ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: GÓRNICTWO z. 253 Nr kol. 1566

Władysław ZAPAŁA
Politechnika Śląska, Gliwice

REKURENCYJNA METODA PROJEKTOWANIA CYFROWYCH FILTRÓW RÓŻNICZKUJĄCYCH

Streszczenie. W referacie przedstawiono nową metodę projektowania filtrów cyfrowych dla pochodnych pierwszego i drugiego rzędu. Oryginalność metody polega na rekurencyjnym obliczaniu współczynników filtru dla zadanego rzędu filtru.

RECURSIVE DESIGNING METHOD OF DIGITAL DIFFERENTIATING FILTERS

Summary. New designing method of digital filters for first and second degree derivatives has been presented in the paper. Originality of the presented method is based on recursive calculation of filter coefficients for fixed order of the filter.

1. Wstęp

Istnieją różne metody projektowania filtrów cyfrowych, których zadaniem jest obliczanie pochodnych sygnałów. W referacie przedstawiono nową metodę projektowania polegającą na rekurencyjnym obliczaniu współczynników filtru dla zadanego rzędu filtru cyfrowego. Zaprezentowana metoda rekurencyjna może być wykorzystana do projektowania filtrów cyfrowych dla pierwszej i drugiej pochodnej sygnałów obserwowanych w dyskretnych chwilach czasu. W referacie wykazano także, że ciągi filtrów projektowanych za pomocą metody rekurencyjnej są zbieżne do filtrów cyfrowych o idealnych charakterystykach częstotliwościowych.

2. Szkic wyprowadzenia wzorów dla metody rekurencyjnej

W celu wyprowadzenia wzorów dla rekurencyjnego projektowania cyfrowych filtrów różniczkujących wykorzystano szereg nieskończony odkryty przez angielskiego matematyka Brooka Taylora

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot (x-a)^i, \tag{1}$$

gdzie:

f(x) - funkcja ciągła zmiennej x,

$C_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$,

$f^{(i)}(a)$ - pochodna rzędu i funkcji f(x) w punkcie x=a,

który powstaje z wyrażenia Taylora

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+....+\frac{f^{(i-1)}(a)}{(i-1)!}\cdot(x-a)^{i-1}+R_i, \tag{2}$$

jeżeli reszta R_i dąży do zera oraz gdy i dąży do nieskończoności.

Po przyjęciu, że $x = t \pm T$, a=t, i=3 oraz że ciągła funkcja czasu f(t) rozwijalna w szereg Taylora jest obserwowana w czasie dyskretnym z okresem próbkowania równym T, pochodne zerowego, pierwszego i drugiego rzędu można w przybliżeniu obliczyć w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix} 1 & (-T)^1 & (-T)^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & T^1 & T^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{f^{(0)}(t)}{0!} \\ \frac{f^{(1)}(t)}{1!} \\ \frac{f^{(2)}(t)}{2!} \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} f(t-T) \\ f(t) \\ f(t+T) \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{f^{(0)}(t)}{0!} \\ \frac{f^{(1)}(t)}{1!} \\ \frac{f^{(2)}(t)}{2!} \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & (-T)^1 & (-T)^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & T^1 & T^2 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} f(t-T) \\ f(t) \\ f(t+T) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2T} & 0 & \frac{1}{2T} \\ \frac{1}{2T^2} & -\frac{1}{T^2} & \frac{1}{2T^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(t-T) \\ f(t) \\ f(t+T) \end{vmatrix} \tag{4}$$

Uwzględniając większą liczbę wyrazów we wzorze Taylora i wykonując podobne obliczenia można utworzyć następujący ciąg macierzy kwadratowych:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & (-T)^1 & (-T)^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & T^1 & T^2 \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & (-2T)^1 & (-2T)^2 & (-2T)^3 & (-2T)^4 \\ 1 & (-T)^1 & (-T)^2 & (-T)^3 & (-T)^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T^1 & T^2 & T^3 & T^4 \\ 1 & (2T)^1 & (2T)^2 & (2T)^3 & (2T)^4 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$D_{2k+1} = \begin{vmatrix} 1 & (-kT)^1 & (-kT)^2 & \ldots & \ldots & (-kT)^{2k-1} & (-kT)^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (-T)^1 & (-T)^2 & \ldots & \ldots & (-T)^{2k-1} & (-T)^{2k} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & T^1 & T^2 & \ldots & \ldots & T^{2k-1} & T^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (kT)^1 & (kT)^2 & \ldots & \ldots & (kT)^{2k-1} & (kT)^{2k} \end{vmatrix} \tag{5}$$

i odpowiadający temu ciągowi macierzy ciąg macierzy odwrotnych:

$$D_3^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2T} & 0 & \frac{1}{2T} \\ \frac{1}{2T^2} & \frac{-1}{T^2} & \frac{1}{2T^2} \end{vmatrix}, \quad D_5^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12T} & -\frac{2}{3T} & 0 & \frac{2}{3T} & -\frac{1}{12T} \\ -\frac{1}{24T^2} & \frac{2}{3T^2} & -\frac{5}{4T^2} & \frac{2}{3T^2} & -\frac{1}{24T^2} \\ -\frac{1}{12T^3} & \frac{1}{6T^3} & 0 & -\frac{1}{6T^3} & \frac{1}{12T^3} \\ \frac{1}{24T^4} & -\frac{1}{6T^4} & \frac{1}{4T^4} & -\frac{1}{6T^4} & \frac{1}{24T^4} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$D_{2k+1}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & (-kT)^1 & (-kT)^2 & \ldots & \ldots & (-kT)^{2k-1} & (-kT)^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (-T)^1 & (-T)^2 & \ldots & \ldots & (-T)^{2k-1} & (-T)^{2k} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & T^1 & T^2 & \ldots & \ldots & T^{2k-1} & T^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (kT)^1 & (kT)^2 & \ldots & \ldots & (kT)^{2k-1} & (kT)^{2k} \end{vmatrix}^{-1} \tag{6}$$

W utworzonym w ten sposób ciągu macierzy odwrotnych

a) elementy pierwszego wiersza każdej macierzy odwrotnej dokładnie opisują odpowiedź impulsową filtru cyfrowego, który wyznacza pochodną zerowego rzędu funkcji f(t),

b) elementy drugiego wiersza pomnożone przez 1! opisują odpowiedź impulsową filtru, który wyznacza przybliżoną wartość pochodnej pierwszego rzędu funkcji f(t),

c) elementy trzeciego wiersza pomnożone przez 2! opisują odpowiedź impulsową filtru, który wyznacza przybliżoną wartość drugiej pochodnej funkcji f(t) itd.

Kolejne macierze odwrotne o większych rozmiarach wchodzące w skład utworzonego ciągu macierzy według przedstawionego algorytmu zawierają współczynniki filtrów o większych rzędach, które coraz dokładniej przybliżają poszczególne pochodne funkcji.

3. Wzory rekurencyjne dla cyfrowych filtrów różniczkujących

Na podstawie schematu obliczeń przedstawionego w poprzednim rozdziale opracowano wzory rekurencyjne służące do wyznaczania współczynników filtru różniczkującego o z góry zadanym rzędzie równym r=2k+1. Wzory rekurencyjne są szczególnie przydatne dla projektowania filtrów o wysokich rzędach.

3.1. Wzory dla pierwszej pochodnej

Równanie filtru ma postać:

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{1}{T}\cdot[-\sum_{n=1}^{k} a_n^{(k)}\cdot f(t-nT) + a_0^{(k)}\cdot f(t) + \sum_{n=1}^{k} a_n^{(k)}\cdot f(t+nT)] \tag{7}$$

Współczynniki $a_0^{(k)} = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, \infty$. Pozostałe współczynniki $a_n^{(k)}$ wyznacza się rekurencyjnie według następujących wzorów:

$$a_n^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n!)^2}{n\cdot(2\cdot n)!} \quad \text{gdy} \quad n=k \tag{8}$$

$$a_n^{(k)} = a_n^{(k-1)}\cdot\frac{k}{k-n}\cdot\frac{k}{k+n} \quad \text{gdy} \quad n=1, 2, \ldots, k-1. \tag{9}$$

Przykład obliczeń rekurencyjnych:

$$k=1,\quad a_1^{(1)} = \frac{(-1)^0 \cdot (1!)^2}{1\cdot(2\cdot 1)!} = \frac{1}{2}$$

$$k=2,\quad a_1^{(2)} = a_1^{(1)} \cdot \frac{2}{2-1} \cdot \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_2^{(2)} = \frac{(-1)^1 \cdot (2!)^2}{2\cdot(2\cdot 2)!} = -\frac{1}{12} \tag{10}$$

$$k=3,\quad a_1^{(3)} = a_1^{(2)} \cdot \frac{3}{3-1} \cdot \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} \cdot \frac{3}{3-2} \cdot \frac{3}{3+2} = -\frac{3}{20}$$

$$a_3^{(3)} = \frac{(-1)^2 \cdot (3!)^2}{3\cdot(2\cdot 3)!} = \frac{1}{60} \qquad \text{itd.}$$

Tablica 1

Współczynniki pierwszych siedmiu filtrów cyfrowych dla pochodnej pierwszego rzędu

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	.....	$k\to\infty$
$a_0^{(k)}$	0	0	0	0	0	0	0	.....	$\to 0$
$a_1^{(k)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	.....	$\to 1$
$a_2^{(k)}$		$-\frac{1}{12}$	$-\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{21}$	$-\frac{15}{56}$	$-\frac{7}{24}$	.....	$\to -\frac{1}{2}$
$a_3^{(k)}$			$\frac{1}{60}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{63}$	$\frac{7}{72}$	.....	$\to \frac{1}{3}$
$a_4^{(k)}$				$-\frac{1}{280}$	$-\frac{5}{504}$	$-\frac{1}{56}$	$-\frac{7}{264}$	.....	$\to -\frac{1}{4}$
$a_5^{(k)}$					$\frac{1}{1260}$	$\frac{1}{385}$	$\frac{7}{1320}$	.....	$\to \frac{1}{5}$
$a_6^{(k)}$						$-\frac{1}{5544}$	$-\frac{7}{10296}$	.....	$\to -\frac{1}{6}$
$a_7^{(k)}$							$\frac{1}{24024}$	.....	$\to \frac{1}{7}$

W tablicy 1 przedstawiono obliczone rekurencyjnie współczynniki pierwszych siedmiu filtrów cyfrowych dla pochodnej pierwszego rzędu. W ostatniej kolumnie tej tablicy zamieszczono wartości pierwszych siedmiu współczynników filtru cyfrowego, którego rząd jest nieskończony.

3.2. Wzory dla drugiej pochodnej

Równanie filtru cyfrowego dla drugiej pochodnej ma postać:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{T^2}\cdot[+\sum_{n=1}^{k} b_n^{(k)}\cdot f(t-nT) - b_0^{(k)}\cdot f(t) + \sum_{n=1}^{k} b_n^{(k)}\cdot f(t+nT)], \tag{11}$$

a jego współczynniki $b_n^{(k)}$ wyznacza się według wzorów:

$$b_n^{(k)} = \frac{2}{n}\cdot a_n^{(k)} \tag{12}$$

$$b_0^{(k)} = 2\cdot \sum_{n=1}^{k} b_n^{(k)} = 4\cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\cdot a_n^{(k)}, \tag{13}$$

gdzie $a_n^{(k)}$ są współczynnikami filtru cyfrowego dla pierwszej pochodnej, które oblicza się rekurencyjnie w sposób przedstawiony w rozdziale 3.1.

4. Dowód poprawności przedstawionej metody rekurencyjnej

Jeżeli obliczenia rekurencyjne będą wykonywane dla k dążącego do nieskończoności, to wzór (7) dla pierwszej pochodnej można przedstawić następująco:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{T}\cdot[-\sum_{n=1}^{k} a_n^{(k)}\cdot f(t-nT) + a_0^{(k)}\cdot f(t) + \sum_{n=1}^{k} a_n^{(k)}\cdot f(t+nT)] =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot[-\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\infty)}\cdot f(t-nT) + a_0^{(\infty)}\cdot f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\infty)}\cdot f(t+nT) \tag{14}$$

Z równań (8) i (9) wynika, że:

$$a_n^{(k)} = a_n^{(n)} \cdot \prod_{i=n+1}^{k} \frac{i}{i-n} \cdot \frac{i}{i+n} \qquad k \geq n+1,\ n=1, 2, 3, \ldots, \tag{15}$$

$$a_n^{(\infty)} = \lim_{k \to \infty} a_n^{(k)} = a_n^{(n)} \cdot \lim_{k \to \infty} \prod_{i=n+1}^{k} \frac{i}{i-n} \cdot \frac{i}{i+n} \tag{16}$$

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{i=n+1}^{k} \frac{i}{i-n} \cdot \frac{i}{i+n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{17}$$

$$a_n^{(\infty)} = a_n^{(n)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n!)^2}{n \cdot (2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{18}$$

Podobnie, dla drugiej pochodnej:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{k \to \infty} \{\frac{1}{T^2} \cdot [+ \sum_{n=1}^{k} b_n^{(k)} \cdot f(t-nT) - b_0^{(k)} \cdot f(t) + \sum_{n=1}^{k} b_n^{(k)} \cdot f(t+nT)]\} =$$

$$= \frac{1}{T^2} \cdot [+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(\infty)} \cdot f(t-nT) - b_0^{(\infty)} \cdot f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(\infty)} \cdot f(t+nT)] \tag{19}$$

$$b_n^{(\infty)} = \frac{2}{n} \cdot a_n^{(\infty)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n^2} \tag{20}$$

$$b_0^{(\infty)} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(\infty)} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \tag{21}$$

Dla funkcji ciągłych, po transformacji Laplace'a, transmitancje idealnych filtrów różniczkujących dla pierwszej i drugiej pochodnej opisane są za pomocą wzorów:

$$G_1(s) = s,\ G_1(j\varpi) = j\varpi \tag{22}$$

$$G_2(s) = s^2,\ G_2(j\varpi) = j^2\varpi^2 = -\varpi^2, \tag{23}$$

gdzie: $s = j\varpi$, $j = \sqrt{-1}$, ϖ- pulsacja.

Po dyskretnej transformacji równań (14) i (19) dla filtrów cyfrowych można obliczyć, że:

$$K_1(j\varpi) = \frac{1}{T} \cdot [2j \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \sin(n\varpi T)] = \frac{1}{T} \cdot j\varpi T = j\varpi, \quad \text{gdy} \quad -\pi < \varpi T < +\pi \tag{24}$$

$$K_1(j\varpi)=\frac{1}{T}\cdot[2j\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\sin(n\varpi T)]=0,\text{gdy}\qquad \varpi T=\pm\pi \tag{25}$$

$$K_2(j\varpi)=\frac{1}{T^2}\cdot[-\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot\cos(n\varpi T)]=\frac{1}{T^2}\cdot[-(\varpi T)^2]=-\varpi^2,$$

$$\text{gdy } -\pi\le\varpi T\le+\pi \tag{26}$$

Funkcje te są funkcjami okresowymi o okresie 2π.

Wykazano zatem, że charakterystyki częstotliwościowe cyfrowych filtrów różniczkujących projektowanych za pomocą przedstawionej metody rekurencyjnej są zbieżne do charakterystyk idealnych, jeżeli liczba iteracji dąży do nieskończoności.

LITERATURA

1. Fichtenholz G. M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.
2. Zapała W.: Designing method of true linear phase filters. Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.2, pp. 1039-1044. Poland, Międzyzdroje 28-31 August 2001.
3. Zapała W.: Ideal digital differentiating filters. Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.1, pp.549-554. Poland, Szczecin 2-5 September 2002.

Recenzent: Dr hab. inż. Anna Walaszek-Babiszewska, prof. UZ

Abstract

New designing method of digital differentiating filters for first and second degree derivatives are presented in the paper. The method is based on recursive calculations of filter coefficients for fixed order of digital differentiating filter. If order of the filter tends to infinity then frequency characteristics of designed filter tend to characteristics of ideal digital differentiating filter.