omawianym materiałem teoretycznym.

Elementy historyczne należy wprowadzać choćby po to, aby nie dominował na lekcji matematyki tylko przekaz słowny — wykład, czy ciągłe tłumaczenie ze strony nauczyciela jakiegoś problemu. Chodzi o zorganizowanie na lekcji tak nauczania, aby uczniowie mogli samodzielnie pracować, bo wtedy zwiększa się jej skuteczność.

Już krótki referat związany z lekcjami, na których omawia się Twierdzenie Pitagorasa [21] i Talesa [76], oparty na życiorysie oraz różne sposoby dowodu tych twierdzeń mogą zachęcić uczniów do poszukiwań twórczych dla przekazania sensownego stosowania matematyki. Uczniowie powinni widzieć sens nauczania matematyki jako nauki użytecznej, a nie tylko jako rozwiązywanie, często „nudnych" zadań szkolnych. To wszystko powinien wyjaśnić i pokazać w rozwoju historycznym nauczyciel matematyki.

3. Realizacja historii matematyki w programie szkolnym

Przedstawimy pewne wybrane hasła programowe realizacji historii matematyki w poszczególnych klasach szkoły podstawowej (kl. IV - VIII) i w szkole średniej [51], [52]. Zakłada się, że materiał historyczny wystąpi w danej klasie na 10 - 15 % lekcjach matematyki, poświęconych zarówno zagadnieniom teoretycznym, jak i praktycznym. Fakty historyczne mogą zajmowac około 5 - 10 minut danej lekcji i powinny być omawiane z materiałem teoretycznym w postaci pogadanki, rozwiązania zadania, objaśnienia rysunku itd. Materiał historyczny powinien być włączany do treści programowych i skorelowany z programem nauczania danej klasy. Wiadomości historyczne w większym stopniu będzie można realizować w szkole podstawowej niż w szkołach średnich, ponieważ szkoły średnie ogólnokształcące i zawodowe, ze względu na duże zróżnicowanie profili (różnej liczby godzin realizacji lekcji matematyki) mogą w zależności od potrzeb poświęcić historii matematyki maksymalną liczbę godzin w klasach matematycznych, a minimalną — w humanistycznych i szkołach zasadniczych.

Podamy pewne propozycje realizacji treści z historii matematyki w szkołach (bez podawania profilu i typu szkoły). Dokładniej zajmiemy się realizacją treści historycznych w klasach IV - VIII szkoły podstawowej. Klasy te bowiem spełniają bardzo ważną rolę w krystalizowaniu się u uczniów zainteresowania przedmiotem, które w konsekwencji przeradza się w trwałe zainteresowanie matematyką. Z pewnością w rozwoju tych zainteresowań dużą rolę mogą odegrać elementy historii matematyki właściwie wykorzystane na lekcjach matematyki.

Przedstawimy pewne przykładowe zagadnienia z historii matematyki, które można realizować w poszczególnych klasach szkoły podstawowej i tak:

w klasie IV:
a) znaki cyfrowe różnych narodów [22], [36],
b) liczby naturalne w historii matematyki [13], [25], [31],
c) systemy liczenia — rzymski i arabski [21], [31],
d) odkrycie zera [18], [22],
e) sito Eratostenesa do wyznaczania liczb pierwszych [21],

w klasie V:
a) algorytm Euklidesa do wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwu liczb [21],
b) z historii ułamków zwykłych [13], [18],
c) z historii ułamków dziesiętnych [8],
d) liczby ujemne i dodatnie [3], [18], [21],
e) matematyka hinduska i babilońska [24], [53], [61],

w klasie VI:
a) odkrycie liczb niewymiernych [4], [14], [55],
b) liczba π, długość okręgu [44], [66],
c) twierdzenie Pitagorasa [22],
d) z historii konstrukcji geometrycznych [7], [62],
e) zadania staropolskie i piramidy egipskie [20], [54], [77],

w klasie VII:
a) twierdzenie Talesa [20], [21],
b) symbolika literowa Kartezjusza [2], [23],
c) Diofantes i rozwiązywanie równań [21], [28],
d) sposoby konstrukcji wielokątów foremnych [22],
e) podział odcinka na pewną liczbę części [72],

w klasie VIII:
a) znaki działań, w tym potęgowanie i pierwiastkowanie [2],
b) o polskim języku matematycznym [64], [70],
c) z historii funkcji, szczególnie trygonometrycznych [2], [23].

d) z historii techniki obliczeniowej [49],
e) konstrukcje za pomocą cyrkla i linijki [7], [20], [21].

W szkole średniej proponuje się rozpatrzyć następujące tematy:

w klasie I:
— różne aksjomatyki, w tym liczb rzeczywistych [42], [50],
— dowody twierdzenia Talesa [10], [21], [76],
— „Elementy" Euklidesa [26], [47],
— z historii rozcinania prostokątów i kwadratów na różne kwadraty [48],
— Stefan Banach, wybitny polski matematyk [30], [39], [75],

w klasie II:
— różne dowody twierdzenia Pitagorasa [20], [22],
— równania kwadratowe w babilońskich tekstach klinowych [6], [73],
— o narodzinach dowodu w matematyce [5],
— polska szkoła matematyczna [19], [32],
— ciągi liczbowe i K. F. Gauss [23], [28],

w klasie III:
— granica funkcji, ciągłość, pochodna i przeszkody epistomologiczne [23], [58],
— historia wzoru Eulera dla wielościanów [17], [59],
— J. Śniadecki — twórca polskiego słownictwa matematycznego [63],
— zagadnienie czterech barw [12],
— z historii logarytmów [41],

w klasie IV:
— z historii rachunku prawdopodobieństwa [23], [40],
— sławne problemy teorii liczb [38],
— M. Łobaczewski — twórca geometrii nieeuklidesowej [1], [15], [56],
— klasyczne konstrukcje platońskie i ich nieklasyczne rozwiązanie [35], [60],
— z historii rachunku całkowego [23].

Przedstawiliśmy tylko orientacyjny podział tematów teoretycznych do wykorzystania w poszczególnych klasach. Znacznie więcej czasu będzie zajmować rozwiązywanie ciekawych zadań babilońskich, egipskich i innych.

Nauczyciel, aby być twórcą procesu dydaktycznego, a nie tylko odtwórcą, powinien rozpoczynać od małej liczby tematów z historii matematyki i co roku sukcesywnie zwiększać ich liczbę. Niektóre tematy będą się powtarzać, wtedy można materiał poszerzać w zależności od przygotowania matematycznego uczniów. Na przykład algorytm Euklidesa występuje w klasie IV, V, a nawet w wyższych klasach, a twierdzenia Talesa i Pitagorasa w szkole podstawowej i średniej. Nauczyciel w zależności od możliwości poznawczych uczniów danej klasy powinien dobierać tematykę historyczną do tresci matematycznych tak, aby uczniowie osiągali satysfakcję w pracy z materiałem historycznym oraz uzyskiwali większe rezultaty w uczeniu się matematyki. W szkole średniej dla uczniów zainteresowanych treści historyczne można przekazywać w formie poszerzonej, do samodzielnego wykonania w postaci referatu, czy rozwiązania zadań itd.

Nauczyciel powinien widzieć potrzebę włączania wiadomości historycznych do nauczania szkolnego, wtedy problemy te będą jego i uczniów. Wprowadzanie historii matematyki na lekcje nie jest stratą czasu, lecz ważnym sposobem aktywizacji uczniów.

W szkole średniej można zaproponować uczniom samodzielne przygotowanie treści historycznych oraz przedstawienie ich na zajęciach z całą klasą, prowadząc zajęcia lub będąc asystentami nauczyciela. W szkołach dla pracujących, aby zainteresować przedmiotem, również można starać się wprowadzać pewne treści historyczne.

Na pewnych przykładach pokażemy, jak można w szkole, szczególnie w klasach IV - VIII, wykorzystywać elementy historii matematyki w nauczaniu i uczeniu się matematyki. Już w klasie czwartej, gdy zapoznajemy uczniów z rzymskim systemem liczenia, można pokazać, jakie były i są inne systemy liczenia. Zwracamy uczniom uwagę na niedogodność rzymskiego systemu liczenia (addytywnego), bo tu każdy pojedyńczy znak I, II, III, IV, V, X, XX, L, C, D, N, ... ma swą wartość, a wartość układu znaków jest równa sumie poszczególnych znaków. Tu wskazujemy uczniom, że wielkim osiągnięciem było powstanie systemu arabskiego, który powstał w Indiach w VII - IX wieku, a rozpowszechniony został w Europie przez Arabów w X - XIII wieku. Jest to system pozycyjny, tzn. wartość znaku zależy od miejsca, w którym jest napisany. Najbardziej jest nam znany używany obecnie system dziesiątkowy, w którym do zapisywania liczb służy dziesięć cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kolejno można omówić jak powstały cyfry, a szczególnie należy zwrócić uwagę na odkrycie zera.

Dużą rolę przypisywano liczbie 5, 10, 20 to znaczy, liczbie palców jednej ręki, dwu, łącznie wszystkich palców na rękach i nogach.

Pitagorejczycy bardzo duże znaczenie przypisywali liczbie „7" — tydzień ma siedem dni, świat powstał w siedem dni itd. Można zainteresowanych uczniów zapoznać z innymi układami liczenia, jak: dwójkowym, trójkowym, piątkowym itd. Tu zwracamy uwagę uczniom, że odkrycie zera i traktowanie go jako liczby, było wielkim osiągnięciem w matematyce. Bowiem kiedyś „zero" traktowano na oznaczenie „nic", a więc wyrażenie 5+„nic" nie miało sensu, natomiast wyrażenie 5+0 ma sens, bo jest to liczba 5. Aby zwrócić uwagę uczniom na pojęcie cyfry i liczby można rozwiązać następujące zadanie:

Ile różnych cyfr użyto do ponumerowania książki liczącej 361 stron?

Omawiając liczby pierwsze i złożone można kilka zdań poświęcić greckiemu matematykowi Eratostenesowi (II w. p. n. e.), który wynalazł metodę wyznaczania liczb pierwszych, zwaną „sitem Eratostenesa". Eratostenes jak gdyby „przesiewał" liczby w określony sposób, tak aby w „sicie" pozostawały tylko liczby pierwsze. Możemy polecić uczniom wypisanie kolejno wszystkich liczb naturalnych, poczynając od 2 do 100. Następnie należy skreślić wszystkie liczby parzyste większe od 2, a potem skreślając wszystkie liczby podzielne przez 3, ale większe od 3, z pozostałych wykreślić liczby podzielne przez 5 (ale bez 5) itd. Po zakończeniu skreśleń pozostaną tylko liczby pierwsze (podzielne przez 1 i przez samą siebie), 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... itd. Uczniom szczególnie zainteresowanym możemy polecić ciekawostki o liczbach pierwszych z literatury [65]. Na przykład liczba

$$11111111111111111111111$$

(jedynka powtórzona 23 razy) jest pierwsza. Sprawdzić to nie jest łatwo, znacznie prościej wykazać, że jeśli liczba, której wszystkie cyfry są jedynkami jest pierwsza, to liczba jej cyfr musi być liczbą pierwszą. Jednak warunek ten nie jest wystarczający, ponieważ liczby 111, 11111, 1111111 są złożone. Można wspomnieć również o W. Sierpińskim i o liczbie pierwszej o 969 cyfrach [Matematyka nr 2(52), (1958)]. Interesujące jest również zadanie, które polecamy uczniom:

Znajdź liczbę wiedząc, że po pomnożeniu jej przez samą siebie, dodaniu 2, podwojeniu otrzymanego wyniku, zwiększeniu o 3 uzyskanej liczby oraz po podzieleniu przez 5 i pomnożeniu przez 10 otrzymamy liczbę 50.

(Beha ad - Din al - Almuli 1547 - 1622, matematyk irański)

Odpowiedź: liczba 3.

Realizując w klasie czwartej i piątej podzielność liczb naturalnych podajemy uczniom algorytm Euklidesa do wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwu liczb a i b.

Algorytm — to układ (schemat) działań formalnych, za pomocą których można rozwiązać wszystkie zadania tego samego typu. Euklides — grecki matematyk (330 - 275 p. n. e.) — wprowadził sposób postępowania, którego celem jest znajdowanie wspólnego dzielnika dwóch liczb całkowitych, jak też wspólnej miary dwóch odcinków. Oto przykład algorytmu obliczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb 345 i 128.

$$\frac{2}{345}, \frac{1}{128}, \frac{2}{89}, \frac{3}{39}, \frac{1}{11}, \frac{1}{6}, \frac{5}{5}, 1$$

$$\frac{256}{89}, \frac{89}{39}, \frac{78}{11}, \frac{33}{6}, \frac{6}{5}, \frac{5}{1}, \frac{5}{0}$$

Kolejność algorytmu jest następująca: większą liczbę (3450 dzielimy przez mniejszą (128), następnie dzielnik (128) dzielimy przez pierwszą resztę (89) i tak kolejno pierwszą resztę dzielimy przez drugą, drugą resztę przez trzecią i tak do końca, aż otrzymamy resztę równą zeru. Przedostatnia reszta 1 jest szukanym największym wspólnym dzielnikiem dwu liczb

$NWD(345, 128) = 1$. Algorytm obliczania NWD dwu liczb mogą uczniowie przedstawić w postaci schematu blokowego.

W historii rozwoju ułamków zwykłych wystąpiły trzy stopnie rozwoju tego pojęcia:
— symbol ułamka oznaczał część pewnej obranej jednostki — symbol  u Babilończyków oznaczał połowę objętości określonego naczynia,
— przenoszenie symbolu ułamka z jednej wielkości na drugą, co zauważa się u Egipcjan i Rzymian,
— przejście od ułamków mianowanych do niemianowanych, czyli jak mówimy w matematyce — abstrakcyjnych, np. $1/4 + 2/3 = 11/12$ nie przypisujemy tym znakom liczbowym żadnego miana.

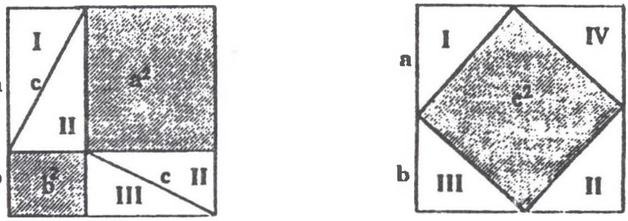
Dopiero pod koniec XVIII wieku ułamki zaczęto traktować jako liczby. Duży wkład w rozwój ułamków wniósł L. Euler. Upłynęło wiele lat zanim zaczęto używać ułamków dziesiętnych [8]. Pierwszy zapis ułamka dziesiętnego bez przecinka użył Al - kaszi w 1427 r. w dziele „Klucz do arytmetyki". W ciągu XVIII stulecia kropka i przecinek wyrugowały kolejno inne znaki dla oddzielenia części całkowitej od ułamkowej.

W klasie piątej wprowadzając liczby ujemne można wspomnieć o historii liczb ujemnych, jako jednym z ciekawszych rozdziałów myśli matematycznej. Matematycy świata antycznego nie zajmowali się liczbami ujemnymi.

Grecy za liczby uważali tylko liczby naturalne. Dopiero Diofantos z Aleksandrii (druga połowa III i początek IV wieku p. n. e.) rozróżniał liczby „dodawane" i „odejmowane". Używał do zaznaczenia liczb odejmowanych znaku odejmowania,  którym była u niego odwrócona litera psi. Diofantos również pierwszy wśród matematyków greckich potraktował ułamki na równi z innymi liczbami. Liczby ujemne bardzo powoli wchodziły do uzytku. Nowoczesne ujęcie arytmetyki liczb ujemnych przyniósł dopiero wiek XIX. Tu można postawić następujące zadanie do rozwiązania.

> *Na kamieniu grobowym wielkiego matematyka greckiego Diofantosa widniał ułożony przez Eutropiusza napis tej treści:*
>
> *Przechodniu: Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa, który zmarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego długiego życia był dzieckiem, a dwunastą młodzieńcem. Następnie siódmą część życia poszukiwał żony. W pięć lat po pojęciu małżonki urodził się syn, który żył do wieku dwakroć mniejszego od lat ojca. W cztery lata po śmierci syna zasnął snem wiecznym Diofantos. Powiedz, jeśli umiesz obliczyć, w jakim umarł wieku?*

O Pitagorasie (570 - 496 p. n. e.) i jego uczniach tworzących szkołę matematyczną można powiedzieć przy nauce o liczbach niewymiernych w klasie szóstej, które odkryto w szkole pitagorejskiej, gdy stosowano twierdzenie Pitagorasa. Okazało się, że istnieją związki geometryczne, np. stosunek przekątnej kwadratu do jego boku, których nie można



Rys. 1

wyrazić jak dotąd żadną liczbą. Nie ulega wątpliwości, że najwięcej okazji przedstawiania historii matematyki w nauczaniu stwarza twierdzenie Pitagorasa w klasie szóstej. Uczniowie sami w związku z tym tematem mogą poznać wiadomości historyczne drukowane w różnych książkach. Zestawienie różnych dowodów tego twierdzenia w książce Sz. Jeleńskiego „Śladami Pitagorasa" stanowi piękny przykład wykorzystania historii matematyki do nauczania. Wszystkie dowody opierają się wyłącznie na równoważności figur. Polecamy uczniom, aby korzystając z dwu rysunków przedstawili sposób rozumowania, jaki przeprowadził Pitagoras (rys. 1)

Rozumowanie uczniów:

Budujemy kwadrat, którego bok równa się sumie przyprostokątnych a i b danego trójkąta prostokątnego. Kwadrat ten dzielimy na dwa kwadraty a^2 i b^2 oraz dwa równe prostokąty o bokach a i b, których przekątna wynosi c. Otrzymaliśmy cztery równe trójkąty prostokątne I, II, III, IV. Układając na drugim kwadracie o boku równym sumie a i b kolejne trójkąty otrzymamy pośrodku kwadrat o boku c^2. Stąd wniosek, że kwadrat o boku $a + b$, pomniejszony o $2bc$, daje w pierwszym przypadku $a^2 + b^2$, a w drugim c^2, a więc $a^2 + b^2 = c^2$.

W tym miejscu jest doskonała sposobność poświęcenia uwagi trójkątom pitagorejskim, to znaczy takim, których boki wyrażone są liczbami naturalnymi a, b, c, związanymi warunkiem $a^2 + b^2 = c^2$. Będą to trójkąty prostokątne. Pierwszy to trójkąt egipski o bokach $3, 4, 5$, drugi to trójkąt babiloński o bokach $5, 12, 13$.

Pitagorejczycy zajmując się i bawiąc liczbami nie przypuszczali, że twierdzenie Pitagorasa stanie się przyczyną niewypowiedzianych „nieszczęść" późniejszych generacji matematyków. Rozważając trójkąt prostokątny o ramionach równych jednostce długości nie potrafił wyrazić długości przeciwprostokątnej w zależności od boku. Związek otrzymany $1 + 1 = 2$ nie jest liczbą kwadratową. Udowodniono też, że $\sqrt{2}$ nie może być równy ułamkowi. Cała filozofia przyrody oparta na sprowadzaniu każdego zjawiska do liczb całkowitych została zagrożona. Nową wielkość nazwali niewymierną, to znaczy taką, której nie można sobie wyobrazić ani wymierzyć. „Legenda mówi, że odkrycie liczby $\sqrt{2}$ miało miejsce na okręcie w czasie podróży po morzu. Odkrywcę wyrzucono za burtę, a cała załoga zobowiązała się do utrzymania w tajemnicy odkrycia". W kwadracie o boku równym jeden znajduje się odcinek — jego przekątna, któremu nie odpowiada żadna liczba.

Po określeniu liczb niewymiernych podajemy przykłady, wśród nich liczbę $\pi = 3,1415\ldots$. Liczba π związana jest z problemem kwadratury koła (zbudowanie kwadratu o polu równym polu koła), który przez ponad 2 tysiące lat był jednym z największych problemów matematyki. Stosunek obwodu koła do średnicy jest liczbą stałą i oznacza się ją grecką literą π, od pierwszej litery greckiego słowa „peryferia" — okrąg. Liczbę π nazywa się też liczbą Archimedesa lub ludolfiną. Symbol π po raz pierwszy został użyty w 1706 roku przez matematyka angielskiego W. Jonesa i spopularyzowany w połowie XVII wieku przez L. Eulera. Jest liczba niewymierną i przestępną. Babilończycy około 2000 roku p.n.e. szacowali π jako równe 3, Egipcjanie $\pi = (16/9)^2$, natomiast Archimedes w III wieku p.n.e. ustalił π jako równe w przybliżeniu 22/7.

Wśród polskich uczonych problemem kwadratury koła zajmował się matematyk A. Kochański (1631 - 1700). Liczba π weszła również do języka potocznego („pi razy oko") oraz występuje w wierszach i powieściach. W dawnych latach modne było układanie wierszykowych powiedzeń, w których liczby liter w kolejnych słowach są odpowiednikami kolejnych cyfr rozwinięcia π. Uczniowie na lekcji sami mogą próbować układać takie wierszyki.

Oto wiersz o liczbie π ułożony w czasie zmagań sportowych na Mundialu w Argentynie, opublikowany w miesięczniku DELTA (1978, nr 6):

„Już i Lato i Deyna 31415
strzelili do bramki obcej 9265
dwa karne 35
Lubański dostrzegł mistrza Szarmacha 8979
gdy on tak wypuścił cios szacha 323846
że zdobyć musi cel gry 26433
Krzyknął gol na Mundial Argentyna 83279
Zatem $\pi = 3,14159265358979323846264338327950\ldots$"

Oto bardziej znany wiersz K. Cwojdzińskiego o liczbie π:

„Kuć i orać w dzień zawzięcie,
bo plonów nie ma bez trudu
złocisty szczęścia okręcie
kołyszesz...
kuć. My nie czekamy cudu
robota to potęga ludu"

Warto również próbować rozwiązać zadania staropolskie wydane w 1760 r. w książce „Rachmistrz polski" typu [77]:

Zadanie 1:

W pewnym młynie znayduią się 2 kamieni, gdzie jeden miele przez godzinę iedną, miarek 5, drugi kamień miele przez godzine iedną, miarek 7, przyniósł jeden miarek 30. Chcąc żeby mu Mielnik wraz na obedwa kamienie zasypał, ale tak proporcjonalnie żeby się wraz y mymełło. Quae wiele na każdy wsypać kamień?

Zadanie 2:

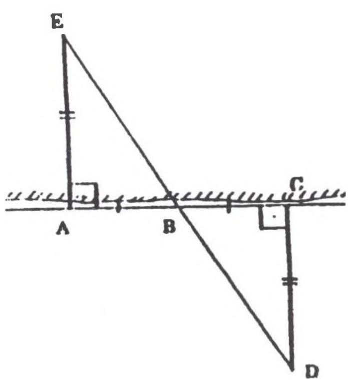
Z pewnego Woyska zgineło czwarta część od szabli, a dwa piatey części od ognia a uciekło ich 14 tysięcy, Quaer, wiele ten Regimen miel w sobie?

Zadanie 3:

Kawaler płaci zł. 3. Dama zł. 2. Pacholik 1/2 zł. Było wszystkich osób Nyo 20, a tez dali zł. 20. Quaer. Wiele ich każdych z osobna było?

W klasie siódmej uczeń zapoznaje się z twierdzeniem Talesa. W książkach popularnonaukowych, jak Sz. Jeleńskiego „Lilavati" oraz artykułach podanych w bibliografii można spotkać wiele ciekawych opracowań, dotyczących tego twierdzenia i jego zastosowań.

Można również z uczniami wybrać się na wycieczkę w teren i zmierzyć wysokość drzewa, czy szerokość rzeki tak, jak wykonał to Tales z Miletu (ok. 620 - 540 p.n.e.). Dokonał on również pomiaru odległości okrętu od brzegu, prowadząc na piasku linie, które przedstawia rys. 2. Stwierdził on, że długość odcinka AE jest równa szukanej odległości CD. Polecamy uczniom uzasadnić poprawność rozumowania.



Rys. 2

Rozwiązanie: Wnioskując z danych na rysunku (rys. 2) trójkąty BAE i BCD są przystające. Wtedy zachodzi proporcja:

$$\frac{AE}{CD}=\frac{AB}{BC}=1, \text{ stąd } AE=CD.$$

Z twierdzenia Talesa korzystano z kolei między innymi mierząc wysokość piramidy:

Niech x oznacza wysokość piramidy, a - długość cienia piramidy, 1 - słupek jednostkowy, b - cień jaki rzuca słupek jednostkowy, wtedy mamy

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{b}, \text{ stąd } x=\frac{a}{b}.$$

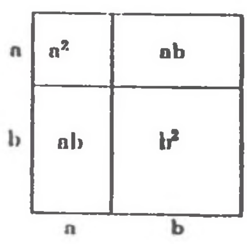
Należy polecić zmierzenie wysokości drzewa, komina fabrycznego itp.

Grecka algebra geometryczna może oddać duże usługi uczniom, gdy opracowujemy wzory skróconego mnożenia. Budując bok kwadratu składającego się z sumy dwóch odcinków $a+b$, otrzymujemy pola, które wyznaczają znany nam wzór na kwadrat sumy dwu wyrażeń:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \ (Rys.3)$$

Uczniom należy uwypuklić ogromne udogodnienia, jakie daje sprecyzowana na przełomie XVI i XVII wieku symbolika algebraiczna, bowiem do tego czasu posługiwano się tylko słownymi sformułowaniami. O Kartezjuszu mamy możliwość opowiedzieć, gdy przerabiamy układ współrzędnych prostokątnych, symbolikę literową danych a, b, c i niewiadomych x, y, z oraz zadania z geometrii w klasie ósmej.

Wiele ciekawych problemów jest zawartych przy rozwiązywaniu równań z jedną lub dwiema niewiadomymi. Oto jeden z nich:



Rys. 3

Pewnego razu Cypryda rzekła do Erosa, który wyglądał bardzo smutnie: Dlaczegoś taki zmartwiony, co ci jest synu? a Eros odrzekł: Schodziłem z Helikonu naładowany wyśmienitymi jabłkami. Muzy potrącając mnie, zabrały mi prawie wszystko. Klio wzięła mi piątą część tego com niósł, Euterpe — dwunastą, Talia — ósmą i Melpomena — dwudziestą. Terpsychora zabrała czwartą część, a Erato wzięła czwartą część dla siebie. Polichymnia porwała 50 jabłek, Urania wzięła 120 a Kaliope, upadając pod ciężarem, uciekła z 300 jabłkami. I oto ręce moje ulżone, gdyż boginie pozostawiły mi tylko 500 jabłek! Ile jabłek miał Eros?

Zadania tego typu wymagaja pewnych informacji z mitologii, które młodzież może łatwo uzyskać zaglądając choćby do encyklopedii. Życie starożytnych matematyków otoczone jest legendami. Postarajmy się odgadnąć, o kim mowa?

a) Zadziwił kapłanów egipskich tym, że zmierzył wysokość piramidy i obliczył odległość od brzegu płynących po morzu statków, posługując się tylko laską oraz zapowiedział zaćmienie słońca w 585 r. p. n. e. (Tales).

b) Urodził się na wyspie Samos, nauczał w tzw. „szkole Pitagorejskiej" (Pitagoras).

c) Obliczył sumę liczb od 1 do 100 szybciej od nauczyciela (Gauss).

Już pitagorejczycy zajmowali sie figurami foremnymi. Ich umiłowaną figurą był pentagram, zwany gwiazda pitagorejską. Jest to pięciokąt foremny, którego boki przedłużone w obie strony tworzą pięciokąt gwiaździsty. Pentagram przyjęli za swoje godło i łączyli je ze słowem hygea — zdrowie. Znakiem tym pozdrawiali się i wzajemnie rozpoznawali, kreśląc go na piasku. Oto zadanie związane z tym problemem:

Po narysowaniu w pięciokącie foremnym wszystkich przekątnych otrzymamy tzw. pięciokąt gwiaździsty. Oblicz sumę jego kątów „sterczących" (rys. 4).

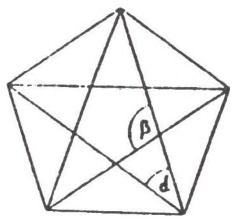
Jan Brożek (1585 - 1652)
— praca z roku 1638 pt. Obrona Arystotelesa i Eklidesa przeciwko Piotrowi Ramusowi i innym.

Odpowiedź:

$$\beta = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ, \quad \alpha = 180^\circ - 2(180^\circ - \beta) = 36^\circ, \quad 5\alpha = 180^\circ.$$

Omawiając zagadnienia geometryczne na pewnym etapie nauczania można szczegółowo zreferować istotę geometrii euklidesowej i wspomnieć o geometriach nieeuklidesowych oraz o piątym postulacie Euklidesa.

Geometria powstała z potrzeb człowieka, a duży wkład wnieśli Pitagoras, Hipokrates, Euklides, Tales i inni. Euklides (ok. 300r. p. n. e.) w swym dziele „Elementy" przedstawił podstawy geometrii elementarnej. „Elementy" składają się z 13 ksiąg, w których



Rys. 4

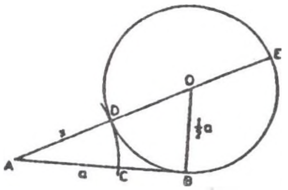
Euklides zawarł całą wiedzę nagromadzoną do tego czasu. Najważniejszym problemem dotyczącym aksjomatyki, począwszy od starożytności aż do połowy XIX wieku, była niezależność systemu Euklidesa, a w szczególności piątego postulatu, zwanego postulatem o równoległych. Mówi on, że przez dany punkt P, leżący poza prostą k, przechodzi co najwyżej jedna prosta równoległa do k. Przyjmując zamiast piątego postulatu zdanie „przez punkt nie leżący na prostej można poprowadzić dowolnie wiele prostych do niej równoległych" M. Łobaczewski w 1829 roku skonstruował jedną z geometrii nieeuklidesowych, która obecnie nazywa się geometrią Łobaczewskiego. Innymi matematykami, którzy stworzyli podstawy geometrii nieeuklidesowych, byli: F. Gauss, J. Bolyai i B. Riemann. Idee Riemanna zapoczątkowały wielkie dwudziestowieczne teorie geometryczne, a mianowicie różniczkowych rozmaitości riemannowskich i bardziej od niej ogólną teorię przestrzeni topologicznej, jak również stały się bazą matematyczną dla stworzenia przez A. Einsteina ogólnej teorii względności.

W formie ciekawostki można podać wiadomości o „złotym podziale odcinka". Złotym podziałem odcinka o długości a nazywamy taki podział tego odcinka na dwie części o długościach x i $a - x$, że cały odcinek ma się do swej większej części jak większa do mniejszej. Stąd proporcja $a : x = x : (a - x)$. Odcinek o długości x nazywamy złotą częścią tego odcinka (rys. 5).

$$AB = a, \; BO = 1/2a \;\; AC = x \;\; AB : AC = Ac : CB \;\; a : x = x : (a - x).$$

Proporcja ta daje równanie kwadratowe $x^2 + ax - a^2 = 0$. Dodatnim pierwiastkiem tego równania jest $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. A więc długość większych części powstałych przy złotym podziale odcinka długości a jest równa $\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Liczbę niewymierną $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ oznaczać będziemy przez ω, co w przybliżeniu jest równe $0.61803398\ldots$.

Starożytni Grecy twierdzili, że prostokąt zbudowany na odcinkach, których długości mają się do siebie jak $1 : \omega$, wydaje się najładniejszy, najbardziej proporcjonalny. Zło-



Rys. 5

tym podziałem zachwycali się Grecy, którzy stosowali konsekwentnie tę zasadę w sztuce i architekturze. Długość architrawu Świątyni Ateny Partenos ma się do wysokości całego budynku jak 1 : 0, 62. Podobne proporcje ma znana Brama Brandenburska w Berlinie, wieża ratuszowa w Lipsku pozostaje do jego podstawy w złotym stosunku. Kształty złotego podziału mają flagi państwowe. Stronice zeszytu, pocztówki, korty tenisowe, stronice książki i czasopisma mają proporcje skalowane z myślą o tym, aby złoty kształt miała strona. Złotą proporcję odnajdujemy analizując rozmieszczenie odcinków w starogreckich heksometrach, w malarstwie i muzyce. Interesujące jest, że da się ją zauważyć i w ciele człowieka. Botanicy już dawno zauważyli, że regułom złotego stosunku podlega u wielu roślin położenie liści.

Istnieje również bardzo ciekawa zależność między średnią geometryczną liczb, średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną. Okazuje się, że średnia geometryczna jest złotą częścią pozostałych średnich i zawarta jest między dwoma pozostałymi

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Liczba ω i złoty podział pojawiają się w sposób dość zaskakujący w rachunku prawdopodobieństwa.

Do tej historycznej tematyki warto jeszcze włączyć temat rozwoju polskiego języka matematycznego [64]. Nie trzeba nikogo przekonywać, jak ważną rolę odgrywa ta problematyka w podnoszeniu kultury matematycznej uczniów oraz w ich zainteresowaniu rozwojem ojczystego języka. Dlatego też można uczniom na lekcji postawić problem typu: „Jak myślicie, czy łatwo byłoby wam porozumieć się z wszystkimi rówieśnikami w polskiej szkole na lekcji matematyki na przykład w 1538 roku?" Pytanie to na pewno rozbudzi wśród uczniów zaciekawienie, a szczególnie tak odlegle lata. Wtedy można uczniom opowiedzieć, że w tym właśnie roku ukazał się pierwszy podręcznik matematyki napisany w języku polskim: „Algorytmus to jest nauka Liczby Polską rzeczą", wydany przez księdza

Tomasza Klasa. Składa się z trzech części. Pierwsza o osobach liczebnych, druga o regule Detri, trzecia o rozmaitych rachunkach. Z tej książki dowiadujemy się, że dawniej liczono tak: iedność, dwoicza, troycza, cztyrzy, pięć, sześć, siedm, ośm, dziewięć, dziesiątek, że licho to liczba nieparzysta, cetno to liczba parzysta, kocient to iloraz, przydawanie to dodawanie, lomanie to ułamek. Niektóre nazwy pozostały już bez zmiany do dziś, np. liczba, mnożenie, dzielenie, odejmowanie. Można również podać tytuły innych podręczników matematyki napisanych przez Bernarda Wojewódkę, Stanisława Solskiego i przykłady spotykanego w nich nazewnictwa, np. kupo – forma ostrosłupowa – ostrosłup, własność przydatkowa – cosinus, linia grunt miara – sinus, linia spadająca – tangens, trzykąt kątotępy – trójkąt rozwartokątny, sześciokwadrat – sześcian, tryangul krzyżokąty – trójkąt prostokątny, sztuka urznięta cyrkułu – wycinek koła, czop – stożek, wał – walec.

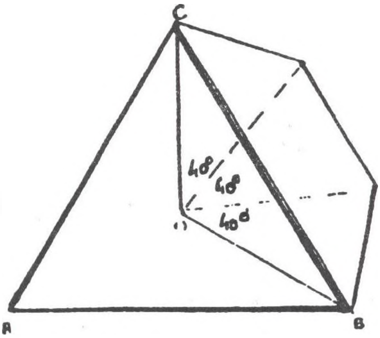
Bardzo ciekawy jest wierszyk o zerze opublikowany w „Matematyce" (1975, nr 5):

„Ostrożnie z zerem"
– zapamiętaj sobie - babcia mi mówiła,
Zero to potężna i przewrotna siła.
Niby takie skromne - moduł dodawania,
Ale bardzo wpływa na inne działania!
Zero jako czynnik: pomnóż ile chcesz -
wynik będzie zerem. Chyba o tym wiesz?
Jeśli go podzielisz przez dowolne „a"
(Ale nie przez zero!) Znowu zero masz.
Dzielić zaś przez zero - babcia zakazała -
nie ma ilorazu! Taka już zakała.
I dzielenie wcale nie jest określone,
gdy przez zero będzie zero podzielone.
(Uzasadnić łatwo, trzeba tylko chcieć
W ilorazie możesz każdą liczbę mieć.)
Zero do zerowej nie podnoś potęgi
Nic z tego nie będzie - tak nas uczą księgi.
– gdy do potęgi zero inną liczbę masz
Jednością jest wynik. Definicje znasz?
Zero silnia! Przedziwne i wprost nie do wiary
– Znowu jest jedynka. Zapamiętaj stary
A logarytm zera wcale nie istnieje,
(chyba wiesz dlaczego, cichą masz nadzieję).
Potęgując zero - masz zero w wyniku,
Pierwiastkując – również. Bez łez i bez krzyku!
A więc wniosek łatwo już wyciągnąć stąd
bądź ostrożny z zerem -
możesz zrobić błąd.

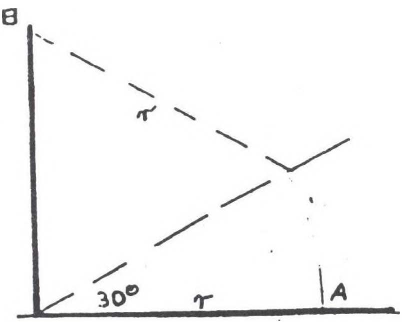
Warto również wspomnieć uczniom o konstrukcjach geometrycznych wykonywanych za pomocą cyrkla i linijki (bez podziałki), które nazywamy konstrukcjami platońskimi. Platończycy szukali rozwiązań konstrukcyjnych metodą klasyczną.

Między innymi rozwiązania te dotyczyły następujących problemów: trysekcji kąta, kubatury kuli, kwadratury koła, kwadratury sfery, podwojenia sześcianu, problemu Apoloniusza, rektyfikacji sześcianu, konstrukcji wielokątów foremnych. Poszukiwanie rozwiązań wymienionych problemów w zasadniczy sposób rozwinęło geometrie i mechanikę oraz spowodowało znalezienie wielu ciekawych rozwiązań metodami nieklasycznymi.

Krótko omówimy trysekcję dowolnego kąta. Pitagorejczykom do konstrukcji wielokątów foremnych potrzebny był podział dowolnego kąta na trzy równe części. Potrafili podzielic okrąg na 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15 równych części, natomiast nie potrafili dokonać podziału na 7, 9, 11, 13 równych części. Okrąg łatwo podzielić na trzy równe



Rys. 6



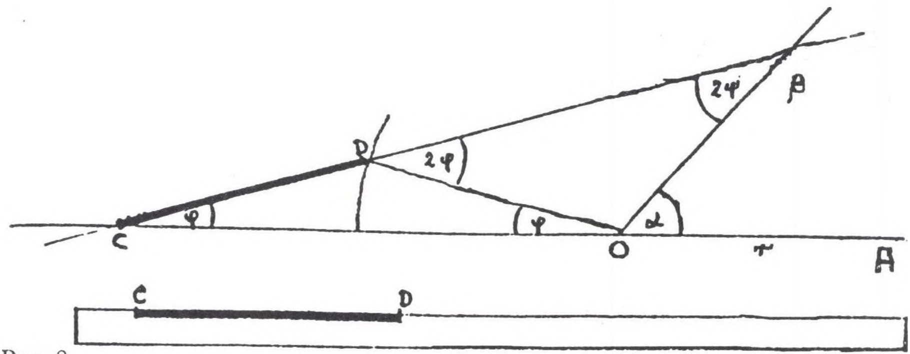
Rys. 7

części. Konstruujemy w tym celu trójkąt równoboczny i wpisujemy go w okrąg. Trudniej jest podzielić okrąg na 9 równych części. Należy w tym celu podzielić łuk odpowiadający kątowi 120^0 na trzy równe części, czyli dokonać trysekcji kąta 120^o (rys. 6).

Wydaje się to bardzo proste, ale przez około dwa tysiące lat najwybitniejsi matematycy nie potrafili tego dokonać. Okazało się, że trysekcja kąta klasycznymi środkami jest niemożliwa. Są kąty, dla których trysekcja jest możliwa, np. 90^o (rys. 7).

Z punktu B zataczamy rozwartością cyrkla równą promieniowi r łuk. Można udowodnić, że możliwa jest trysekcja każdego kąta, którego miara stopniowa jest podzielna przez 9 (dla kątów 9^o, 18^o, 27^o, ...). Można dokonać trysekcji kątów, które otrzymamy z poprzednich przez podział na 2^n równych części.

Są to szczególne przypadki, bo kątów, których nie potrafimy podzielić, pozostaje nieskończenie wiele, a wśród nich o mierze 10^o, 20^o, 30^o, 40^o, 50^o, 100^o, 120^o, ...



Rys. 8

Gdy nie można było przeprowadzić trysekcji kąta metodami klasycznymi, wprowadzono do podziału sposoby nieklasyczne. Do nieklasycznych metod można zaliczyć:

— Archimedesa trysekcję kąta,

— trysekcję kąta za pomocą kwadratury,

— konstrukcję Pappusa,

— konchoidę Nikomedesa,

— trysekcję kąta z wykorzystaniem łuku hiperboli.

Omówimy krótko nieklasyczną trysekcję kąta, zwaną „Archimedesową". Mamy podzielić dowolny kąt $\kappa AOB = \alpha$ na trzy równe części (rys. 8).

Z punktu O zataczamy dowolny półokrąg o promieniu r. Na linijce odkładamy odcinek o długości r i oznaczamy go przez CD. Oznaczając dwa punkty na linijce przestaje ona być linijką pierwszego rzędu — łamiemy zasadę konstrukcji klasycznej. Linijkę układamy tak, aby punkt C należał do prostej wyznaczonej przez punkty O i A, zaś punkt D należał do półokręgu, a linijka przechodziła równocześnie przez punkt B. Łatwo pokazać, że kąt κACB równa się 1/3 kąta κAOB. Niech kąt $\kappa ACB = \phi$, wtedy kąt $\kappa COD = \phi$, bo trójkąt ΔCOD jest równoramienny. Natomiast kąt $\kappa ODB = 2\phi$, jako kąt zewnętrzny równy sumie kątów wewnętrznych do niego przyległych. Trójkąt ΔODB jest również równoramienny, więc kąt $\kappa OBD = 2\phi$, kąt $\kappa AOB = \alpha$ jest kątem zewnętrznym trójkąta ΔCOB, więc równa się sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych, czyli $\alpha = \phi + 2\phi = 3\phi$. Stąd $\phi = 1/3\alpha$. Taki sposób rozumowania jest bardzo kształcący dla uczniów, gdyż rozumowanie dedukcyjne uczniów jest bardzo słabo rozwinięte. Rozważania geometryczne wpływają nie tylko na rozwój rozumowania uczniów, ale również kształcą ich wyobraźnię.

4. Wyniki badań eksperymentalnych w zakresie wykorzystania historii matematyki w nauczaniu szkolnym

W celu zbadania w jakim stopniu elementy historii wpływają na efekty dydaktyczne, przeprowadzono badania eksperymentalne. W roku szkolnym 1992/1993 w wybranych szkołach województwa zielonogórskiego w klasach IV - VIII przeprowadzono badania. Klasami eksperymentalnymi zostały wybrane te klasy, które osiągały niższe rezultaty nauczania z matematyki niż odpowiadające im klasy kontrolne. W obu równoległych klasach nauczał ten sam nauczyciel, a jedyną różnicą było stosowanie elementu historii matematyki w klasach eksperymentalnych. Treści historyczne w klasach były dostosowane do programowych, tzn. obejmowały około 10 - 15% lekcji, przy czym około 10 minut przypadało na jedną z nich. W klasach kontrolnych — konwencjonalnych — uczono tradycyjnie, nie stosując elementów historii matematyki.

Badany problem był następujący:

W jakim stopniu nauczanie historii matematyki wpływa na efekty dydaktyczne w zakresie wiedzy uczniów, jej trwałości i zainteresowań matematycznych ?"

Co można ująć graficznie:

Nauczanie matematyki z elementami historii matematyki (NMehm)		Efekty Dydaktyczne (Ed) w — wiedza uczniów t — trwałość wiedzy uczniów z — zainteresowania
zmienna niezależna globalna	→	**zmienna zależna globalna**

oraz za pomocą wzoru $Ed(w,t,z) = F(NMehm)$.

Hipoteza robocza na początku badań zakładała, że *efektywność dydaktyczna nauczania matematyki z elementami historii w klasach eksperymentalnych będzie wyższa niż w klasach kontrolnych.* Co można zapisać za pomocą nierówności:

$$EdNMehm(w,t,z) > EdNk(w,t,z)$$

EdNMehm — efektywność dydaktyczna nauczania matematyki z elementami historii matematyki,
EdNk — efektywność dydaktyczna nauczania konwencjonalnego.

Modeli lekcji matematyki może być wiele, w zależności od tego, jakie treści historyczne będziemy przekazywać i w jakiej formie. Sposoby przekazywania treści historycznych zostały tak ustalone, jak przedstawiono w poprzednim podrozdziale.

Przez wiedzę matematyczną rozumiemy ogół wiadomości i umiejętności powiązanych ze sobą w jedną całość. Trwałość wiedzy to pamiętanie jej po upływie określonego czasu. Zainteresowania matematyczne, to skłonność do zajmowania się matematyką w postaci czytania książek popularno - naukowych, rozwiązywania zadań matematycznych itp.

Przedstawimy dwa przykłady lekcji, na których realizowano elementy historii matematyki:

Klasa IV. Temat: Powtórzenie wiadomości o liczbach pierwszych, złożonych i cechach podzielności liczb

Cele:

— poznawczy: utrwalenie wiadomości o liczbach pierwszych, złożonych i cechach podzielności,

— kształcący: wdrażanie do posługiwania się uogólnieniami i terminologią matematyczną.

— wychowawczy: dostrzeganie prawdy w treściach matematycznych na podstawie historii liczb naturalnych oraz przyzwyczajanie do samokontroli.

Typ lekcji: powtórzeniowa.

Metoda nauczania: pogadanka, gry liczbowe.

Forma pracy uczniów: jednostkowa, binarna, grupowa, zbiorowa.

Środki dydaktyczne: kartki z napisami liczb od 0 do 28 (liczba uczniów w klasie - 29): każdy uczeń ma przypiętą do ubrania odpowiednią liczbę, przygotowane krótkie wiadomości o liczbach z historii matematyki.

Po sprawdzeniu pracy domowej i krótkim powtórzeniu następuje realizacja problematyki lekcyjnej w formie zabawy. Uczeń losuje z zestawu jedną liczbę i wychodzi z klasy. Po wejściu do klasy musi odgadnąć jaką liczbę wylosował. klasa może tylko odpowiedzieć „tak" lub „nie". Na podstawie odpowiedzi na pytania typu: czy jest to liczba dwucyfrowa. parzysta, podzielna przez 3 itd. uczeń musi odgadnąć, jaką liczbę wylosował i opowiedzieć coś ciekawego z historii o tej liczbie, a była to liczba „7". której pitagorejczycy przypisywali nadprzyrodzone właściwości. Uczniowie mając przyczepione numery do ubrań stają się liczbami. Nauczyciel stawia zadania dla uczniów. którzy mają wyciągnąć odpowiednie wnioski. Oto niektóre zadania:

— liczby staną w dwójkach, aby suma liczb była parzysta,

— liczby połączą się w trójki. aby ich suma była liczbą parzystą,

— liczby utworzą pary, aby suma ich była nieparzysta,

— liczby połączą się w pary grup, aby ich suma lub różnica była liczbą bliską 19,

liczby zbiorą się w trzech grupach:

grupa I — liczby, które dzielą się bez reszty przez 3,

grupa II — liczby, które dzielą się przez 3 z resztą 1,

grupa III — liczby. które dzielą się przez 3 z resztą 2.

Nauczyciel zadaje pytania, czy można łączyć liczby z danej grupy i między grupami. czy będą podzielne przez 3. Nauczyciel zadaje pytanie. jaką rolę odgrywa liczba zero.

czy chętnie była przyjmowana do gry. Uczeń reprezentujący liczbę „zero" odpowiada, że jest neutralna przy dodawaniu i tworzy parę z inną liczbą. Uczeń „będący liczbą zero" wypowiada kilka zdań o sobie, o rozwoju historycznym liczby zero i odczytuje specjalny wierszyk o tej liczbie. Nauczyciel proponuje, aby każda liczba przedstawiła się: np. jestem najmniejszą liczbą naturalną, jestem liczbą naturalną i podaje „sito Eratostenesa" wyznaczania liczb pierwszych, mam trzy dzielniki i podaje algorytm Euklidesa do wyznaczania NWD dwu liczb itd. Następuje podsumowanie lekcji i wyciągnięcie wniosków typu: suma dwu liczb parzystych i nieparzystych jest parzysta, suma liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 3 itd. W domu uczniowie mają zaproponować inną grę, w której będzie wykorzystana cecha podzielności przez 4 i 5 oraz przygotować wiadomości historyczne związane z cechami podzielności liczb.

Stosowana zabawa z zastosowaniem elementów historii matematyki uatrakcyjnia lekcję i przyczynia się do aktywizacji wszystkich uczniów.

W klasie szóstej duże możliwości wprowadzania elementów historii matematyki daje Twierdzenie Pitagorasa. Krótko omówimy jak przebiegała lekcja:

Temat: Twierdzenie Pitagorasa

Cele:

— poznawczy: zapoznanie z twierdzeniem Pitagorasa i jego zastosowaniami,

— kształcący: rozwijanie umiejętności obserwacji, analizowania i wnioskowania z tekstu matematycznego,

— wychowawczy: wdrażanie do pracy w grupie, rozwijanie zainteresowań matematycznych i szacunku dla matematyki na przykładzie Pitagorasa.

Typ lekcji: wprowadzająca nowy materiał.

Metoda nauczania: problemowa.

Formy pracy uczniów: indywidualna, grupowa, zbiorowa.

Środki dydaktyczne: model trójkąta z kwadratami zbudowanymi na jego bokach, odbitki opisów twierdzenia Pitagorasa z różnymi sposobami dowodów geometrycznych, książki i encyklopedie.

Po powtórzeniu wiadomości o trójkątach i zapisie tematu lekcji nauczyciel pokazuje duży plakat, na którym przedstawiony jest wizerunek Pitagorasa, przeprowadza pogadankę o jego życiu i działalności. Następnie rozdaje 6 grupom (po 5 uczniów w każdej grupie) następujące polecenia do wykonania:

— narysować trójkąt o bokach 5, 4, 3 cm,

— narysować kwadraty oparte na tych bokach,

— obliczyć pola otrzymanych kwadratów,

— wyprowadzić wnioski i zapisać w postaci wzoru $c^2 = a^2 + b^2$.

— grupa uczniów, która wykona polecenie w najkrótszym czasie, powinna w encyklopediach i słowniku matematycznym wyszukać wiadomości na temat twierdzenia Pitagorasa.

Po opracowaniu problemu następuje przedstawienie wniosku ogółowi klasy i porównanie go z treścią twierdzenia w podręczniku. Uczniowie podają ogółowi klasy wiadomości uzyskane z literatury o Pitagorasie i samym twierdzeniu. Każda grupa mając odbitki dowodów geometrycznych twierdzenia studiuje samodzielnie i stara się krótko zreferować przy tablicy. Następnie uczniowie wykonują ćwiczenia związane z twierdzeniem Pitagorasa, obliczajac w zadaniach przyprostokątne lub przeciwprostokątną. nastepuje ocena grup i poszczególnych uczniów oraz podsumowanie lekcji z podkreśleniem ważności rozwiązanego problemu (tw. Pitagorasa) dla matematyki i praktyki. Jako zadanie domowe z podręcznika, oprócz ćwiczeń na zastosowanie Tw. Pitagorasa, uczniowie mają za zadanie wyszukać z książek popularnonaukowych i encyklopedii wiadomości o trójkątach pitagorejskich, babilońskich, egipskich i innych.

Po zakończeniu eksperymentu w maju przeprowadzono badania końcowe, a w czerwcu dystansowe. Test do badań końcowych i dystansowych z matematyki w klasach IV - VIII składał się z zadań o maksymalnej liczbie 100 punktów. Zainteresowania badano za pomocą ankiety składającej się z 20 pytań. Ankietę stosowano dwukrotnie — raz w badaniach wstępnych (wrzesień 1992 r.) — w celu uchwycenia kategorii zainteresowań matematycznych uczniów, a drugi raz w badaniach końcowych (maj 1993 r.) — w celu zaobserwowania zmian, jakie wystąpiły pod wpływem zmiennej niezależnej elementów historii. Ankieta zawierała następujące kategorie zainteresowań przedmiotem matematyki: aktywny udział w lekcjach, aktywny udział w pracy domowej, czytelnictwo i przynależność do koła matematycznego. Badania końcowe wykazały, że w klasach eksperymentalnych wzrosła liczba uczniów, którzy chętnie uczyli sie matematyki, zwiększyła się aktywność uczniów na lekcji oraz w pracy domowej. Wzrosła również liczba przeczytanych książek popularnonaukowych oraz zwiększyła się liczba osób wstępujących do koła matematycznego. Ponadto zaznaczył się silny związek między wzrostem zainteresowań uczniów klas eksperymentalnych a wynikami nauczania, przy prawie niezmienionych zainteresowaniach uczniów klas kontrolnych. Jako przyczynę tej sytuacji wskazać trzeba fakt, że uczniowie pod wpływem historii matematyki zaczęli interesować się matematyką, przygotowywali krótkie referaty, redagowali gazetkę szkolną z ciekawymi artykułami historycznymi i zadaniami itd., „żyli" problematyką matematyczną.

Aby się przekonać o ile nauczanie matematyki z wykorzystaniem historii matematyki jest efektywniejsze od nauczania konwencjonalnego obliczono wskaźniki w zakresie wiedzy uczniów i jej trwałości. Wskaźnik wiedzy uczniów obliczono wg wzoru:

$$W = \frac{X_k^e - X_k^k}{X_{max}} \cdot 100\%,$$

gdzie:

X_k^e — średnia arytmetyczna klasy eksperymentalnej w badaniach końcowych,
X_k^k — średnia arytmetyczna klasy kontrolnej w badaniach końcowych.

Trwałość wiedzy obliczano wg wzoru:

$$W_t = \left(\frac{X_d^e : X_k^e}{X_d^k : X_k^k} \cdot 100 - 100\right)\%,$$

gdzie:

X_d^e, X_k^e — średnie arytmetyczne punktów zdobytych przez grupy eksperymentalne w badaniach dystansowych i końcowych,
X_d^k, X_k^k — średnie arytmetyczne punktów zdobytych przez grupy kontrolne w badaniach dystansowych i końcowych.

Im większe są przedstawione procentowe wskaźniki, tym większa jest efektywność nauczania z wykorzystaniem elementów historii matematyki w stosunku do nauczania konwencjonalnego.

Wyniki badań eksperymentalnych w zakresie przyrostu wiedzy i jej trwałości przedstawiono w tabeli.

Tabela I

Klasy oraz odpowiadające im wskaźniki procentowe w zakresie wiedzy uczniów i jej trwałości

Klasy	Klasy eksperymentalne			Klasy kontrolne			Wskaźniki w zakresie	
	N_1	średnie arytmetyczne		N_2	średnie arytmetyczne		W wiedzy	W_t trwałości
		końcowe X_k^e	dystansowe X_d^e		końcowe X_k^k	dystansowe X_d^k		
IV	29	86	75	30	68	52	20	14
V	30	80	70	28	65	52	15	9
VI	30	77	67	26	59	46	18	12
VII	31	70	60	30	56	44	14	9
VIII	29	75	65	27	58	45	17	11
$\sum X$	149	77.6	67,4	141	61,2	47,8	16,8	11

N_1, N_2 — liczby uczniów w poszczególnych klasach.

Jak wynika z tabeli, najlepsze rezultaty uzyskała klasa czwarta eksperymentalna zarówno w średnich wynikach rozwiązania testów, jak i wskaźników efektywności dydaktycznej. Okazało się, że w klasie czwartej eksperymentalnej, w której stosowano elementy historii matematyki na lekcjach, efekty dydaktyczne były — w zakresie przyrostu wiedzy uczniów — 20% wyższe, a trwałość o 14% większa w porównaniu do klas kontrolnych.

Efektywność nauczania matematyki z elementami historii matematyki klas eksperymentalnych jest około 17% wyższa w zakresie wzrostu wiedzy uczniów i o 11%, w zakresie jej trwałości w stosunku do klas kontrolnych. Znacznie wzrosło zainteresowanie uczniów matematyką oraz aktywność uczniów na lekcji.

Uczniom w badaniach końcowych zadano pytanie: „co sądzą o elementach historii wprowadzanych na lekcje matematyki?"Większość uczniów klas eksperymentalnych była zadowolona z tej formy pracy. Oto co napisali w odpowiedzi na to pytanie: „Bardzo mi odpowiada ten sposób nauczania, teraz nie boję się matematyki, bardziej rozumiem, o czym się mówi i łatwiej mi jest rozwiązywać zadania". Nauczyciele również są zadowoleni z włączania historii matematyki na lekcje, ponieważ urozmaicają pracę, pozwalają na większą aktywizację i samodzielność uczniów.

5. Zakończenie

Przedstawione propozycje realizacji historii matematyki nie wyczerpują tematu, są jedynie zachętą dla nauczycieli matematyki, aby w miarę możliwości wykorzystywali je w pracy z uczniami na lekcjach i zajęciach pozalekcyjnych. Wówczas uczniowie będą więcej wiedzieć o historii matematyki, o matematyce i matematykach. Może świadczyć o tym fakt, że niektóre elementy historyczne miałem możność sam wykorzystać w praktyce jako nauczyciel matematyki. Zawsze spotykały się one z dużym zainteresowaniem uczniów. Często stawiali mi dodatkowe pytania, wymieniali uwagi szeptem między sobą. Wielokrotnie miałem możliwość stwierdzenia przy egzekwowaniu materiału naukowego, że wiadomości, do których udało mi się dobrać ilustracje historyczne, były lepiej i gruntowniej przyswojone. Warto również pokazać uczniom pewne problemy matematyczne, które do dziś nie zostały rozwiązane.

Uczniowie powinni wiedzieć, że matematyka jest nauką ciągle rozwijającą się, a nie zamkniętą hermetycznie, w której już nie można nic udowodnić, czy też odkryć. Zachodzi pytanie, skąd nauczyciele czerpać mają materiał historyczny?

Trzeba stwierdzić, że w obecnej chwili materiałow tych jest coraz więcej w postaci książek, artykułów, plakatów i nagrań magnetowidowych. Można powiedzieć, że materiałów historycznych jest dość dużo, tylko nauczyciele powinni chcieć i umieć z nich skorzystać.

W związku z przedstawionym opracowaniem nasuwają się wnioski:

— wyników przedstawionych badań nie można uogólniać, gdyż są to badania przeprowadzone na małej próbie,

— należy zachęcać nauczycieli matematyki jak i innych przedmiotów, np. fizyki, biologii, plastyki itd. do włączania elementów historii matematyki do swoich przedmiotów,

— trzeba opracować dokładnie treści z historii matematyki do materiału programowego

poszczególnych klas, tak aby nauczyciele mogli je wykorzystywać,
— należy doskonalić formy, metody i środki dydaktyczne przekazu treści historycznych,
— trzeba uświadamiać nauczycieli, że elementy historii matematyki przyczyniają się do wzrostu umiejętności i zainteresowań uczniów, a tym samym do lepszych efektów dydaktycznych,
— prowadzić badania efektywności w relacji między historią matematyki a edukacją matematyczną na różnych poziomach nauczania szkolnego,
— opracować historię regionalnych ośrodków matematycznych,
— zorganizować warsztaty na temat historii matematyki w nauczaniu szkolnym,
— wznowić ważniejsze publikacje z historii matematyki, aby były dostępne dla nauczycieli i uczniów.

Literatura

[1] Bobik E.: N. Łobaczewski — twórca geometrii nieeklidesowej. Matematyka nr 5, (1992), s. 276.

[2] Bobik E.: O symbolach matematycznych. Matematyka nr 2, (1994), s. 67.

[3] Bourbaki N.: Elementy historii matematyki. PWN, Warszawa 1980.

[4] Dąbrowski M.: O historii odkrycia niewymierności. Matematyka nr 2, (1986), s. 85.

[5] Dąbrowski M.: O narodzinach dowodu w matematyce. Matematyka nr 4, (1991), s. 229.

[6] Dobrzycki S.: Równania kwadratowe w babilońskich tekstach klinowych. Matematyka nr 4, (1964), s. 154.

[7] Dobrzycki S.: Z historii konstrukcji geometrycznych. Matematyka nr 5(33), (1954), s. 1.

[8] Dobrzycki S.: Z historii ułamków dziesiętnych. Matematyka nr 2(46), (1957), s. 1.

[9] Dubiel S.: Myśli B. Russela i J. Tannery'ego o nauczaniu matematyki. Matematyka nr 6, (1988), s. 45.

[10] Dubiel S.: Treści nauczania matematyki w szkole średniej ogólnokształcącej w latach 1918 - 1939. Matematyka nr 4, (1986), s. 258.

[11] Duda R.: O roli matematyki w rozwoju myśli. Matematyka nr 5, (1976), s.308.

[12] Duda R.: Zagadnienie czterech barw zostało rozstrzygnięte. Matematyka nr 2, (1977), s. 112.

[13] Duda R.: Zwięzły zarys historii matematyki. Matematyka nr 5, (1977), s. 286.

[14] Encyklopedia szkolna — Matematyka. WSiP, Warszawa 1989.

[15] Fudali S.: Geometria po Euklidesie. Matematyka nr 1, (1986), s. 17. Język liczb, kształtu i miary. Wiedza Powszechna, Warszawa 1957.

[16] Glejzer G. I.: Istorija matematiki w szkole, klasy IV - VI, posobije dlja uczitelej. Prosweszczenije, Moskwa 1981.

[17] Gleichgewicht B.: Wielościany foremne wypukłe. Matematyka nr 4 - 6, (1958), s. 23.

[18] Ihrah G.: Dzieje liczby — czyli historia wielkiego wynalazku. Ossolineum, Wrocław, 1990.

[19] Iwiński T.: Ponad pół wieku działalności matematyków polskich. PWN, Warszawa, 1975.

[20] Janowicz J.: Ciekawostki historyczne w zadaniach dla uczniów klas podstawowych. Matematyka nr 1, (1983), s. 54.

[21] Jeleński Sz.: Lilavati. WSiP, Warszawa 1974.

[22] Jeleński Sz.: Śladami Pitagorasa. WSiP, Warszawa 1974.

[23] Juszkiewicz A. P. (red.): Historia matematyki. T. I - II, PWN, Warszawa 1975.

[24] Kandulski M.: Zarys historii matematyki. UAM, Poznań 1983.

[25] Kordos M.: Jak odpowiadano na pytanie „co to jest liczba?". Matematyka nr 1, (1992), s. 16. Wykłady z historii matematyki. WSiP, Warszawa 1994.

[26] Kordos M.: O czym mówi V postulat Euklidesa. Matematyka nr 5, (1992), s. 259.

[27] Kowal S.: Przez rozrywkę do wiedzy. WNT, Warszawa 1976.

[28] Krygowska Z.: Wieże z Hanoi. Matematyka nr 3, s. 172.

[29] Krygowska Z.: Profesor Z. Krygowska o sobie. Matamtyka nr 6(218), (1988), s. 1.

[30] Krysicki W.: Poczet wielkich matematyków. Nasza Księgarnia, Warszawa 1975.

[31] Kulczycki S.: Opowieści z dziejów liczb. WSiP, Warszawa 1973.

[32] Kuratowski K.: Pół wieku matematyki polskiej 1920 - 1970. Wiedza Powszechna, Warszawa 1973.

[33] Legutko M.: Historia na lekcji matematyki. Nauczyciel i matematyka nr 2, (1992), s. 8.

[34] Legutko M.: Refleksje na temat wykorzystywania tradycyjnego materiału zadaniowego w nowym kontekście. Oświata i wychowanie, wersja D, nr 4, (1977), s. 18.

[35] Maruszczyk K.: Elementy historii matematyki w nauczaniu w szkole średniej. Matematyka nr 3, (1994), s. 158.

[36] Mikołajczyk M.: Czy znasz rzymski zapis liczb. Matematyka nr. 2, (1994), s. 87.

[37] Mostowski A.: Refleksje na temat pewnego wykładu z historii matematyki. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II, Wiadomości Matematyczne XXII, (1979), s. 65.

[38] Narkiewicz W.: Sławne problemy teorii liczb. Matematyka nr 3, (1992), s. 137.

[39] Nikonowicz D.: Stefan Banach. Matematyka nr 2, (1992), s. 67.

[40] Norwa J.: O rachunku prawdopodobieństwa. Matematyka nr 4, (1974), s. 235.

[41] Nowakowski R.: Z historii logarytmów. Matematyka nr 5, (1960), s. 258.

[42] Nowikow P. S.: Co to jest metoda aksjomatyczna. Matematyka nr 5(89), (1965), s. 193.

[43] Opial Z.: Stan i potrzeby historii matematyki w Polsce. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II, Wiadomości Matematyczne VII, (1965), s. 3.

[44] Orzechowski E.: O liczbie π. Matematyka nr 4, (1982), s. 44.

[45] Osińska W. (red.): O nauczaniu historii nauki. Monografie z Dziejów Nauki i Techniki, t. XCVI, 1974.

[46] Piotrowski W.: O historii matematyki w szkole. Matematyka nr 3, (1983), s. 303.

[47] Piotrowski W.: Z dziejów elementów Euklidesa. Matematyka nr 3, (1986), s. 164.

[48] Piotrowski W.: Z historii rozcinania prostokątów i kwadratów na różne kwadraty. Matematyka nr 2, (1986), s. 98.

[49] Piotrowski W.: Z historii techniki obliczeniowej w Polsce. Matematyka nr 1, (1991), s. 14.

[50] Pogoda Z.: Fenomen Hilberta. Matematyka nr 6, (1993), s. 323.

[51] Program szkoły podstawowej, matematyka klasy IV - VIII. MEN, Warszawa 1990.

[52] Program liceum ogólnokształcącego oraz liceum zawodowego i technikum — matematyka. WSiP, Warszawa 1990.

[53] Przyjemski J.: Ciekawostki historyczne w nauczaniu matematyki w klasie V. Matematyka nr 1, (1980), s. 18.

[54] Przyjemski J.: Zadania anegdotyczne w klasie VI. Matematyka nr 1, (1983), s. 20.

[55] Rademacher H., Toeplitz O.: O liczbach i figurach. PWN, Warszawa 1956.

[56] Radoliński M.: Ogólne geometrie skończone. Matematyka nr 5, (1979), s. 295.

[57] Raik A. E.: Trzy zadania z tekstów staroegipskich i babilońskich. Matematyka nr 6, (1959), s. 320.

[58] Sierpińska A.: Pojęcie przeszkody epistomologicznej w nauczaniu matematyki. Dydaktyka matematyki nr 2, (1988), s. 103.

[59] Sierpiński W.: Twierdzenie Eulera czy Kartezjusza. Matematyka nr 4-6 (54), (1958), s. 1.

[60] Steen A. L. (red.): Matematyka współczesna — dwanaście esejów. WNT, Warszawa 1988.

[61] Struik D. J.: Krótki zarys historii matematyki. PWN, Warszawa 1975.

[62] Steinhaus H.: Kalejdoskop matematyczny. Wyd. 3, PZWS, Warszawa 1956.

[63] Studnicki G.: Jan Śniadecki — twórca polskiego słownictwa matematycznego. Matematyka nr 2, (1979), s. 113.

[64] Swadźba J.: O polskim języku matematycznym. Matematyka nr 6, (1986), s. 348.

[65] Szurek M.: Ciekawostki matematyczne. Matematyka nr 2, (1982), s. 109.

[66] Szurek M.: Opowieści matematyczne. WSiP, Warszawa 1987.

[67] Trochanowski W.: O potrzebie przenikania historii matematyki do nauczania szkolnego matematyki. Problematyka różna, z. 10, nr 158, WSI — Opole (1989), s. 59.

[68] Trochanowski W.: Możliwości wykorzystania elementów historii matematyki w nauczaniu szkolnym. Problemy Dydaktyczne Matematyki, t. VI, WSP — Zielona Góra (1994), s. 93.

[69] Wachułka A.: S. Dickstein a historia matematyki w Polsce w świetle korespondencji z E. Stammem. Wiadomości Matematyczne XXIX (1990).

[70] Wachułka A.: O polskim podręczniku arytmetyki z XVIII stulecia. Matematyka nr 4, (1960), s. 194.

[71] Waszkiewicz J.: O problemie historycznych początków matematyki. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II, Wiadomości Matematyczne XXIX (1990), s. 93.

[72] Wesełucha A.: Złoty podział odcinka z ciekawszymi zastosowaniami. Matematyka nr 4. (1980), s. 242.

[73] Wojciechowska A.: O wielomianach. Matematyka nr 1, (1992), s. 33.

[74] Wojciechowski K. F.: Z historii małego symbolu „i". Matematyka nr 6, (1957), s. 12.

[75] Wuczyńska K.: O podręcznikach szkolnych stefana Banacha. Matematyka nr 2, (1992), s. 96.

[76] Wuczyńska K.: Twierdzenie Talesa w polskich podręcznikach dla szkól średnich. Matematyka nr 2 - 3, (1990), s. 111.

[77] Ziemba J.: Zadania staropolskie. Matematyka nr 4, (1957), s. 5.

Abstract

The work consists of the introduction, the four chapters, the termination and the bibliography that includes 77 books and periodicals connected with maths history.

At the beginning the aims of introducing maths history into school teaching have been shown. The most important one is to obtain an increase in the interests in maths, and in the results of teaching pupils.

In the first subsection one may find out about the beginning of maths history, i. e. when it was introduced into school teaching. As early as in the 1972 on the International Congress of Mathematical Education which was held in Paris, one of the main subjects was finding the connection between maths history and its teaching at school. The program of the Polish school also makes teachers to deliver some historical contents to pupils.

The second subsection contains the methods of introduction the maths historical elements into teaching. Among them one may separate talks, lectures, plays, radio and

TV broadcasts pretences of lessons etc. The historical facts ought to be delivered with theoretical substance during the lessons. It is supposed to occupy from 10 to 15 per cent of the lesson time at historical elements, so it should last aproximately 5 - 10 minutes per lesson.

In the third subsection the program of the realization maths history at school has been shown. There are 5 examples of problems connected with maths history for classes from 4 to 8 at the primary school and for classes from 1 to 4 at the secondary school. The adequate bibliography has beeen added. We may find out what contents can be gone through during the lessons of maths. We mean interesting problems, short lines of poetry etc.

In the last subsection the results of the experimental research have been shown. The maths history was introduced into the experimental classes from 4 to 8 (during the school year 1992/93). From this research it follows that maths history caused an increase in knowledge of pupils by 17 per cent: the persistence of the knowledge was higher by 11 per cent compared with supervisory classes. The interst in mathematics increased as well: the pupils' activity was higher, the homework better done, children read more etc. Pupils and teachers were content with the introduction maths history into teaching.

In the ending some conclusions have been expressed. The most important one concerns the advice for teachers: they ought to introduce maths history elements into teaching at each stage at primary and secondary school because it increase the effectiveness in teaching mathematics.