ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Witold WIĘSŁAW

POWSTANIE LICZB NIEWYMIERNYCH

Streszczenie

W pracy omówiony jest krótko rozwój pojęcia niewymierności od czasów najdawniejszych aż do dziś, udokumentowany ważniejszymi pracami. Opisane zostały podstawowe konstrukcje liczb rzeczywistych. Omówione też są aksjomatyzacje liczb rzeczywistych jako ciała liniowo uporządkowanego. Artykuł jest zmienioną wersją pracy [38].

CREATION OF IRRATIONAL NUMBERS

Summary

The paper presents concise history of irrational numbers

СОЗДАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Резюме

В работе представляется история иррациональных чисел.

Motto:

There are various kinds of good teaching. However, there must be a will to teach and a will to learn how to teach.

Morris Kline

1. Czasy starożytne

Lista matematyków Eudomosa z Rodos (334 p.n.e.) wymienia wyraźnie Pitagorasa z Samos (580 - 501 p.n.e.) jako odkrywcę liczb niewymiernych. Wiąże się to z jego słynnym twierdzeniem. Z Twierdzenia Pitagorasa wynika, że istnieje liczba b, której kwadrat jest równy a (rys. 1).

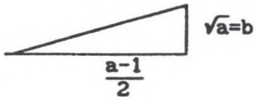
We współczesnej notacji oznacza to, że $a = b^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$. To, że taka liczba nie musi być wymierna, okazuje się już przy odpowiednim wyborze a. Na przykład dla $a = 2$ udowodnił to precyzyjnie Euklides (ok. 300 p.n.e.).

Natomiast pojęcie niewspółmierności pojawiło się w „Dialogach" Platona — „Theatetus" (Teajtet) (str. 147 B). Dialog został napisany w roku 368/67 p.n.e., wkrótce po śmierci matematyka Theatetosa, po bitwie, w której został ranny. Fikcyjną datą dialogu był rok 399 p.n.e., tzn. rok śmierci Sokratesa. W pierwszej części dialogu stary matematyk, Theodorus z Cyreny, pokazany jest w czasie wystąpienia przed grupą młodych ludzi, wśród których był młody, wówczas 17 - letni, Theatetus. Dowodzi on niewymierności liczb $\sqrt{n}$ dla $n = 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17$. Mimo że dialog jest zupełnie fikcyjny, wydaje się, że Platon poświęcił go pamięci przyjaciela, który akurat zmarł przedwcześnie i miał istotny wkład w rozwój teorii odcinków niewspółmiernych i pojęcia niewymierności. Należy stąd wnosić, że to, czego dowodzi Theodorus we wstępie, było znane, gdy Theatetus był siedemnastoletnim chłopcem. Theodorus urodził się ok. 470 (460) p.n.e.

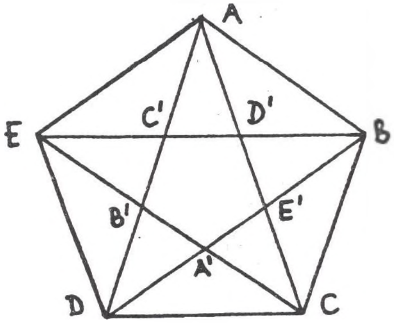
Stary Ateńczyk w „Prawach" Platona mówi nam, że dowiedział się o istnieniu odcinków niewspółmiernych pod koniec swego życia i że jest wstydem dla Greków, że wciąż ignorują ten fakt. Platon identyfikuje się ze Starym Ateńczykiem.

Z dialogu Platona wynika, że niewymierność $\sqrt{2}$ udowodnił ktoś inny, nie Theatetus.

Hippasus z Metapontu (V w. p.n.e.) zainteresowany był dwunastościanem foremnym (*„sfera składająca się z 12 pięciokątów foremnych"*). Nie wiadomo dokładnie, kiedy żył Hippasus. Wiadomo jedynie, że brał udział w rewolcie politycznej w południowych Włoszech w 445 p.n.e. Dwunastościan foremny występuje w południowych Włoszech jako kryształ pirytu (FeS_2). Dwunastościan był bardzo wcześnie używany we Włoszech jako kostka do gry. Wydaje się, że dwunastościan miał znaczenie religijne w Etrurii. Hippasusa można uważać więc za odkrywcę niewspółmierności. Udowodnił on mianowicie, że przekątna pięciokąta foremnego jest niewspółmierna z jego bokiem, a ich stosunek wyraża się



Rys. 1



Rys. 2

za pomocą ułamka łańcuchowego:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}\quad - \text{,,}\textit{liczba zota}\text{''}$$

Istotnie, rozważmy pięciokąt foremny $ABCDE$ (rys. 2).

Ponieważ trójkąty AED i $BE'C$ mają odpowiednie boki równoległe, więc są podobne. Zatem

$$\frac{AD}{AE}=\frac{BC}{BE'}.$$

Ale $BE' = BD - DE' = BD - BC$, bo $DE' = BC = AE$. Stąd otrzymujemy, że

przekątna : bok = bok : (przekątna − bok).

Niech a_0 oznacza przekątną, a_1 - bok, $a_2 = a_0 - a_1$, tzn. $a_0 : a_1 = a_1 : a_2$. Niech $a_3 = a_1 - a_2$ i ogólnie: $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$. Otrzymujemy:

$$a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = \ldots = a_n : a_{n+1} = \ldots,$$

tzn. dostajemy algorytm Euklidesa dla a_0 i a_1:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1\cdot a_1 + a_2\\ a_1 &= 1\cdot a_2 + a_3\\ a_2 &= 1\cdot a_3 + a_4\\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Jak widać, ciąg ten nie urywa się, tzn. odcinki a_0 i a_1 są niewspółmierne. Ponadto

$$\frac{a_0}{a_1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pitagoras w połowie życia emigrował z rodzinnego Samos do Krotony w południowych Włoszech. Pitagorejczycy w V w. p.n.e. doszli do krytycznego punktu w rozwoju pojęcia liczby. Zamierzali dowieść, że jeżeli a, b, c oraz a', b', c' są długościami boków trójkątów podobnych, to

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}.$$

W IV w. p.n.e. Pitagorejczycy dowiedli, że jeżeli liczby wyrażające długości boków są wymierne, to tak jest. Zatem przyjęto, że jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy długościami odcinków na linii prostej i (dodatnimi) liczbami wymiernymi. Okazało się jednak, że istnieją liczby niewymierne. Pitagorejczycy udowodnili, że przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem, tzn. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Byłoby interesujące dowiedzieć się, kto pierwszy tego dowiódł. Zapewne nigdy się już tego nie dowiemy. Jedno jest pewne: Pitagoras pod koniec VI w. p.n.e. wiedział, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

A oto jak można dowieść niewymierności $\sqrt{2}$. Gdyby $\sqrt{2}$ był liczbą wymierną, to $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, tzn. $2m^2 = n^2$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ i $n > m$. Zatem $n = m + a$. Ponieważ $1 < \sqrt{2} < 2$, więc $1 < \frac{n}{m} < 2$, co daje $n < 2m$, czyli $0 < a < m$. Stąd wynika, że $m = a + b$, $n = m + a = 2a + b$, gdzie $b \in \mathbb{N}$, co wobec $2m^2 = n^2$ daje $2a^2 = b^2$. Postępując podobnie otrzymalibyśmy nieskończony ciąg liczb naturalnych $n > m > a > b > \ldots$, co jednak nie jest możliwe. Zatem $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Z wielką pomysłowością aproksymowano $\sqrt{2}$ za pomocą kolejnych rozwiązań równań $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Arystoteles (ok. 350 r. p.n.e.) wiedząc, że równanie $p^2 = 2q^2$ nie ma rozwiązań $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, rozpatrywał równanie $p^2 - 2q^2 = 1$, tzn.

$$\frac{p^2}{q^2} - 2 = \frac{1}{q^2}.$$

Teon ze Smyrny (ok. 50 n.e.) skonstruował dwa ciągi p_n i q_n, aproksymujące $\sqrt{2}$, kładąc

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 1, \quad p_{n+1} = p_n + 2q_n, \quad q_{n+1} = p_n + q_n.$$

Wtedy

$$p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n-1}, \quad \text{tzn.} \quad \left|\frac{p_n^2}{q_n^2} - 2\right| = \frac{1}{q_n^2}.$$

W podobny sposób pojawiła się „złota liczba" φ:

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_{n+1} = p_n + p_{n-1}, \quad q_n = p_{n-1},$$

skąd

$$p_n^2 - p_n q_n - q_n^2 = (-1)^{n-1}.$$

Liczby $\varphi_n = \frac{p_n}{q_n}$ spełniają równanie:

$$\varphi_n^2 = \varphi_n + 1 \pm \frac{1}{q_n^2},$$

skąd wynika już, że $\varphi^2 = \varphi + 1$, bo dla $n \to \infty$ ciąg $q_n \to \infty$.

Z konstrukcji Teona wynika, że

Istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych $\frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$ takich, że

$$0 < \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Udowodnimy ogólnie,że

Liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ jest niewymierna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych $\frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$ takich, że

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{1}$$

Istotnie, jeżeli liczba α jest niewymierna, to istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych $\frac{p}{q}$ spełniających (1). Na przykład wystarczy w tym celu rozwinąć α w ułamek łańcuchowy $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, a następnie wziąć za p/q n-ty redukt rozwinięcia liczby α, tzn. $p_n/q_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Dowodzi się, że wtedy spełniony jest warunek (1) dla $p = p_n$ i $q = q_n$. Lewa część nierówności (1) jest oczywista, bo $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Na odwrót, załóżmy nie wprost, że $\alpha \in \mathbb{Q}$. Zatem $\alpha = \frac{n}{m}$, gdzie $n, m \in \mathbb{Z}$ i $(n,m) = 1$. Ponieważ warunek (1) spełniony jest dla nieskończenie wielu liczb p/q, więc mianowniki q w nierówności (1) nie są ograniczone. Gdyby bowiem istniało N takie, że $|q| < N$ dla każdego p/q $(q > 0)$ spełniającego (1), to na mocy (1):

$$\alpha - \frac{1}{q^2} < \frac{p}{q} < \alpha + \frac{1}{q^2}, \quad \alpha - 1 < \frac{p}{q} < \alpha + 1,$$

czyli $q(\alpha - 1) < p < q(\alpha + 1)$, co daje oszacowanie: $-(\alpha - 1)N < p < (\alpha + 1)N$. Zatem byłoby tylko skończenie wiele liczb p/q, dla których zachodzi (1), wbrew założeniu.

Niech więc p/q spełnia (1), gdzie $q > m$. Wówczas, na mocy (1) otrzymalibyśmy:

$$\frac{1}{mq} \leq \left|\frac{n}{m} - \frac{p}{q}\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2},$$

skąd wynikałoby, że $qm > q^2$, czyli q, m, wbrew wyborowi m, co kończy dowód twierdzenia.

Powróćmy jednak do problemu niewymierności w Starożytności. Były możliwe dwie drogi wyboru. Wybór polegał na podjęciu decyzji, że niektóre długości nie odpowiadają żadnym liczbom, albo też przyjęciu, że $\sqrt{2}$ i inne dodatnie niewymierności są liczbami. Dokonując drugiego wyboru geometrzy IV w. p.n.e. postawili kamień milowy w historii myśli ludzkiej. „Wielkie kontinuum" analizy, zbiór licz rzeczywistych, było w zasięgu ręki. Nowe wielkości, dodatnie liczby niewymierne, dołączone zostały do zbioru dodatnich liczb wymiernych, tworząc nowy zbiór liczb lub wielkości, mający tę dodatkową własnosć, że zwykłe operacje na tych wielkościach: dodawanie, mnożenie i dzielenie nie wyprowadzają poza ten zbiór, podobnie, jak to miało miejsce dla liczb wymiernych.

Wszystko wskazywało na to, że matematykom potrzebne były nowe podstawy. Współczesny Platonowi Eudoksos zbudował teorię proporcji (stosunków).

Stosunek P/Q jest taki sam, jak X/Y:

$$P/Q = X/Y \Leftrightarrow \forall_{m,n\in\mathbb{N}}(mX \lesseqgtr nY \Leftrightarrow mP \lesseqgtr nQ).$$

Jeżeli stosunki P/Q i X/Y są równe, to P, Q, X, Y nazywamy *proporcjonalnymi*. Teorię tę rozwinął Euklides w V Księdze „Elementów". Księga VI zawiera zastosowania do figur podobnych. Teoria Eudoksosa potwierdzała metodę wyczerpywania i uzupełniała wyniki Pitagorejczyków o figurach podobnych. Jak zobaczymy później, w definicji Eudoksosa tkwiło *implicite* pojęcie przekroju Dedekinda: dwa stosunki P/Q i X/Y są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory liczb wymiernych, które je oszacowują z góry (z dołu), są równe.

2. Wieki średnie

W okresie 1800 lat pomiędzy Euklidesem a Michaelem Stifelem (1485 - 1567) w nauce o liczbach niewymiernych nie nastąpił żaden istotny postęp. Stifel był pierwszym matematykiem, który wprowadził *„numeris irrationalibus"* (*„Arithmetica integra"*, Nürnberg 1544). Nie był on jeszcze w stanie rozpatrywać ich jako zwykłe liczby, ale stwierdził, że takie liczby zajmują określone miejsce w uporządkowanym zbiorze liczb. Pewne próby budowania prostej liczbowej znajdujemy u Galileusza ([18], s. 33). Koncepcje te znajdują już klarowne definicje u Newtona ([34], s. 4). Czytamy tam:

> *„Przez liczbę rozumiemy nie tyle zbiór jedynek, ile oderwany [abstrakcyjny] stosunek dowolnej wielkości do innej wielkości tego samego rodzaju, przyjętego przez nas za jednostkę. Liczby bywają trzech rodzajów: całkowite, ułamkowe i niewymierne [surdus]. Liczbą całkowitą jest to, co mierzy się jedynką; ułamkową — wielokrotność części jedynki; liczba niewymierna jest niewspółmierna z jedynką."*

Newton zrywa tu całkowicie z klasyczną tradycją, zgodnie z którą liczbami są jedynie zbiory jedynek. Równocześnie po staremu nazywa liczby niewymierne *„głuchymi"* albo *„niemymi"* (surdus). Termin ten powstał w literaturze europejskiej z przekładu terminu arabskiego, który z kolei wywodził się od greckiego $\alpha\lambda o\gamma o\zeta$ (niewyrażalny, niemy, nie mający stosunku). Równocześnie w wiekach średnich był w użyciu termin *„irrationalis"*. Kartezjusz, tak jak później Newton, mówił o *„liczbach niemych"* — nombres sours.

Jeszcze przed Newtonem matematycy XVII stulecia skłaniali się do równoprawnego traktowania liczb wymiernych i niewymiernych.

J. Wallis (1616 - 1703), który pojmował liczby, jeszcze jako zbiory jedynek mówił, że na *„głuchych"* pierwiastkach można przeprowadzać te same operacje arytmetyczne, jak na liczbach w zwykłym sensie i podkreślał, że przybliżenia takich pierwiastków można uczynić dowolnie bliskimi. Wallis nawet liczb wymiernych nie traktował jak zwykłe liczby, choć uważał je za pojęcie w pełni rzeczywiste.

G. W. von Leibniz (1646 - 1716) pisał [26]: *„mamy trojakiego rodzaju wielkości: wymierne, algebraiczne i przestępne"*. W późniejszej pracy pisał, że liczba $\alpha = 2^{1/a}$, $a = \sqrt{2}$ jest *„intercendentna"*.

Ch. von Wolff (1679 - 1754) mówił o stosunku (*ratio*) dwóch wielkości, ale dla niewspółmiernych wielkości nie było to całkiem jasne. (Ch. von Wolff, *„Elementa Matheosum universae"*, tom I, Halae Magdeburgicae 1717). Aby uniknąć trudności, należy tak rozszerzyć system liczbowy, aby obejmował on stosunki odcinków niewspółmiernych.

3. Wiek XVIII. Dalsze przykłady liczb niewymiernych

Newtonowskie pojęcie liczby jako proporcji rozpowszechniło się w XVIII wieku, np. w pracach L. Eulera (1707 - 1783) i innych.

Próby bliższego powiązania pojęcia liczby wymiernej i niewymiernej pojawiły się w II połowie XVIII w. A. G. Kästner (1719 - 1800) traktował liczby niewymierne jako granice liczb wymiernych.

D'Alambert (1717 - 1783) odrzucał istnienie liczb niewymiernych. Jak się przekonamy w dalszej części wykładu, pogląd ten miał swoich zwolenników i w późniejszym okresie. Równocześnie jednak XVIII wiek przynosi jakościowe wyniki dotyczące liczb niewymiernych. W połowie tego stulecia postawiono, chyba po raz pierwszy, pytanie dotyczące niewymierności (a być może nawet przestępności, sądząc z tytułu pracy) liczb e, π i $\log_a b$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami wymiernymi, $a \neq 1$ i b nie jest wymierną potęgą a ([13], ustęp 105; J. H. Lambert (1768) por. [30]). Euler udowodnił, że e i e^2 są niewymierne. U Eulera wystąpił też w *„Introductio ..."* archaiczny termin *„numerus surdus"* (liczba głucha). Zwykle używał jednak terminu *„numerus irrationalis"* na określenie liczby niewymiernej.

Lambert (1728 - 1777) udowodnił w 1761, że π jest liczba niewymierną, ale dowód był błędny. Natomiast w 1766 udowodnił nastepujące twierdzenie:

1) Jeżeli $x \in \mathbb{Q}^{\times}$, *to* $e^x \notin \mathbb{Q}$.

W szczególności $\log x \notin \mathbb{Q}$ *dla* $x \in \mathbb{Q}_+^{\times}$, $x \neq 1$.

2) Jeżeli $x \in \mathbb{Q}^{\times}$, *to* $\operatorname{tg} x \notin \mathbb{Q}$.

Ponieważ $tg\frac{\pi}{4} = 1$, więc z twierdzenia 2 wynika, że π jest liczbą niewymierną. Lambert podał też bezpośredni dowód tego faktu. Natomiast z twierdzenia 1 wynika, że $e^n \notin \mathbb{Q}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dowód Lamberta daje w istocie więcej:

jeżeli $a \in \mathbb{R}$ jest liczbą, dla której $a^2 \in \mathbb{Q}$, to $\frac{tg\, a}{a} \notin \mathbb{Q}$.

A. M. Legendre udowodnił ([31] Note IV), że nie tylko π, ale także π^2 jest liczbą niewymierną. Legendre pisał tam (str. 251):

„Jest prawdopodobne, że liczba π nie jest zawarta wśród niewymierności algebraicznych, tzn. nie jest pierwiastkiem równania algebraicznego o skończonej liczbie składników, którego współczynniki są wymierne, lecz jak się wydaje, ścisły dowód takiego twierdzenia jest bardzo trudny; jesteśmy jedynie w stanie udowodnić, że kwadrat π jest jeszcze liczbą niewymierną."

Jest to zapewne pierwsze miejsce w literaturze, w którym pojawiła się precyzyjna definicja liczby przestępnej, choć już wcześniej Leibniz i Euler używali tego terminu, nie precyzując go jednak bliżej.

4. Pierwsza połowa XIX wieku. Dalsze zmagania z niewymiernością

W elementarnych wykładach rachunku różniczkowego, które zaczęły się coraz częściej pojawiać na przełomie XVIII i XIX stulecia, brak jakiejkolwiek wzmianki o pojęciu liczby. Liczby pojmowano jako coś znanego, czego nie definiuje się (por. J. L. Lagrange (1804 [29]), A. L. Cauchy (1821 [7]), M. Gergonne (1829 - 1830 [19])). U Cauchy'ego też nie ma pojęcia liczby, jest natomiast precyzyjne, jak na owe czasy, pojęcie ciągu, szeregu zbieżnego i rozbieżnego:

„Rozdział VI

1. Ogólne rozważania o szeregach.

Szeregiem nazywamy ciąg nieokreślonych wielkości

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

w którym następne [wielkości] otrzymujemy z poprzednich wg określonego prawa. Takie wielkości są różnymi składnikami szeregu, który rozpatrujemy. Niech

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

będzie sumą n pierwszych składników, gdzie n oznacza dowolną liczbę całkowitą. Jeżeli dla wartości n stale rosnących suma s_n zbliża się nieograniczenie do pewnej granicy s, to szereg jest zbieżny, a wspomnianą granicę nazywa się sumą szeregu. Jeżeli przeciwnie, suma s_n nie zbliża się do żadnej ustalonej granicy, to szereg jest rozbieżny i nie ma sumy."

Cauchy jest więc świadom, że do pojęcia sumy szeregu potrzebne jest pojęcie granicy. W dalszym ciągu usiłował udowodnić to, co dziś nazywamy twierdzeniem Cauchy'ego: *ciąg sum częściowych ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego*, innymi słowy, jeżeli przestrzeń metryczna $\mathbb{R}$ jest zupełna. Cauchy udowodnił jedynie konieczność swojego warunku. Dostateczność tego warunku wymaga uprzedniego zdefiniowania liczb rzeczywistych. Bez definicji liczb niewymiernych ta część dowodu jest niemożliwa. Cauchy stwierdził w *Cours d'Analyse*, że liczby niewymierne należy uważać za granice ciągów liczb wymiernych. Poprzestał jednak na tym, nie podając konstrukcji liczb niewymiernych.

Niezależnie jednak od braku precyzyjnej definicji liczb niewymiernych, z coraz większym powodzeniem odkrywano dalsze własności liczb niewymiernych.

J. Liouville (1809 - 1882) podał w 1844 pierwszy przykład liczby przestępnej, przedstawiając ją w postaci ułamka łańcuchowego: $\eta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, gdzie $a_0 \geq 2$ jest daną liczbą naturalną, $a_{m+1} = q_m^m$, a q_m jest mianownikiem ułamka $[a_0; a_1, \ldots, a_m]$, tzn. mianownikiem $m-$tego reduktu liczby η ($m \in \mathbb{N}$). W 1851 udowodnił Liouville swoje słynne twierdzenie o aproksymacji rzeczywistych liczb algebraicznych liczbami wymiernymi:

Jeżeli $\alpha \in \mathbb{R}$ jest liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$ (tzn. pierwiastkiem wielomianu stopnia n o współczynnikach wymiernych, nieprzywiedlnego nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych), to istnieje stała $C(\alpha) > 0$, taka że

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^n}$$

dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

Istotnie, powyższe twierdzenie o aproksymacji pozwoliło Liouville'owi skonstruować następne przykłady liczb przestępnych:

$$\Theta(g) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{-n!}$$

dla każdego $g \in \mathbb{N}$, $g \neq 1$.

Natomiast podstawowe twierdzenie Liouville'a z 1844 orzeka, że

Każdy przedział (a, b) na prostej zawiera liczbę przestępną.

To właśnie ten wynik zafascynował Liouville'a, a nie cytowane twierdzenie aproksymacyjne, którego roli Liouville wówczas jeszcze nie docenił.

Mówiąc o próbach konstruowania liczb niewymiernych należy wspomnieć o Bernardzie Bolzano (1781 - 1848), który wcześniej niż Cauchy podał definicję szeregu zbieżnego, w czym krył się zalążek pojęcia liczby niewymiernej. Użyte przez Bolzano pojęcie zbioru nieskończonego ukryte jest w definicji liczby niewymiernej. Należy tu jednak odnotować, że rozważania Bolzano przez wiele dziesiątków lat były mało znane i nie wywarły wpływu na współczesnych mu matematyków.

5. Konstrukcje Weierstrassa — agregaty i rozwinięcia dziesiętne

Pierwszą próbę uściślenia dotychczasowego pojęcia liczby podjął Karl Weierstrass (1815 - 1897) (por. [37]). W 1859/60 rozpoczął wykładać funkcje analityczne na uniwersytecie w Berlinie. Swoje wykłady *„Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen"*, stale rozszerzane i modyfikowane, prowadził aż do 1884/85 r. We wstępie do tych wykładów pisał o potrzebie formalnej definicji liczb rzeczywistych. Podstawowe pojęcie Weierstrassa to *agregat* („Zahlgrösse"). Idąc w ślad za pomysłem Pitagorejczyków definiuje jednostki, $\varepsilon_N = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Liczba ułamkowa a to liczba postaci

$$a = m + m_1\varepsilon_{m_1} + \ldots + m_N\varepsilon_{m_N}.$$

Agregat jest zbiorem liczb (jednostek) wraz z krotnościami ich występowania. Widać więc, że jakiś wpływ na Weierstrassa wywarły egipskie ułamki proste, choć tu ułamki proste mogą mieć równe mianowniki.

Dwie liczby wymierne: $a, b \in \mathbb{Q}_+^\times$ są równe:

$$a = b \Leftrightarrow \forall_{\omega\in\mathbb{Q}}(\omega < a \Leftrightarrow \omega < b).$$

Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $a_j \in \mathbb{Q}_+^\times$, będzie agregatem („das additives Agregat"). Liczby a_j nazywamy ułamkami agregatu A. (Uwaga: a_j nie muszą być parami różne). Liczba wymierna r jest zawarta w agregacie A, jeżeli istnieje podagregat A zawierający r. Piszemy wtedy $r \in A$. *Agregat* A jest *skończony* (albo: zbieżny), jeżeli istnieje $R \in \mathbb{Q}_+^\times$ takie, że dla każdego $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\sum_{i=1}^{n} a_i < R$. Jeżeli A i B są dwoma agregatami, to wg Weierstrassa:

$$A = B \Leftrightarrow \forall_{q\in\mathbb{Q}}(q \in A \Leftrightarrow q \in B).$$

Sumą agregatów $A+B$ nazywa on zbiór sum $a+b$ ($a \in A$, $b \in B$), a iloczynem agregatów A i B:

$$AB = \{ab \in \mathbb{Q}: \quad a \in A, \quad b \in B\}.$$

Jeżeli agregat jest złożony ze skończenie wielu elementów, to Weierstrass utożsamia go z sumą jego elementów.

Liczby rzeczywiste to nieskończone agregaty zbieżne. Znany logik, Frege, zarzucił Weierstrassowi błąd logiczny w jego konstrukcji. Frege pisał w [16]:

> *„Sumę nieskończenie wielu dodatnich składników rozpatruje Weierstrass nie jako granicę sumy, lecz jako sumę”.*

Frege uważa, że znaki $\leq$ i $+$ nie są tam jednoznaczne. Ten sam błąd zarzucił Weierstrassowi Cantor w 1872. Jedynie Dedekind uważał teorię Weierstrassa, a później Cantora za w pełni poprawne. W pracy *„Was sind und was sollen die Zahlen”* (Braunschweig 1888), Dedekind uważa, że *„teorie Panów Weierstrassa i Cantora posiadają pełną ścisłość”*. Faktem jest jednak, że Weierstrass nigdy nie opublikował swojej teorii, co chyba nie wynikało wyłącznie z jego niechęci do publikowania, gdyż dzieła Weierstrassa zajmują łącznie 7 tomów, obejmujących w większości prace opublikowane jeszcze za jego życia. Co prawda książka Dantschera [9] zawiera wykład agregatów Weierstrassa, jednak trąci on myszką i nie jest precyzyjny, jak na rok 1908. W wykładach Weierstrassa z 1886 (por. [37]) implicite pojawia się pojęcie porządku, jego archimedesowość oraz pojęcie granicy. Weierstrass pisze tam:

> *„W dowolnej bliskości każdej niewymiernej wielkości liczbowej istnieje dowolnie wiele wymiernych wielkości liczbowych, które do niej dowolnie blisko zbliżają się. Zatem każda niewymierna wielkość liczbowa jest granicą wymiernych [wielkości liczbowych], tzn. w tym przypadku zdefiniowanych. Jak więc można czysto arytmetycznie zdefiniować różnicę pomiędzy wielkościami wymiernymi i niewymiernymi? Gdy wyjdziemy z istnienia wymiernych wielkości liczbowych, to nie ma żadnego sensu, aby [liczby] niewymierne jako granice tychże definiować, gdyż wcześniej wcale nie wiemy, czy prócz wymiernych są jeszcze inne wielkości liczbowe.”*

I dalej:

> *„Ale wielkości liczbowe, które powyżej zostały zdefiniowane, obejmują wprawdzie wszystkie liczby wymierne, lecz także zawierają jeszcze inne. Rozważmy na przykład liczbę e, która przyporządkowana jest elementom*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$$

tworzącym dobrze zdefiniowany szereg, jednoznacznie określający wielkość liczbową; całkiem łatwo można wykazać, że nie istnieje wymierna wielkość liczbowa, która jest jej równa; wynika stąd od razu, że dziedzina wielkości nie jest wyczerpana przez liczby wymierne."

W piątek, 11 czerwca 1886 roku, Weierstrass mówił:

„Korzystając z pomocy wprowadzonej metody poglądowej daje się łatwo wyjaśnić, że każda wielkość liczbowa odpowiada pewnej określonej długości geometrycznej. Możemy mianowicie przedstawić wielkość liczbową w jakiejkolwiek arytmetycznej formie, na przykład w systemie dziesiętnym, w postaci

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots, \quad \textit{gdzie} \quad 0 \leq a_k < 10, \quad \textit{gdy} \quad k \geq 1,$$

a więc możemy wszystkie wielkości liczbowe przedstawić jako długości, które powstają, gdy powyższe przedstawienie szeregu urywa się na pierwszym, drugim, itd. składniku."

Rozwinięcia liczb rzeczywistych przy dowolnej podstawie, w szczególności rozwinięcia dziesiętne, odgrywają u Weierstrassa bardzo istotną rolę. Krótko mówiąc, co prawda Weierstrassowi nie udała się konstrukcja liczb rzeczywistych w postaci *agregatów*, ale jego konstrukcja liczb rzeczywistych w postaci rozwinięć przy podstawie $g > 1$ (głównie $g = 10$) jest już w pełni poprawna.

6. Konstrukcja Méraya, Cantora i Heinego - uzupełnienie przestrzeni metrycznej liczb wymiernych

W 1869 roku Méray (1835 - 1911) naszkicował swoją pierwszą teorię liczb niewymiernych, rozwijając ją następnie w książce [33] w 1872. Był to przełomowy rok w budowie liczb rzeczywistych. W tym samym roku ukazały się też konstrukcje Cantora, Heinego i Dedekinda. Konstrukcje Méraya, Cantora i Heinego to, najkrócej mówiąc, konstrukcje uzupełnienia ciała $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych względem zwykłej metryki na prostej, w przeciwieństwie do zupełnie odmiennej teorii Dedekinda. Omówimy je poniżej. Warto jednak wcześniej zdać sobie sprawę z faktu, że zarówno Heine, jak i Cantor byli studentami Weierstrassa. (Cantor studiował w Berlinie w latach 1863 - 1869, gdzie był pod przemożnym wpływem Weierstrassa). Z drugiej strony jednak, Weierstrass odrzucał sam pomysł takiej konstrukcji, jak o tym dobitnie świadczy przytoczony w rozdziale 5 fragment jego wykładów.

Méray ciąg liczb wymiernych $v_1, v_2, \ldots$ nazywa *„variable progressive"* (1869), a później *„variant"* (1872). Jeżeli dla dowolnej dostatecznie małej liczby wymiernej $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|v_{n+p} - v_n| < \varepsilon \ dla \ p = 0, 1, 2, \ldots,$$

to *„variant v_n est convergent"*. Dwa ciągi u_n i $v-n$ są równoważne, jeżeli $\lim_{n,m\to\infty}(u_n - v_m) = 0$. Jeżeli ciąg u_n nie jest zbieżny do liczby wymiernej, to granicę u_n nazywa *„nombre fictif"*, liczbą fikcyjną, utożsamiając ją z tym ciągiem.

Potrzeba uściślenia pojęcia liczby pojawiła się u Cantora w związku z jego badaniami w zakresie szeregów trygonometrycznych (twierdzenie o jednoznaczności etc.). Zręby tej teorii przedstawił w pracy *„Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen"*, Math. Annalen 5 (1872), 123 - 132 (por. [4]).

Liczbę rzeczywistą (*„die Zahlgrösse"*) utożsamia Cantor z ciągiem Cauchy'ego liczb wymiernych (a_n), pisząc: *„Szereg* (1) *ma określoną granicę b."*

Jeżeli a jest *„wielkością liczbową"* wyznaczoną przez ciąg (a_n), a a' *„wielkością liczbową"* wyznaczoną przez ciąg (a'_n), to można je porównywać:

(a) $a = a' \iff \forall_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^\times}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} : |a_n - a'_n| < \varepsilon$

(b) $a' < a \iff \exists_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^\times}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} : \varepsilon < a_n - a'_n$

(c) $a < a' \iff \exists_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^\times}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} : a_n - a'_n < -\varepsilon$

Ogólna konstrukcja liczb rzeczywistych podana przez Cantora poprzedzona została jego wynikami, dotyczącymi rozwinięć liczb rzeczywistych. W dwóch pracach ([5], [6]) z 1869 roku przedstawia Cantor teorię rozwinięć postaci:

$$A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\mu}{bb'} + \frac{\nu}{bb'b''} + \ldots, \tag{2}$$

gdzie $b, b', b'', \ldots$ są liczbami naturalnymi większymi od 1, $\lambda \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $\mu \in \{0, 1, \ldots, b'-1\}$, $\nu \in \{0, 1, \ldots, b''-1\}$, itd.

Cantor dowodzi, że jeżeli (2) jest rozwinięciem liczby wymiernej, to od pewnego miejsca licznik przyjmuje największe z możliwych wartości. Daje to natychmiast kryterium niewymierności liczby A przedstawionej za pomocą rozwinięcia (2), skąd np. wynika niewymierność liczby e. Dowodzi też, że liczba o rozwinięciu (2) jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg λ, μ, ν, ... jest okresowy od pewnego miejsca.

W pierwszej z cytowanych prac Cantor zauważa, że każda niewymierna liczba $x > 1$ ma jednoznaczne rozwinięcie w ułamek łańcuchowy

$$x = 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \ldots}}.$$

Następnie dowodzi, że każda liczba $x > 1$ ma rozwinięcie postaci:

$$x = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\ldots,$$

gdzie $a, b, c, \ldots \in \mathbb{N}$ i $b \geq a^2$, $c \geq b^2$, $d \geq c^2$, itd. W szczególności, jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to od pewnego miejsca mianowniki tworzą ciąg $k, k^2, k^4, \ldots, k^{2^n}, \ldots$. Cantor ustala odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną pomiędzy punktami prostej z wybraną jednostką a wielkościami liczbowymi.

W pracy *„Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen"*, Crelle's J. 77 (1874), 258 - 262; (por. [4]) Cantor udowodnił, że

zbiór rzeczywistych liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Dowolnej liczbie algebraicznej $\omega \in \mathbb{R}$ stopnia n z wielomianem minimalnym

$$f(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in Z[X],$$

$(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$, przyporządkował jej wysokość („Höhe"):

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Ponieważ dla każdej liczby naturalnej N istnieje skończenie wiele wielomianów (liczb ω) o wysokości N, a więc można je wszystkie przeliczyć. Wynika stąd, że zbiór $\mathbb{A}$ wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny. „Większość" liczb niewymiernych są to więc liczby przestępne.

Konstrukcje Cantora i Méraya, której idee sięgają Cauchy'ego, a nawet Kästnera, w najelegantszej postaci przedstawił Heine [20] w 1872 roku.

Ciąg Cauchy'ego złożony z liczb wymiernych nazywa Heine *„Zahlenreihe"*. Termin liczba (*„Zahl"*) rezerwuje tylko dla liczb wymiernych. *Ciąg elementarny* (*„Elementarreihe"*) to ciąg liczb wymiernych zbieżny do zera. Dwa ciągi (a_n) i (b_n) są równoważne, gdy $(a_n - b_n)$ jest ciągiem elementarnym. *Uogólniona liczba* albo *symbol liczbowy* (*„Allgemeinere Zahl oder Zahlzeichen"*) to klasa równoważności danego ciągu Cauchy'ego względem zbioru ciągów zerowych. Krótko mówiąc, zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych definiuje Heine jako pierścień ilorazowy $\mathfrak{C}/\mathfrak{I}$, gdzie $\mathfrak{C}$ jest zbiorem ciągów Cauchy'ego o wyrazach wymiernych, a $\mathfrak{I}$ — zbiorem (ideałem w $\mathfrak{C}$) ciągów elementarnych. Element $(a_n) + \mathfrak{I}$ zapisuje Heine jako $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Jeżeli $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$, $B = [b_1, b_2, b_3, \ldots]$, to

$$A > B \Leftrightarrow \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} a_n - b_n > 0.$$

Sumę A i B definiuje się jako:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots],$$

podobnie określa się mnożenie i dzielenie. W ten sam sposób, korzystając ze zdefiniowanego porządku dla uogólnionych liczb, określa się pojęcie granicy uogólnionych liczb.

7. Konstrukcja Dedekinda - uzupełnianie luk w przestrzeni uporządkowanej $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych

Zupełnie inny pomysł wykorzystał Dedekind. Co prawda jego rozprawa (por. [10]; [15] - tekst po polsku) ukazała się w 1872 roku, jednakże potrzeba precyzyjniejszego zdefiniowania liczb rzeczywistych wynikła w czasie jego wykładów w Zurychu w 1858 roku, kiedy to po habilitacji w Getyndze otrzymał etat profesora na tamtejszej politechnice. Pomysł dojrzewał przez wiele lat. Dedekind rozbija zbiór wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy: $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$: $\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{B}_\mu$, tzn. $a < b$ dla każdego $a \in \mathfrak{A}_\nu$ i $b \in \mathfrak{B}_\mu$. Każda taka klasa wyznacza *przekrój* („*der Schmitt*"). Przekrój nazywa *liczbą rzeczywistą*. Definiuje następnie sumę, iloczyn, iloraz oraz relację porządku w zbiorze przekrojów.

Zatem *przekrój Dedekinda* to para (A, B) rozłącznych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{Q}$ zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych takich, że

(i) $\mathbb{Q} = A \cup B$;

(ii) $a < b$ dla każdego $a \in A$ i $b \in B$;

(iii) w A nie ma liczby największej;

(iv) jeżeli $a \in A$, to dla każdej liczby wymiernej w, z nierówności $w < a$ wynika, że $w \in A$.

Na przykład przekrój Dedekinda wyznaczający $\sqrt{3}$ to para (A, B), gdzie $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$, a B jest dopełnieniem A w $\mathbb{Q}$. Natomiast liczbę wymierną $\omega \in \mathbb{Q}$ utożsamia Dedekind z przekrojem (A, B), gdzie $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < \omega\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} : \omega \leq b\}$.

W przeszłości w sposób mniej lub bardziej poprawny argumentowano, że każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych, tzn. że *liczby wymierne leżą gęsto w zbiorze* $\mathbb{R}$ *liczb rzeczywistych.*

Chyba najprostszy dowód tego faktu podał Christoffel w 1887 roku, dowodząc po prostu, że dla każdej liczby rzeczywistej x, $x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[nx]}{n}$, (gdzie $[z]$ oznacza część całkowitą (cechę) liczby $z \in \mathbb{R}$), poświęcając dyskusji tego faktu obszerną pracę [8]. Pomijamy oczywisty dowód tego faktu.

We wszystkich omawianych tu konstrukcjach liczbę rzeczywistą utożsamia się z odpowiednio wybranym zbiorem liczb wymiernych (bo jakżeby można inaczej !).

Jak to już zostało powiedziane, teoria Weierstrassa nie była w pełni klarowna, a nawet — poprawna, gdyż nie operował on jeszcze pojęciem zbioru. U Cantora, twórcy teorii zbiorów, wygląda to już znacznie lepiej. Natomiast Dedekind, który znał wyniki swego przyjaciela Cantora z korespondencji i wspólnych dyskusji, często je korygował, wskazując błędy lub luki w jego rozumowaniach, już bezbłędnie operował pojęciem zbioru. Był więc, w jakimś stopniu współtwórcą teorii zbiorów.

8. Przestępność e, π i innych liczb

Być może był to zbieg okoliczności, ale ten okres przyniósł także pierwszy dowód przestępności znanej liczby. Otóż Ch. Hermite dowiódł w 1873 roku, że *e jest liczbą przestępną*. Pierwsze próby dowodu tego faktu podjął Liouville jeszcze w 1844 r., ale jego dowód był błędny. Wynik Hermite'a (który był uczniem Liouville'a) był sensacją tamtych lat. Ale niewątpliwie największą sensacją był wynik Ferdynanda Lindemanna (1852 - 1939), uzyskany w dniu 12 kwietnia 1882 r. (w dniu jego urodzin):

π jest liczbą przestępną !

Replika Kroneckera, wg której *„liczby naturalne pochodzą od Boga; wszystko inne stworzył człowiek"*, była druzgocąca. W liście do Lindemanna, który po uzyskaniu tego błyskotliwego wyniku (zresztą jedynego istotnego twierdzenia, którego kiedykolwiek dowiódł) został dyrektorem Seminarium Matematycznego w Królewcu, pisał:

> *„Jaką wartość przedstawia Pański piękny dowód, skoro liczby niewymierne nie istnieją?"*

Kronecker uważał, że należy odrzucić wszelkie nieskończoności, a cała matematyka zbudowana jest z liczb naturalnych za pomocą konstrukcji, z których każda stosowana jest tylko skończenie wiele razy. Inne obiekty w matematyce nie istnieją — należy je odrzucić.

W swej słynnej pracy [32] z 1882 roku Lindemann udowodnił, że jeżeli $\alpha \in \mathbb{A}$ i $\alpha \notin \mathbb{Q}$, to $e^\alpha \notin \mathbb{Q}$. Stąd już wynika przestępność π: gdyby π była liczbą algebraiczną, tzn. $\pi \in \mathbb{A}$, to także $\pi i \in \mathbb{A}$. Ponieważ $\pi i \notin \mathbb{Q}$ i $e^{\pi i} = -1$, więc dostajemy sprzeczność. Zatem $\pi \notin \mathbb{A}$.

Lindemann sformułował też twierdzenie, uogólniające wynik Lamberta:

> *jeżeli $\alpha \in \mathbb{A}^\times$, to $e^\alpha \notin \mathbb{A}$.*

Udowodnił je Weierstrass w 1885 roku, dowodząc ogólniejszego twierdzenia:

> *jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A}$ są parami różne, to liczby $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ są liniowo niezależne nad ciałem $\mathbb{A}$.*

9. Aksjomatyzacja liczb rzeczywistych — Hilbert, Huntington

Pierwszą aksjomatykę ciała $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych podał Hilbert na przełomie XIX i XX wieku ([21], Rozdział 2. 13; [22]). Hilbert jedynie sformułował odpowiednie warunki, nie dowodząc jednak, że charakteryzują one zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych.

Przypomnijmy w tym miejscu, że porządek liniowy $\leq$ w ciele K nazywamy *porządkiem ciała*, jeżeli suma i iloczyn elementów dodatnich są dodatnie. Zatem relacja $\leq$ spełnia następujące warunki:

(i) $a \leq a$; (ii) $a \leq b$ i $b \leq a \Rightarrow a = b$;
(iii) dla każdego $a, b \in K$, $a \leq b$ lub $b \leq a$; (iv) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$;
(v) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$; (vi) $a \leq b, 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$.

W sposób równoważny *ciałem liniowo uporządkowanym* (krótko: *ciałem uporządkowanym*) nazywa się parę (K, P), gdzie $P \subset K$ jest podzbiorem K, $0 \notin P$, takim, że $a + b$, $ab \in P$ dla dowolnych $a, b \in P$.

Jeżeli ciało uporządkowane $(K, \leq)$ określone jest za pomocą warunków (i) - (vi), to za P bierzemy zbiór elementów dodatnich: $P = \{x \in K : x \geq 0, x \neq 0\}$. Na odwrót: jeżeli ciało uporządkowane określone jest jako para (K, P), to relację $\leq$ określamy w K następująco: $a \leq b \iff a = b$ lub $b - a \in P$. Łatwo sprawdzić, że tak określona relacja $\leq$ spełnia warunki (i) - (vi).

Porządek jest *archimedesowski*, jeżeli spełniony jest *Aksjomat Archimedesa*, tzn. dla dowolnych $a, b \in K$, $a > 0$ istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $na = a + \ldots + a$ (n razy) $> b$. Ciało z porządkiem archimedesowskim nazywamy *ciałem (uporządkowanym) archimedesowskim*.

Wiąże się to z mierzeniem — wystarczy rozważyć na prostej odcinki długości a i b. Wtedy pewna wielokrotność odcinka a długości a pokryje odcinek b długości b. A zatem zwykły porządek na prostej $\mathbb{R}$ jest porządkiem archimedesowskim. Natomiast porządek $\geq$ zdefiniowany w ciele $\mathbb{R}(X)$ funkcji wymiernych zmiennej X o współczynnikach rzeczywistych w sposób następujący:

> jeżeli $f = a_n X^n + \ldots + a_0$ i $g = b_m X^m + \ldots + b_0$ sa wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, to dla funkcji wymiernej f/g kładziemy:
>
> $$f/g \geq 0 \iff a_n b_m \geq 0,$$
>
> gdzie symbol $\geq$ po prawej stronie oznacza porządek w $\mathbb{R}$,

nie jest archimedesowski. Istotnie, łatwo sprawdzić, że ciało funkcji wymiernych $\mathbb{R}(X)$ staje się ciałem liniowo uporządkowanym względem relacji $\geq$, która przedłuża zwykły porządek z prostej $\mathbb{R}$. Jednakże ciało $(\mathbb{R}(X), \geq)$ nie jest archimedesowskie: jeżeli $a = X^{-1}$, $b = 1$, to $nX \leq 1$ dla każdego $n \in N$, mimo że $a > 0$. Takie elementy nazywamy *elementami nieskończenie małymi*.

Hilbert scharakteryzował $\mathbb{R}$ jako ciało archimedesowskie, które nie ma właściwych rozszerzeń archimedesowskich. Dowodu jednak nie podał.

Kilka lat później Huntington [23] scharakteryzował $\mathbb{R}$ jako ciało liniowo uporządkowane, w którym każdy rosnący ciąg ograniczony ma kres górny. W późniejszej pracy [24] udowodnił, że $\mathbb{R}$ jest jedynym ciałem liniowo uporządkowanym z porządkiem Archimedesa, w którym każdy zbiór ograniczony z góry ma kres górny. Dziś wiadomo, że założenie archimedesowości jest zbędne.

Jak dowieść tych twierdzeń ?

Podstawowym faktem niezbędnym do dowodu twierdzenia Hilberta i Huntingtona jest następujące twierdzenie orzekające, że ciała archimedesowskie to podciała ciała $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych (z porządkiem odziedziczonym z $\mathbb{R}$):

Dla każdego ciała archimedesowskiego $(K, \leq)$ istnieje izomorfizm $f : K \to \mathbb{R}$, zachowujący porządek, tzn. funkcja f, która ma następujące własności:

(i) f nie jest tożsamościowo równa zeru, oraz dla każdego $a, b \in K$:
(ii) $f(a+b) = f(a) + f(a)$,
(iii) $f(ab) = f(a)f(b)$,
(iv) $a \leq b$ implikuje, że $f(a) \leq f(b)$.

A oto idea dowodu tego twierdzenia.

Niech $a, b \in K$, $b \neq 0$. Ustalmy element $a \in K$, $a > 0$, np. $a = 1$. Niech $N \doteq N(b, n)$ będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $(N-1)a \leq nb < Na$. Można dowieść, że

dla każdego $m, n \in N$, $m > n$ pociąga $|\frac{N(b,m)}{m} - \frac{N(b,n)}{n}| \leq \frac{1}{n}$.

Wynika stąd, że $\{\frac{N(b,n)}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Caychy'ego liczb wymiernych. Niech granicą tego ciągu będzie:

$$f(b) = \lim_{n \to \infty} \frac{N(b, n)}{n}.$$

Sprawdzenie, że tak określona funkcja $f : K \to \mathbb{R}$ spełnia warunki (i) - (iv) twierdzenia, nie jest trudne, choć wymaga pewnej rutyny.

10. Najnowsze konstrukcje liczb rzeczywistych. Klasyfikacja Mahlera liczb niewymiernych

Wspominaliśmy już o opozycji Kroneckera do intensywnie rozwijanych teorii liczb rzeczywistych. Nie był jednak jedyny w swych opiniach. Paul du Bois Reymond (brat Emila) w swojej książce [2] z 1882 roku ustosunkował się krytycznie do arytmetycznych teorii liczb rzeczywistych i formalizmu tych teorii. Zanim został matematykiem, był psychologiem i to zapewne wpłynęło na ukształtowanie się jego poglądów matematycznych.

Tak pisał w swojej książce o liczbach niewymiernych [2]:

„Te trudności nie są natury matematycznej, mają źródło w naszych myślach — naszych wyobrażeniach [Vorstellungen]". „Gdyby to były trudności natury matematycznej, to by je dawno przezwyciężono".

Na zakończenie należy wspomnieć o dwóch nowych konstrukcjach liczb rzeczywistych. Pierwsza to konstrukcja liczb rzeczywistych za pomocą ultrapotęg, w szczególności niestandardowe rozszerzenia $\mathbb{R}$, które sankcjonują rachunek nieskończenie małych Newtona, Leibniza i innych, którego elementy przetrwały, przynajmniej w języku matematyki, do końca wieku XIX. Z algebraicznego punktu widzenia są to pewne ciała uporządkowane z porządkiem, który nie spełnia aksjomatu Archimedesa.

Pojawiła się też inna, nowa konstrukcja liczb rzeczywistych. W 1975 roku kilku autorów, m. in. G. H. Ross, G. C. Rota i inni [14] podało konstrukcję liczb rzeczywistych w oparciu o pierścień formalnych szeregów Laurenta jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych, tzn.

$$\mathbb{Z}\{X\} = S^{-1}\mathbb{Z}[[X]],$$

gdzie $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, a $\mathbb{Z}[[X]]$ jest pierścieniem formalnych szeregów potęgowych o współczynnikach całkowitych. W zbiorze tym definiuje się odpowiednio relację równoważności ρ i podpierścień $\mathbf{A}$, a zbudowany pierścień klas $\mathbf{A}/\rho$ okazuje się być zbiorem liczb rzeczywistych. Istotnie, niech $\mathbf{A}$ będzie zbiorem wszystkich szeregów Laurenta z $\mathbb{Z}\{X\}$

$$a = \sum_{n=N}^{\infty} a_n X^n,$$

które spełniają następujący warunek:

$$\text{istnieje } z \in \mathbb{N} \text{ takie, że } \sum_{i \leq n} |a_i| 2^{n-i} \leq z 2^n \text{ dla każdego } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dwa szeregi Laurenta $a, b \in \mathbf{A}$ są równoważne:

$$a\rho b \Leftrightarrow \text{istnieje szereg } c \in \mathbf{A} \text{ taki, że } a = b + kc, \text{ gdzie } k = 1 - 2X \text{ i}$$

$$\forall_{z \in \mathbb{N}} \exists_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \forall_{j > k} : z|c_j| \leq 2^j.$$

Okazuje się (por. [14]), że pierścień $\mathbf{A}/\rho$ jest izomorficzny z $\mathbb{R}$.

Zaczęliśmy nasze rozważania od najwcześniejszych przykładów liczb niewymiernych: $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, stosunku przekątnej pięciokąta foremnego do jego boku.

Zakończmy więc naszą dyskusję opisem zbioru liczb niewymiernych. Klasyfikację taką podał K. Mahler w 1932 roku. Wtedy, gdy proponował taką klasyfikację, nie było jeszcze wiadomo, czy wszystkie zbiory są niepuste.

Przypomnijmy niezbędne pojęcia. Niech $P = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. Połóżmy:

$$H(P) := max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

Przypomnijmy, że jeżeli dla funkcji f i g, $f(x) \leq cg(x)$ z pewną stałą c, to piszemy $f(x) \ll g(x)$.

Niech $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy $\omega_N(\alpha)$ jako

$$sup\{\omega \in \mathbb{R} : \ \exists \text{ nieskończenie wiele } P \in \mathbb{Z}[X], st(P) \leq N, O < |P(\alpha)| < H(P)^{-\omega}\}.$$

A oto klasyfikacja Mahlera liczb rzeczywistych; α jest

A - liczbą $\Leftrightarrow \forall_{N \in \mathbb{N}} \omega_N(\alpha) \ll 1$ (liczby algebraiczne)
S - liczbą $\Leftrightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}}$ nie zachodzi $\omega_N(\alpha) \ll 1$, ale $\forall_{N \in \mathbb{N}}$ $\omega_N(\alpha) \ll N$.
T - liczbą $\Leftrightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}}$ nie zachodzi $\omega_N(\alpha) \ll N$, ale $\forall_{k \in \mathbb{N}}$ $\omega_k(\alpha) < \infty$.
U - liczbą $\Leftrightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}}$ $\omega_N(\alpha) = +\infty$.

Wiadomo już dziś, że każda z klas **S**, **T**, **U** jest niepusta, prawie każda liczba (w sensie miary Lebesgue'a) jest **S** - liczbą, a jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbf{S} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{U}$, obie z różnych klas, to są one algebraicznie niezależne.

A jak współcześnie wprowadza się liczby rzeczywiste ?

J. Dieudonné („*Foundations of modern analysis*", 1960) definiuje $\mathbb{R}$ jako ciało liniowo uporządkowane z porządkiem archimedesowskim, w którym każdy zstępujący ciąg odcinków ma przekrój niepusty.

W. Rudin („*Podstawy analizy matematycznej*", 1969) wykłada teorię przekrojów Dedekinda.

K. Kuratowski („*Rachunek różniczkowy i całkowy*", wyd. II, 1964) wspomina o aksjomatyce ciała R jako ciała archimedesowskiego, w którym każdy zbiór ograniczony z góry ma kres górny. Szkicuje też teorię przekrojów Dedekinda.

Najpełniejszy w polskiej literaturze wykład teorii dedekinda zawarty jest w „*Analizie*" W. Sierpińskiego.

Natomiast niedawno wznowiona trzytomowa „*Analiza*" K. Maurina zawiera wzmiankę o konstrukcjach Cantora i Méraya liczb rzeczywistych.

Na zakończenie przytoczę opinię Pierponta [35] z 1928 roku:

> *„Osobiście nie wierzę w to, że absolutna ścisłość zostanie kiedykolwiek osiągnięta, a jeżeli nadejdzie czas, że tak się stanie, to będzie to oznaczać, że wyścig matematyków zakończył się".*

Literatura

[1] Bell E. T.: The development of mathematics. Mc Graw - Hill Book Company Inc., New York - London, 1945.

[2] du Bois - Reymond P.: Die allgemeine Functionenlehre. 1882.

[3] Boyer C. B.: Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć. PWN, Warszawa 1964.

[4] Cantor G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Springer - Verlag, Reprint, 1980.

[5] — : Über die einfachen Zahlensysteme. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrg 14 (1869), 121 - 128.

[6] — : Zwei Sätze über eine Gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte. Ibidem 14 (1869), 152 - 158.

[7] Cauchy A. L.: Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique; 1re Partie, Analyse Algébrique. 1821.

[8] Christoffel E. B.: Lehrsätze über arithmetische Eingenschaften der Irrationalzahlen. Annali di Mathematika pura ed applicata, ser. II, XV (1887/88), 253 - 276.

[9] von Dantscher V.: Vorlesungen über die Weierstraßche Theorie der irrationalen Zahlen. Leipzig und Berlin, Teubner - Verlag, 1908.

[10] Dedekind R.: Gesammelte mathematische Werke. Dritter Band, Braunschweig, 1932.

[11] Duguc P.: Eléments d'analyse de Karl Weierstraß. Archive for History of Exact Sciences 10 (1973), 41 - 176.

[12] Ebbinghaus H. D., Hermes H., Hirzebruch F., Koecher M., Mainzer K., Neukirch J., Prestel A., Remmert R.: Zahlen. Springer - Verlag, 1988.

[13] Euler L.: Introductio in Analysin Infinitorum. Lausanne, 1748.

[14] Faltin F., Metropolis N., Ross H., Rota G. -C.: The real numbers as a wreath product. Advances in Mathematics 16 (1975), 278 - 304.

[15] Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych. Wybór i opracowanie Roman Murawski. Wydawnictwo Naukowe UAM. Poznań 1986; wydanie II poprawione, 1994.

[16] Frege G.: Grundgesetze der Arithmetik. 2 Bde, Jena, 1903.

[17] von Fritz K.: The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. Annals of Mathematics 46 (1945), 242 - 264.

[18] Galileo Galilei: Rozmowy i dowodzenia matematyczne (1638). Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego Instytutu Popierania Nauki, Warszawa, Pałac Staszica. 1930.

[19] Gergonnee M.: Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel. Annales de Mathématiques Pure et Appliquées 20 (1829-30), 213 - 284.

[20] Heine E.: Die Elemente der Functionenlehre. Crelle's Journal 74 (1872), 172 - 188.

[21] Hilbert D.: Grundlagen der Geometrie. 1899.

[22] Hilbert D.: Ueber den Zahlbegriff. Jahresbericht der deutschen Mathematiker - Vereinigung 8 (1900), 180 - 184.

[23] Huntington E. V.: Complete set of postulates for the theory of real quatities. Transactions of the American Mathematical Society 4 (1903), 358 - 370.

[24] Huntington E. V.: A set of postulates for real algebra, comprising postulates for a one - dimensional continuum and for the theory of groups. Transactions of the American Mathematical Society 6 (1905), 181 - 197.

[25] Jourdain P. E. B.: The development of the theory of transfinite numbers. Archiv der Mathematik und Physik (3), X (1906), 254 - 281; XIV (1908 - 1909), 287 - 311; XVI (1910), 21 - 43; XXII (1913 - 1914), 1 -21.

[26] Juszkiewicz A. P.: Leibniz i osnowanie isczislenija beskoneczno małych. Uspechi matematiczeskich nauk 3 (1948), No 1 (23), 150 - 164.

[27] Kulczycki S.: Z dziejów matematyki greckiej. PWN, Warszawa 1973.

[28] Lachaud G.: Exactitude et Approximation en Analyse diophantienne. Preprint 1987.

[29] Lagrange J. L.: Leçons sur le Calcul des Fonctions. Journal de l'École Polytechnique V (1804), 1 - 320; Supplément aux leçons sur le calcul des fonctions, données en l'an 7 [1799] a l'École Polytechnique. Ibidem VII (1808), 1 - 90.

[30] Lambert J. H.: Mémoire sur quelques propriétès remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Histoire Acad. - Roy. Sci. et Belles Lettr., Berlin, Année 1761, 265 - 322. Oper Math. II, 112 - 159.

[31] Legendre A. M.:Élements de Géometrie. 1794.

[32] Lindemann F.: Über die Zahl π. Mathematische Annalen 20 (1882), 213 - 225.

[33] Méray Ch.: Nouveaux précis d'analyse infinitésimal. Paris, Savy, 1872.

[34] Newton I.: Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber. 1707.

[35] Pierpont J.: Mathematical rigor, past and present. Bulletin of the American Mathematical Society 34 (1928), 23 - 53.

[36] WeierstraßK.: Mathematische Werke. Bde I - VII, Berlin 1894 - 1927.

[37] — : Augewähelte Kapitel aus der Funktionenlehre; Vorlesungen, gehalten in Berlin 1886. (Teubner = Archiv zur Mathematik, Band 9, 1988).

[38] Więsław W.: Problemy z niewymiernością - stworzenie liczb niewymiernych. Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie 9 (VII 1992), 17 - 29.

[39] — : Liczby niewymierne. CODN - SNM, Warszawa 1992.

Abstract

The paper presents the main steps in the history of irrational numbers. The chapters are as follows:

1. Antiquity.
2. Medieval century.
3. XVII-th century. Further examples of irrational numbers.
4. The first half of the XIX-th century. Further struggle with the irrationality.
5. Weierstrass' constructions — aggregates and decimal expansions.
6. Constructions of Méray, Cantor and Heine — the completion of the metric space of rational numbers.
7. Dedekind's construction — filling gaps in the ordered space $\mathbb{Q}$ of rational numbers.
8. Transcendence of e, π and other numbers.
9. Axiomatization of real numbers — Hilbert, Huntington.
10. New constructions of reals. Mahler's classification of irrational numbers.

Bibliography contains 39 references, mostly classical.