ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 76 Nr kol. 1287

Witold WIĘSŁAW

LICZBY ZESPOLONE I GEOMETRIA

Streszczenie

W pracy przedstawiony jest zarys historii liczb zespolonych. Opisana jest historia odkrycia kwaternionów przez Hamiltona. Na kilku przykładach zilustrowane są zastosowania liczb zespolonych w geometrii elementarnej.

COMPLEX NUMBERS AND GEOMETRY

Summary

A short history of complex numbers is presented. The history of discovery of quaternions by Hamilton is described. Examples of some applications of complex numbers to Euclidean geometry are given.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ГЕОМЕТРИЯ

Резюме

В работе представляется история комплексных чисел. Описана тоже история создания Гамильтоном кватернионов. Показаны примеры приложений комплексных чисел в элементарной геометрии.

1. Powstanie liczb zespolonych

Początki liczb zespolonych sięgają XVI wieku, kiedy to podjęto udane próby rozwiązania równań stopnia 3 i 4.

Girolamo Cardano (1501 - 1576) otrzymał rozwiązanie równania algebraicznego stopnia 3 od Niccolo Tartaglii (1500 - 1557), który wzorując się na „*Boskiej komedii*" Dantego

(1265 - 1321), podał sposób rozwiązania równania stopnia 3 w postaci ... wierszowanej. Wiersz (w wolnym przekładzie) zaczyna się następująco:

Kiedy sześcian z rzeczami razem

Równe są jakiejś liczbie,

Znajdą się dwie inne, na nią rozdzielające się ...

W wierszu Tartaglii opisany jest sposób rozwiązania równania

$$x^3 + ax = b, \quad a, b \in \mathbb{R}_+^\times,$$

w postaci $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, gdzie $u - v = b$, $uv = (a/3)^3$, skąd wynika, że u i v są pierwiastkami równania kwadratowego. Następnie Tartaglia znajduje rozwiązanie równania $x^3 = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}_+^\times$) w postaci $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, gdzie $u + v = b$ i $uv = (a/3)^3$.

Mimo że Cardano otrzymał od Tartaglii wspomniany wiersz pod warunkiem zachowania tajemnicy, znaleziony sposób rozwiązywania równań stopnia 3 opublikował w 1545 r. w „*Ars Magna*" („*Wielka sztuka*") jako własny.

Natomiast sposób rozwiązywania równań stopnia 4 podał Ludovico Ferrari (1522 - 1565), sprowadzając znalezienie pierwiastków wielomianu stopnia 4 do rozwiązywania równania stopnia 3 i dwóch równań kwadratowych.

Słynny spór, który wówczas rozgorzał o priorytet, jest dziś o tyle śmieszny, co mało istotny. Wiadomo bowiem, że w przypadku, gdy wielomian stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, pierwiastki te wyrażają się za pomocą formuł zwanych dziś *wzorami Cardano*, ale tkwią w nich liczby nierzeczywiste — pierwiastki z 1 stopnia 3, tzn. pierwiastki wielomianu $X^2 + X + 1$, których nie można się pozbyć. Jest to tzw. „*casus irreducilibis*" (*przypadek nieprzywiedlny*).

W pracach Cardano pojawiły się po raz pierwszy liczby zespolone, które nazywa „*czysto ujemnymi*" i „*sofistycznie ujemnymi*". Uważał je za bezużyteczne i starał się ich nie używać. Otrzymał je próbując podzielić liczbę 10 na dwie części tak, aby ich iloczyn był równy 40, tzn. rozwiązując układ równań

$$x + y = 10, \quad xy = 40.$$

Cardano pokazał, że warunki te spełniają liczby $x = 5 + \sqrt{-15}$ i $y = 5 - \sqrt{-15}$, jeśli mnożyć je, jak zwykłe liczby przyjmując, że $-\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} = 15$.

Matematycy w XVI wieku nie dysponowali jeszcze znanym nam zapisem algebraicznym, który kształtował się w XVII wieku, przez stopniowe wprowadzenie symboli literowych, symboli plus (+), minus (−), pierwiastka ($\sqrt{\ }$), znaku równości (=), Dopiero od XVIII stosowana jest do dziś obowiązująca symbolika algebraiczna. Aby zdać sobie sprawę, na jakie trudności natrafiali matematycy z XVI wieku, przytaczamy poniżej sposób zapisu u Cardana:

równanie $x^3 + 6x = 20$ zapisywał w postaci:

$$cub^9p: \ 6reb^9 \ ae\bar{q}lis \ 20,$$

gdzie cub^9 (cubus) oznacza sześcian, p — plus, reb^9 (rebus) oznacza niewiadomą, a $ae\bar{q}lis$ (aeqlis — równa się) — znak równości.
Natomiast wyrażenie

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

zapisał Cardano w postaci:

$$R_x.u.cu.R_x108p10|mR_x.u.cu.R_x.108m10 \ ,$$

gdzie R_x (Radix) oznacza pierwiastek, $R_x.u.cu$ (Radix universalis cubica) — pierwiastek sześcienny z wyrażenia do kreski pionowej |, p (plus) — dodawanie, m (minus) — odejmowanie. Tym bardziej należy chylić czoła przed matematykami tamtych czasów, którzy potrafili cokolwiek udowodnić, używając tak trudnej symboliki.

Pierwszym matematykiem, który docenił użyteczność liczb zespolonych, był inżynier - hydraulik Rafael Bombelli (1526 - 1573), autor *„L'Algebra"*, dzieła wydanego w 1572 r.. W dziele tym, oprócz opisania algorytmów rozwiązywania równań stopnia 3 i 4, opisuje reguły mnożenia liczb rzeczywistych przez urojone.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) w liście do H. Oldenberga (1615 - 1677) z 1676/77 wspomina już o rzeczywistej sumie liczb zespolonych sprzężonych.

Abraham de Moivre (1667 - 1754) odkrył wzór, noszący dziś jego nazwisko, w pracy z 1707 r. i opublikował w książce z 1730 r. w postaci:

$$2cosmx = (a + \sqrt{a^2-1})^m + (a - \sqrt{a^2-1})^m,$$

gdzie $a = cosx$ i $m \in \mathbb{N}$.

Mimo że Isaac Newton (1643 - 1727) znał już szeregi potęgowe dla e^x, $cosx$, $sinx$, to jednak dopiero Leonhard Euler (1707 - 1783) docenił i zastosował twierdzenie de Moivre'a, oraz wyraził e^{ix} ($x \in \mathbb{R}$) jako $cosx + isinx$ w *„Introductio in Analysin Infinitorum"*, (Lausanne 1748).

Wyrażenie iloczynu, ilorazu, potęgi, pierwiastka i logarytmu liczb zespolonych przez ich moduły i argumenty prócz Eulera podał także Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783) w 1746.

2. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Pierwszym autorem, który usiłował interpretować geometrycznie pierwiastki równania stopnia 2 o współczynnikach rzeczywistych był John Wallis (1616 - 1703). Interpretację taką podał w książce *„Algebra”* (Oxford 1685) wydanej najpierw po angielsku, a później — w 1693 — po łacinie. Następnie zajmował się tym Heinrich Kühn (1690 - 1769) w pracy: *„Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis, et radicibus imaginariis exhibendis”*, Novi Commentari Academiae Petropolitanae, tom III, Petrograd, 1753. (*„Rozważania o wielkościach urojonych ...”*).

Pierwszą poprawną interpretację liczb zespolonych podał Caspar Wessel (1745 - 1818), z wykształcenia prawnik. Praca *„Om Directionens analytiske Betegning”*, opublikowana w *„Rozprawach Duńskiej Akademii Królewskiej”* w 1799 r., nie była znana przez prawie sto lat. Podstawowa idea dzieła Wessela to zastosowanie przedstawienia liczb zespolonych jako wektorów.

Wektory zapisuje Wessel w postaci $u + v\epsilon$, a działania na nich określa następująco:

$$(a + b\epsilon) \cdot (c + d\epsilon) := (ac - bd) + (ad + bc)\epsilon$$

$$(a + b\epsilon) + (c + d\epsilon) := (a + c) + (b + d)\epsilon.$$

Jean Robert Argand (1768 - 1822) opublikował w 1806 r. pracę: *„Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques”*. Praca ta ukazała się później w Annales de Mathematiques Pures et Appliquées, w tomie 4 (1813), 133 - 147. Argand pokazał swoją pracę Adrien Marie Legendre'owi (1752 - 1833), który udzielił mu kilku wskazówek. Legendre wspomniał o tym wyniku w liście do Françaisa. Gdy Français zmarł, jego brat, J. F. Français znalazł ten list i na jego podstawie rozwinął temat wg własnego pomysłu, publikując pracę: *„Nouveaux principes de géometrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginares”*, w Annales de Mathématiques, tom 4 (1813), 61 - 71.

Koło się zamknęło! Publikację J. F. Françaisa zauważył Argand, który napisał do niego z informacją o własnych wynikach. W tym samym tomie Annales de Mathématiques (tom 4 (1813), 227 - 227) Français opublikował krótką notę, w której wyjaśnił, że priorytet należy do Arganda.

W dziełach Karla Friedricha Gaussa (1777 - 1855) znajdujemy interpretację geometryczną liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny, ale dopiero w jego korespondencji w latach 1817 - 1831. Natomiast nie ma takiej interpretacji w *„Dzienniku”* Gaussa, co mu się powszechnie przypisuje. Jest to może szczegół, ale dość istotny, wskazujący na tendencję przypisywania wielkim tego świata tego, czego nie zrobili.

Pierwsza formalna definicja liczb zespolonych jako zbioru $\mathbb{R}^2$ z działaniami określonymi wzorami:

$$\begin{array}{rcl} (a, b) + (c, d) & := & (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) & := & (ac - bd, ad + bc) \end{array} \tag{1}$$

pochodzi od Williama Rowana Hamiltona (1805 - 1865) z 1837. Konstrukcja ta opublikowana jest w jego książce: *„Preface to 'Lectures on Quaternions' ”*, Dublin 1853.

Formalną konstrukcję ciała $\mathbb{C}$ liczb zespolonych podał też Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) w 1847. Konstrukcja Cauchy'ego, we współczesnym języku matematycznym, to konstrukcja tzw. pierścienia ilorazowego $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

3. Zasadnicze twierdzenie algebry

Od czasów starożytnych aż do połowy XIX stulecia algebra była nauką o rozwiązywaniu równań algebraicznych. Termin „algebra" wywodzi się od tytułu dzieła Alchwarizmiego (780 - 850), którego pełne nazwisko brzmi: Abdullah Mohammed ibn Musa Alchwarizmi al Maguzi. Niekiedy nazwisko jego cytowane jest jako Al - Chorezmi, od nazwy miasta Chorezm w Azji Srodkowej, w którym żył i pracował. Jedno z licznych dzieł Alchwarizmiego nosi tytuł: *„Al - kitab al - muhtaser fi hisab al - dżabr wa' l - mukabala"* (*„Krótka księga o rachunku algebry i almukabały"*). Traktat ten został przetłumaczony w XII w. na łacinę jako *„Liber de algebra et almucabala"*. *Al - dżabr* oznacza przenoszenie wyrazów w równaniu na drugą stronę równania ze zmianą znaku, a *al - mukabala* oznacza łączenie wyrazów podobnych. Od tytułu tego dzieła w zlatynizowanej postaci *„algebra"* wywodzi się współczesny termin *algebra*. Podobnie, termin *„algorytm"* pochodzi od nazwiska Alchwarizmiego, który opisał wiele algorytmów algebry.

Zasadnicze twierdzenie algebry zostało sformułowane po raz pierwszy przez Alberta Girarda (1595 - 1632) w 1629 i Kartezjusza w 1637 w postaci istotnie różniącej się od współczesnego sformułowania. Twierdzili oni mianowicie, że równanie algebraiczne stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków. W domyśle pozostawało, że wielomian ma współczynniki rzeczywiste i chodzi o pierwiastki rzeczywiste.

W latach czterdziestych XVIII stulecia Colin Maclaurin (1698 - 1746) i wspomniany już wcześniej Leonhard Euler podali sformułowanie, równoważne współczesnemu: każdy wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ stopnia $n \geq 1$ jest iloczynem wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia 1 i trójmianów kwadratowych o wyróżniku ujemnym.

Pierwszy dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry zaproponował d'Alembert w 1746. Uczeni XVIII nie dopatrzyli się nieścisłości w jego dowodzie, choć uznali dowód za zbyt analityczny. W tych czasach panowało przeświadczenie, że twierdzeń algebry należy dowodzić metodami algebraicznymi, twierdzeń analizy — metodami analitycznymi, a twierdzeń geometrii wyłącznie geometrycznymi. Dziś wiadomo, że mimo sformułowania algebraicznego, Zasadnicze Twierdzenie Algebry jest, o ironio!, twierdzeniem analizy matematycznej. Przecież, oprócz własności wyłącznie algebraicznych, liczby (zespolone lub rzeczywiste) mają odpowiednie własności analityczne i geometryczne. Dalsze dowody Zasadniczego Twierdzenia miały na celu ograniczyć do minimum użycie metod analitycznych. Jeden z takich dowodów, zresztą niekompletny, zaproponowany przez Eulera (1749, opublikowany w 1751 r.) zredukował dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry (w wersji Maclaurina) do wykazania, że:

1° każdy wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty,

2° każdy wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ stopnia parzystego, którego wyraz wolny $f(0)$ jest ujemny, ma co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste, w których jeden jest dodatni, a drugi ujemny.

Nieścisłości w dowodzie Eulera znalazł François Daviet de Foncenex, po czym opublikował swój dowód w 1759, też zawierający luki.

W 1772 Lagrange usiłował uściślić luki w dowodzie Eulera, publikując na ten temat dwudziestosiedmiostronicową pracę. Prace Eulera i Lagrange'a poświęcone Zasadniczemu Twierdzeniu Algebry zostały zapomniane. Zostały one przyćmione przez młodego Gaussa, który podał dowód tego twierdzenia w 1797 (opublikowany w 1799) w wersji dotyczącej pierwiastków wielomianu o współczynnikach rzeczywistych. Dowód ten był na tyle ścisły, że usatysfakcjonował ówczesnych matematyków. Za dowód tak sławnego twierdzenia otrzymał Gauss stopień doktorski na Uniwersytecie w Helmstead, niedaleko rodzimego miasta Gaussa, Brunszwiku (Braunschweig). Doktorat uzyskany był *„in absentia"* — pod nieobecność — Gaussowi nadano doktorat mimo jego nieobecności w czasie obrony, co należało do rzadkości. Była to niewątpliwie forma uznania wyniku Gaussa. Później Gauss znalazł jeszcze trzy różne dowody Zasadniczego Twierdzenia: w 1816 r. dwa dowody i w roku 1849. Ten ostatni dowód, tak jak pierwszy dowód Gaussa, dotyczył wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Okazuje się jednak, że dowody Eulera i później Lagrange'a nie były tak złe, jak wcześniej uważano. Dziś są one podstawą „algebraicznego dowodu", tzn. dowodu, który tylko w nieznacznym stopniu korzysta z metod analizy matematycznej.

O tym, że — w istocie — dowód Eulera był poprawny, świadczy fragment listu Gaussa do jego przyjaciela ze studiów w Getyndze, Farkasa Bolyaia (ojca Janosa Bolyaia, odkrywcy, niezależnie od Łobaczewskiego, geometrii nieeuklidesowej). Oto co Gauss pisał do Farkasa o swojej rozprawie doktorskiej:

„Praca poświęcona jest tylko w 1/3 dowodowi twierdzenia. Reszta zawiera głównie historię i uwagi krytyczne o dowodach innych matematyków (d'Alemberta, Bougainville'a, Eulera, de Foncenex, Lagrange'a)."

Znany algebraik drugiej połowy XIX wieku, Georg Frobenius (1849 - 1917), tak pisał w 1907 r. po zapoznaniu się z pracą Eulera:

„On przeprowadził dla istnienia pierwiastków równania dowód w większej części algebraiczny, który oparty był na tym, że każde równanie stopnia nieparzy-

stego ma rzeczywisty pierwiastek. Uważam za niesprawiedliwe, że dowód ten przypisuje się wyłącznie Gaussowi, który tylko nadał mu ostateczną postać."

4. Odkrycie kwaternionów przez Hamiltona

Można zapytać, czy istnieją podobne konstrukcje do konstrukcji liczb zespolonych jako par liczb rzeczywistych z odpowiednio zdefiniowanymi działaniami. Konstrukcję taką dla $\mathbb{C}^2$ podał Hamilton w 1843 r.. Konstrukcja sprowadza się do zdefiniowania dodawania i mnożenia w $\mathbb{C}^2$ wzorami:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c}) \end{aligned} \tag{2}$$

Okazuje się, że otrzymany zbiór $\mathbb{H}$ złożony z par liczb zespolonych z tak określonymi działaniami spełnia wszystkie aksjomaty ciała, z wyjątkiem przemienności mnożenia. Elementy zbioru $\mathbb{H}$ Hamilton nazwał *kwaternionami*, a $\mathbb{H}$ nazywamy dziś *algebrą kwaternionów*.

A oto jak Hamilton dokonał tego odkrycia. Pisze o tym szczegółowo w swoim *„Dzienniku"* [1]. Wynika z niego niezbicie, że odkrycie kwaternionów nie było dziełem przypadku, ale wynikiem systematycznej i mozolnej pracy Hamiltona. W swoim *„Dzienniku"* pod datą 16 października 1843 ([1], str. 103 - 105) opisuje Hamilton szczegółowo, jak dodkonał odkrycia kwaternionów:

„16 października 1843. Dzisiejszego poranka zostałem naprowadzony na coś, co wydaje mi się teorią kwaternionów, która może mieć interesujący rozwój. Rozważmy pary reprezentowane przez punkty płaszczyzny, itd."

Punkty płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ można interpretować jako liczby zespolone $z = x + iy$, przekształcając w ten sposób zbiór punktów płaszczyzny w ciało. Innymi słowy, w $\mathbb{R}^2$ można określić mnożenie, które ma dobrze znane własności: jest przemienne, łączne, rozdzielne względem dodawania itd. Na tym, w gruncie rzeczy, polegała formalna definicja liczb zespolonych jako par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, z odpowiednio określonymi działaniami (por. [1]). Hamilton próbuje powtórzyć tę konstrukcję w $\mathbb{R}^3$. Rozpatruje mianowicie płaszczyznę $\mathbb{C}$, rozpiętą jako przestrzeń liniowa na liczbach 1 oraz i^2 ($i^2 = -1$). Rzecz jasna Hamilton nie operował jeszcze pojęciem przestrzeni liniowej. Następnie prowadzi prostą prostopadłą do tej płaszczyzny, z wektorem jednostkowym j, $j^2 = -1$. A zatem każdy punkt α przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci:

$$\alpha = x + yi + jz, \quad \text{gdzie } x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Jeżeli na elementach postaci (3) ma być określone mnożenie, to ij też powinno być postaci (3). Hamilton rozważa różne przypadki, np. $ij = 0$; potem $ij = -ji$. Korzystając z różnych (na ogół geometrycznych) rozważań dochodzi do sprzeczności. *Implicite* postuluje, aby długość wektora w $\mathbb{R}^3$ określona dla wektora α postaci (3) wzorem

$$|\alpha| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \tag{4}$$

miała podobne własności jak moduł dla liczb zespolonych, tzn. aby

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3. \tag{5}$$

Hamilton zauważa, że w $\mathbb{R}^3$, mówiąc językiem współczesnym, nie można określić mnożenia tak, aby przestrzeń $\mathbb{R}^3$ ze zwykłym dodawaniem wektorów

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'), \tag{6}$$

(albo w sposób równoważny, dla elementów postaci (3): $\alpha+\alpha' = (x+x')+(y+y')i+(z+z')j$) i tak określonym mnożeniem, przekształcić w ciało. Co dziwniejsze, Hamilton był o krok od dowodu, że nie jest to możliwe.

A oto jak wygląda uzupełnienie luki w dowodzie Hamiltona.

Załóżmy, że w $\mathbb{R}^3$ jest określone mnożenie o żądanych własnościach. Niech

$$ij = a + bi + cj, \text{ gdzie } i^2 = j^2 = -1, \quad i \neq j. \tag{7}$$

Wówczas

$$-j = i^2j = i(ij) = i(a + bi + cj) =$$
$$ai - b + c(a + bi + cj) = (-b + ca) + (a + bc)i + c^2j,$$

skąd wynika, że

$$-b + ca = 0, \quad a + bc = 0, \quad c^2 = -1.$$

Ponieważ $a, b, c \in \mathbb{R}$, z założenia, więc ostatnia równość nie jest możliwa.

Nie mogąc sobie poradzić z $\mathbb{R}^3$, Hamilton przyjmuje, że ij jest nowym elementem k. Zatem

$$k = ij, \text{ a ponadto postuluje, aby } k^2 = -1. \tag{8}$$

Dalsze rozważania doprowadzają go do definicji kwaternionu.

Kwaternionem („*quaternion*") nazywa Hamilton wyrażenie postaci:

$$q = a + bi + cj + dk \tag{9}$$

z rzeczywistymi współczynnikami a, b, c, d, ze zwykłym dodawaniem wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i mnożeniem zdefiniowanym na wektorach bazy $1, i, j, k$ w następujący sposób:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad k = ij, \quad i = jk, \quad j = ki, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j. \tag{10}$$

Niech $\mathbb{H}$ oznacza, dla uczczenia Hamiltona, zbiór wszystkich kwaternionów, tzn. zbiór wszystkich wyrażeń postaci (9). Definiując normę kwaternionu q postaci (9) jako długość wektora q z $\mathbb{R}^4$, tzn. jako:

$$|q| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}, \tag{11}$$

otrzymujemy bez trudu *tożsamość Lagrange'a* (znaną już wcześniej Eulerowi w szczególnych przypadkach):

$$|qq'|^2 = |q|^2|q'|^2 \textit{ dla dowolnych } q, q' \in \mathbb{H}. \tag{12}$$

Pomijamy tu (ze względu na oszczędność miejsca) jawną postać tej tożsamości. Przypomnijmy w tym miejscu, że tożsamość (12) posłużyła Lagrange'owi w 1769 roku do dowodu jego słynnego twierdzenia o czterech kwadratach:

każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb całkowitych.

W omawianym tu fragmencie *„Dziennika"* Hamilton zdefiniował też funkcję wykładniczą kwaternionu:

$$exp(q) = 1 + \frac{1}{1!}q + \frac{1}{2!}q^2 + \frac{1}{3!}q^3 + \ldots.$$

Arthur Cayley (1821 - 1895) określił w 1845 r. działanie na parach kwaternionów, otrzymując w ten sposób *algebrę oktaw Cayleya*. Jednakże mnożenie oktaw nie jest przemienne i nie jest łączne.

Wyniki Hamiltona i Cayleya uwieńczyło twierdzenie Frobeniusa z 1878 roku — udowodnił on, że jeżeli $\mathbb{R}^n$ ze zwykłym dodawaniem i odpowiednio określonym mnożeniem spełnia aksjomaty ciała, z wyjątkiem przemienności mnożenia, zastępując łączność alternatywnością (tzn. $x(yz) = (xy)z$ dla dowolnych $x, y, z \in \{a, b\}$, a, b dowolne), to $n = 1, 2, 4$ lub 8 i odpowiednio otrzymujemy $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ lub algebrę $\mathbb{D}$ oktaw Cayleya.

Odnotujmy na koniec, że termin *„łączność"* pochodzi od F. J. Servois z 1814. Natomiast terminy: *„rozdzielność mnożenia względem dodawania"* i *„przemienność"* pochodzą od Hamiltona, z jego dzieła poświęconego kwaternionom (*„Preface to 'Lectures on Quaternions'"*, Dublin 1853).

Symbol jednostki urojonej: $i = \sqrt{-1}$ zaproponował Euler w 1777 r., a upowszechnił Gauss w swym dziele *„Disquisitiones Arithmeticae"*, Lipsiae 1801 — *„Rozważania arytmetyczne"*). Termin *„liczba zespolona"* znajdujemy u Carnota (1803), lecz w użycie wszedł dzięki Gaussowi (1831). Termin *„sprzężony"* wprowadził A. L. Cauchy w 1821, *„moduł"* pochodzi od Arganda, a *„wartość bezwzględna"* od Karla Weierstrassa z połowy XIX wieku.

Wobec powyższych faktów nasuwa się pytanie: jak rozwiązać kłopoty związane z algebraizacją przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

Okazuje się jednak, że można jakoś wybrnąć z tej sytuacji. W tym samym czasie, kiedy Hamilton dokonał swojego odkrycia (niemożność przekształcenia zbioru wektorów trójwymiarowych w ciało i konstrukcja kwaternionów), inny matematyk, nauczyciel gimnazjalny ze Szczecina, Hermann Grassmann (1809 - 1877) wydał w 1844 r. książkę pt. *„Ausdehnunggslehre"* czyli *„Nauka o rozciągłości"*, w której zdefiniował różne ważne dla matematyki pojęcia, zapoczątkowując (niezależnie od Arthura Cayleya, który w tym czasie zajmował się podobnymi zagadnieniami, tylko inaczej) rozwój *algebry liniowej*. Grassmann określił tzw. *iloczyn wektorowy*. W tym miejscu warto odnotować, że życie Grassmanna nie było usłane różami. Pierwsze wydanie *„Nauki o rozciągłości"* z 1844 r. zostało wycofane ze sprzedaży, bo sprzedaż była minimalna. Drugie wydanie z 1862 r. cieszyło się jeszcze mniejszym zainteresowaniem i dlatego Grassmann zniechęcił się i zajął się sanskrytem, usuwając się na długie lata od pracy matematycznej.

W końcu lat sześćdziesiątych ubiegłego stulecia nastąpił zwrot przepowiedziany w przedmowie do drugiej części dzieła, gdyż Grassmann był przekonany o żywotności swojego dzieła. Na rynku antykwarycznym szybko zaczęła podnosić się cena pierwszej części oraz wyczerpanej części drugiej. W 1878 r., a więc już po śmierci Grassmanna, ukazał się przedruk dzieła z 1844 r. z przedmową, którą jeszcze autor zdążył napisać.

W przedmowie do II wydania Grassmann pisał:

> *„Mam głębokie przeświadczenie, że nie zaginie praca włożona w przedstawione tu umiejętności [...]. Lecz wiem także i muszę to wypowiedzieć, że choćbym miał się narazić na zarzut zarozumiałości, że gdyby nawet dzieło to miało przeleżeć lat 17 lub dłużej bez pożytku, bez wniknięcia w żywy rozwój nauki, to nadejdzie wszelako chwila, w której wyciągnięte będzie z pyłu zapomnienia i w której myśli w niem złożone zaczną przynosić owoce".*

Jak widać z powyższego, Grassmannowi nie bez trudu przyszło wprowadzenie do matematyki pojęcia iloczynu wektorowego.

5. Liczby zespolone w geometrii euklidesowej

Interpretacja liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny pozwala formułować zagadnienia geometrii płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ w języku liczb zespolonych. Na przykład, każde *przekształcenie afiniczne* płaszczyzny $\mathbb{C}$ ma postać: $f(z) = az + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ są stałymi.

Można udowodnić, że przekształcenie $z' = O_\alpha(z) = \varepsilon_\alpha z$, gdzie ε_α jest liczbą o module 1 i argumencie α, tzn. $\varepsilon_\alpha = cos\alpha + isin\alpha$, opisuje *obrót o kąt* α wokół punktu 0 (początek układu współrzędnych). Pozwala to na natychmiastowe odtworzenie wzorów na współrzędne punktu z po obrocie o kąt α: jeżeli $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$. to z poprzedniej równości wynika, że

$$\begin{aligned} x' &= x cos\alpha - y sin\alpha \\ y' &= x sin\alpha + y cos\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Przekształcenie $z' = t_a(z) = a + z$, ($a \in \mathbb{C}$ ustalone) opisuje *translację* (przesunięcie równoległe) płaszczyzny $\mathbb{C}$ liczb zespolonych o wektor $\overline{0a}$. Z przytoczonych faktów łatwo wyprowadzić wzory na obrót o kąt α wokół punktu $c \in \mathbb{C}$. Istotnie, niech $z' = f(z)$ będzie obrotem o kąt α wokół c. Przypomnimy w tym miejscu ogólny fakt, że jeżeli $f = g \circ h$ jest złożeniem funkcji g i h:

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z,$$
$$\underset{f=g\circ h}{\longrightarrow}$$

tzn. składamy funkcje posuwając się w przeciwnym kierunku do strzałek w diagramie.

Uzbrojeni w tę uwagę rozważmy obrót f wokół punktu $c \in \mathbb{C}$ o kąt α. Najpierw dokonamy translacji t_{-c} przesuwając c do punktu zero, następnie obróćmy o kąt α wokół zera, tzn. O_α i wróćmy do punktu c, a więc wykonajmy translację t_c. Zatem

$$f = t_c \circ O_\alpha \circ t_{-c},$$

czyli $f(z) = t_c(O_\alpha(t_{-c}(z)) = c + \varepsilon_\alpha(-c + z) = c(1 - \varepsilon_\alpha) + \varepsilon_\alpha z$, co podobnie, jak w przypadku obrotu wokół zera, daje wzory:

$$\begin{aligned} x' &= a + x cos\alpha - y sin\alpha \\ y' &= b + x sin\alpha + y cos\alpha, \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie $a = Re(c(1 - \varepsilon_\alpha))$, $b = Im(c(1 - \varepsilon_\alpha))$.

Symetrią S_c względem punktu $c \in \mathbb{C}$ nazywamy obrót o kąt π wokół c. Z powyższych wzorów wynika więc, że

$$S_c(z) = 2c - z \tag{15}$$

opisuje symetrię względem punktu c. Ze wzoru (15) można z łatwością wyprowadzić własności symetrii.

Przypomnijmy, że *izometria* to odwzorowanie płaszczyzny na siebie, które zachowuje odległości między punktami. Jeżeli więc g jest izometrią płaszczyzny $\mathbb{C}$, to

$$|g(p) - g(q)| = |p - q| \tag{16}$$

dla każdej pary punktów $p, q \in \mathbb{C}$. Na przykład funkcje: translacja t_c, obrót O_α, symetria S_c względem punktu c, czy też symetria $s(z) = \bar{z}$ (odbicie) względem osi rzeczywistej są izometriami $\mathbb{C}$. Nietrudno opisać izometrie płaszczyzny $\mathbb{C}$. Mianowicie:

każda izometria g płaszczyzny $\mathbb{C}$ liczb zespolonych jest translacją, obrotem, symetrią względem prostej lub też złożeniem takich przekształceń.

tzn. ma postać:

$$g = t_c \circ O_\alpha \quad lub \quad g = t_c \circ O_\alpha \circ s. \tag{17}$$

Istotnie, jeżeli g jest izometrią, to funkcja f zdefiniowana wzorem:

$$f(z) = g(z) - g(0), \quad tzn. f = t_{-c} \circ g, \quad c = g(0)$$

też jest izometrią, a ponadto $g(0) = 0$.

Odnotujmy łatwy do udowodnienia wzór:

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2Re(a\bar{b}). \tag{18}$$

Podstawiając we wzorze (17) $a = f(z)$, $b = f(1)$, korzystając z (16) i (17), otrzymuje się, że $Re(f(z)\overline{f(1)}) = Re(z)$. Podobnie, stosując ten wzór do $a = f(z)$, $b = f(i)$, otrzymujemy $Re(f(z)\overline{f(i)}) = Re(z\bar{i})$. Ponieważ $Re(w\bar{i}) = Im(w)$, więc daje to równość $\pm Im(f(z)\overline{f(1)}) = Im(z)$. Ostatecznie dostajemy $f(z)\overline{f(1)} = z$ lub $f(z) = \bar{z}$, czyli $f(z) = f(1)z$ lub $f(z) = f(1)\bar{z}$, co kończy dowód.

Innym przykładem zastosowań liczb zespolonych w geometrii euklidesowej mogą być np. łatwe dowody następujących twierdzeń:

A. Własność równoległoboku: w równoległoboku suma kwadratów długości boków jest równa sumie kwadratów długości jego przekątnych.

B. Jeżeli czworokąt jest wypukły, a, b, c, d są długościami jego boków, e, f długościami przekątnych, a g odległością środków przekątnych, to

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2.$$

C. Twierdzenie Leibniza: jeżeli $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ są wierzchołkami trójkąta, q — jego środkiem ciężkości, a $z \in \mathbb{C}$ dowolnym punktem, to

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = |z_1 - q|^2 + |z_2 - q|^2 + |z_3 - q|^2 + 3|z - q|^2.$$

Tych i podobnych twierdzeń dowodzi się łatwo, korzystając z interpretacji geometrycznej liczb zespolonych.

Liczby zespolone mają też zastosowanie w geometrii hiperbolicznej. Na przykład półpłaszczyzna $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ lub też wnętrze koła $\mathbf{T}$ o środku w zerze o promieniu $1 : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ są znanymi modelami Poincarégo geometrii hiperbolicznej. Ale to już temat na inną okazję.

Te i inne zastosowania liczb zespolonych w geometrii elementarnej można znaleźć w [2]. Zawiera ona, m. in. liczne źródła historyczne. Dlatego też pomijamy je poniżej w bibliografii.

Literatura

[1] The mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, vol. III, Algebra, Cambridge, the University Press 1967.

[2] Więsław W.: Liczby i geometria. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995.

Abstract

The paper gives a short history of complex numbers and their applications to elementary geometry, based on author's book: *„Numbers and geometry"* (in polish). Discussion is divided in five chapters:

1. Creation of complex numbers.
2. Geometrical presentation of complex numbers.
3. The Fundamental Theorem of Algebra.
4. Discovery of quaternions by Hamilton.
5. Complex numbers in Euclidean geometry.

As application, description of isometries of the Euclidean plan is given. Some extensions of Pitagoras Theorem are formulated in the language of complex numbers.