

Jan ZAWADA, Jerzy RZESZOT

Politechnika Warszawska, Warszawa

ON NUMERYCZNYM MODELOWANIU PROCESÓW KRUSZENIA

Streszczenie. W pracy przedstawiono przykład analizy numerycznej jednego z ważnych zagadnień brzegowych, a mianowicie obciążania bloku współosiowymi stemplami płaskimi. W ustaleniu algorytmu zagadnienia wykorzystano jedną ze znanych metod teorii stanów granicznych, tzn. metodę charakterystyk równań różniczkowych równowagi granicznej.

ON NUMERICAL MODELLING OF CRUSHING PROCESSES

Summary. An example of the numerical analysis of one of the important boundary problems – loading block with the flat coaxial punches, is presented. For determining the problem solution algorithm, one of the well-known methods based on Limit Load Carrying Capacity theory, i.e. the method of characteristics for limit equilibrium differential equations, was applied.

1. Wstęp

Rozwój mechaniki procesów rozdrabniania (kruszenia i mielenia), jak również procesów urabiania ośrodków kruchych (i plastycznych) zależy w znacznym stopniu od stosowania numerycznej analizy tych procesów [1]. Obiektem rozważań są procesy modelowe elementarne i maszynowe.

Modelowe procesy elementarne to różne sposoby obciążania brył regularnych. Można przyjąć, że rzeczywisty proces stanowi jakby sumę takich procesów elementarnych. Na rys. 1 pokazano niektóre z nich. Każdy proces stanowi odrębne zagadnienie brzegowe. Obciążanie brył zachodzi w warunkach przestrzennej „deformacji” (procesy d, e, f, jeśli przyjąć, że długość stempli jest mniejsza niż szerokość bloków mierzona wzdłuż osi z), osiowo -

symetrycznej „deformacji” (procesy a, b) i płaskiej „deformacji” (procesy c, d, e, f – długość stempla przekracza znacznie jego szerokość i jest większa od szerokości bloków).

Modelowanie procesów maszynowych polega na analizie obciążania, pęknięcia i przemieszczania brył regularnych lub warstw materiału w przestrzeni roboczej maszyny. Przykład prostego modelowego procesu kruszenia realizowanego w kruszarce szczękowej przedstawia rys. 2. Zakłada się tutaj odpowiednie przesuwanie warstw materiału w komorze roboczej w miarę kolejnych cykli pracy, tak aby został zachowany warunek ciągłości przepływu.

W analizach numerycznych modelowych procesów elementarnych i maszynowych można stosować :

- a) metody oparte na teorii stanów granicznych (metoda charakterystyk, metody nośności granicznej),
- b) metodę elementów kontaktowych MEK,
- c) metodę elementów skończonych MES,
- d) inne metody opierające się na mechanice ciała stałego, teorii uderzenia , mechanice pęknięcia itd.

W niniejszej pracy omówimy w skrócie jedną z metod teorii stanów granicznych, tzn. metodę charakterystyk, ostatnio często stosowaną w różnych zagadnieniach praktycznych.

2. Metoda charakterystyk

2.1. Założenia i wymagania co do ścisłości rozwiązań

Metody teorii stanów granicznych opierają się na wyszczególnionych niżej założeniach:

- 1) ośrodek obciążany (ośrodek kruchy) jest ciągły, jednorodny, izotropowy i nieważki,
- 2) modelem mechanicznym tego ośrodka jest model sztywno – plastyczny, w którym pomija się odkształcenia sprężyste,
- 3) procesy przebiegają w płaskim stanie odkształceń (PSO) lub w stanie osiowej symetrii (ze względu na trudności matematyczne nie są jak dotąd analizowane zagadnienia przestrzenne),
- 4) jako teoretyczne warunki stanu granicznego (będące funkcją tensora stanu naprężenia)

$F(\sigma_{ij}) = 0$ przyjmuje się najczęściej:

a) warunek Mohra
$$F(\sigma_{ij}) = \left(\frac{\tau}{c}\right)^n - \frac{\sigma}{H} - 1 = 0,$$

gdzie :

- τ i σ - stanowią naprężenia styczne i normalne działające w płaszczyznach poślizgów,
- c - oznacza spójność materiału,
- H - wytrzymałość na izotropowe rozciąganie,
- n - wykładnik potęgowy zawarty w przedziale $1 \leq n \leq 2$,

b) warunek liniowy Coulomba $|\tau| = c + \sigma \operatorname{tg} \rho$,

gdzie:

- c i σ - są interpretowane jak poprzednio,
- ρ - jest kątem tarcia wewnętrznego

oraz

c) zmodyfikowany warunek Coulomba, w którym zakłada się mniejszą niż w warunku Coulomba wytrzymałość na rozciąganie poprzez obcięcie prostoliniowych obwiedni $\tau = \tau(\sigma)$ łukiem koła o promieniu R_z określonego zależnością

$$R_z = S_c - H \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho},$$

gdzie S_c – oznacza wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie.

Omawiane warunki zostały przedstawione na rys. 3, na którym podano również znaczenie poszczególnych wielkości występujących we wzorach. Należy zwrócić uwagę na to, że naprężenia ściskające traktujemy jako dodatnie.

- 5) prawem fizycznym konstytutywnym wiążącym tensor prędkości odkształcania $\dot{\epsilon}_{ij}$ z gradientem funkcji $F(\sigma_{ij})$, spełniającym rolę potencjału, jest tzw. stowarzyszone prawo płynięcia $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$, gdzie λ jest dodatnim skalarnym mnożnikiem.

Ścisłe rozwiązanie danego zagadnienia (np. zagadnienia obciążania bloku współosiowymi stemplami płaskimi, rys. 1d) polega na znalezieniu w obszarze granicznym pola naprężeń σ_{ij} i prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ spełniających następujące warunki:

- warunki równowagi wewnętrznej $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$,
- warunki zgodności pomiędzy prędkościami odkształceń i przemieszczeń

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

gdzie v_i , v_j oznaczają składowe prędkości przemieszczeń punktów ośrodka

- zadane warunki brzegowe,
- warunek energetyczny, tj. spełnienie warunku dodatniości mocy dyssypowanej \dot{D} w obszarze granicznym $\dot{D} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \geq 0$,
- możliwość tzw. przedłużenia pola naprężeń σ_{ij} w obszary sztywne przylegające do obszaru granicznego bez przekroczenia warunku stanu granicznego $F(\sigma_{ij}) = 0$.

2.2. Równania charakterystyk równań różniczkowych równowagi granicznej - warunek liniowy [1, 2]

Równania równowagi $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ i równanie przedstawiające warunek stanu granicznego

Coulomba można sprowadzić do układu dwóch quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych, który może być rozwiązany znaną w teorii równań różniczkowych metodą charakterystyk. Równania charakterystyk pozwalają na określanie naprężeń granicznych i w konsekwencji na wyznaczanie obciążeń zewnętrznych, co w praktyce ma ważne znaczenie.

Równania charakterystyk są następujące :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon), \quad d\sigma + 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0, \quad \text{dla rodziny } \alpha \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon), \quad d\sigma - 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0, \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Równania po lewej stronie określają kierunki charakterystyk, zaś równania po prawej stronie określają zależności, jakie muszą być spełnione wzdłuż tych charakterystyk. Na rys. 4 pokazano charakterystyki α i β przechodzące przez dany punkt ośrodka oraz znaczenie poszczególnych wielkości występujących w tych wzorach. Kąt φ jest to kąt, który większe naprężenie główne σ_1 tworzy z osią x , σ jest naprężeniem zastępczym, kąt ε jest kątem pomiędzy kierunkiem naprężenia głównego a kierunkami charakterystyk α i β . Kąt ε ma stałą

$$\text{wartość } \varepsilon = \frac{\tau}{4} - \frac{\rho}{2}.$$

Po wyznaczeniu naprężeń należy określić pole prędkości przemieszczeń obszaru granicznego. W tym celu wyzyskujemy równanie przedstawiające stowarzyszone prawo płynięcia

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

oraz zależność na tensor prędkości odkształcenia

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Przekształcając obie zależności otrzymujemy podobny układ równań różniczkowych jak w wypadku wyznaczania naprężeń. Rozwiązując go otrzymamy równania kierunkowe charakterystyk prędkości i zależności, jakie wzdłuż nich zachodzą.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon), \quad dv_x + dv_y \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon) = 0, \quad \text{dla rodziny } \alpha \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon), \quad dv_x + dv_y \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon) = 0, \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Rzuty wektora prędkości przemieszczania v na osie x i y oznaczono tutaj jako v_x i v_y (rys. 4b). Porównując (1) i (2) widzimy, że charakterystyki prędkości pokrywają się z charakterystykami naprężeń, ponieważ mamy te same równania kierunkowe.

2.3. Równania charakterystyk równań różniczkowych równowagi granicznej - warunek zmodyfikowany

Warunek zmodyfikowany jest kombinacją warunku liniowego (obwiednie RB na rys.3c) i nieliniowego (łuk HR). Dla warunku liniowego obowiązują znane już zależności (1) i (2), gdy zaś mamy warunek nieliniowy, występuje tylko jeden kierunek charakterystyczny.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi), \quad (3)$$

a ponadto $\varphi = \text{constans}$, a więc charakterystyki są prostoliniowe.

Stan naprężenia określają teraz stałe naprężenia $\sigma_2 = -H_z$ oraz w ogólnym przypadku zmienne naprężenia σ_1 , ponieważ w punkcie osobliwym H_z są styczne koła graniczne o różnych promieniach mniejszych od R_z (rys. 3c). Gdy chodzi o charakterystyki prędkości, to również dla nich obowiązuje zależność (3), a kierunek wektora prędkości wzdłuż nich określimy na podstawie równań, o których wspomiano poprzednio w pkt. 2.2.

3. Numeryczna analiza procesu obciążania bloku stemplami płaskimi (PSO); warunek liniowy i warunek zmodyfikowany - zastosowanie metody charakterystyk

3.1. Uwagi wstępne

Analityczna metoda rozwiązywania zagadnienia obciążania bloku współosiowymi stemplami (rys. 1d), z zastosowaniem liniowego warunku Coulomba została przedstawiona szczegółowo w pracy [2]. Siatki charakterystyk uzyskano w niej wykreślnie zakładając, że kąt φ w każdych dwóch sąsiednich punktach węzłowych różni się o 5° oraz pamiętając, że charakterystyki rodziny α i β przecinają się zawsze pod kątem 2ε . W praktyce siatkę otrzymuje się zastępując krzywe α i β odcinkami prostymi załamanyymi w kolejnych punktach o 5° . Na tym etapie pracy nie są potrzebne żadne szczegółowe obliczenia. Zwracamy uwagę, że to ułatwienie w wykreślaniu siatek dotyczy jedynie warunku liniowego, gdy kąt tarcia wewnętrznego ρ jest wielkością stałą. Obliczenia stanu naprężenia w punktach węzłowych również nie są trudne, można wyrazić je stosunkowo prostymi wzorami, gdyż prawe strony równań (1), przedstawiających zależności wzdłuż charakterystyk, można przekształcić do postaci:

$$\sigma = C_1 e^{-2 \varphi \operatorname{tg} \rho} = C_1 \exp(-2 \varphi \operatorname{tg} \rho) \quad \text{rodzina } \alpha, \quad (4)$$

$$\sigma = C_2 e^{2 \varphi \operatorname{tg} \rho} = C_2 \exp(2 \varphi \operatorname{tg} \rho) \quad \text{rodzina } \beta,$$

C_1, C_2 oznaczają stałe wyznaczone z warunków brzegowych.

Pomimo tych ułatwień wykreślanie siatek charakterystyk, wyznaczanie stanu naprężenia i prędkości przemieszczania oraz obciążenia zewnętrznego dla różnych stosunków wysokości bloku do szerokości stempla jest bardzo pracochłonne. Praktyczne wykorzystanie teorii stanów granicznych, nawet w tak prostym zagadnieniu jak omawiane, wymaga stosowania metod numerycznych.

3.2. Numeryczne wyznaczanie siatek charakterystyk i stanu naprężenia - wiadomości ogólne

Podstawą wyznaczania współrzędnych punktów siatki charakterystyk oraz wartości naprężeń w tych punktach stanowią równania kierunkowe charakterystyk oraz zależności, jakie muszą wzdłuż nich zachodzić (wzory (1)). Dla każdego punktu węzłowego należy znaleźć cztery wielkości, a mianowicie dwie współrzędne x i y określające jego położenie

oraz naprężenie zastępcze σ i kąt φ . Stosujemy tutaj znaną metodę Massau, polegającą na zastąpieniu różniczek we wzorach (1) różnicami skończonymi. Rozpatrzmy oczko siatki charakterystyk utworzone z przecięcia dwóch sąsiednich linii należących do rodzin α i β (rys. 5). Znane wielkości $x_1, y_1, \sigma_{(1)}$ i φ_1 w punkcie 1 oraz wielkości $x_2, y, \sigma_{(2)}, \varphi_2$ w punkcie 2 ($\sigma_{(1)}$ i $\sigma_{(2)}$ oznaczają naprężenia zastępcze σ w punktach 1 i 2). Poszukujemy tych wielkości w punkcie N, tzn. poszukujemy $x_N, y_N, \sigma_N, \varphi_N$. Wykorzystujemy zależności (4), skąd otrzymamy:

$$C_1 = \sigma_{(1)} e^{2\varphi_1 \operatorname{tg} \rho} \quad \text{dla pkt. 1} \quad (5)$$

$$C_2 = \sigma_{(2)} e^{-2\varphi_1 \operatorname{tg} \rho} \quad \text{dla pkt. 2}$$

A więc naprężenia zastępcze σ_N wyrazimy teraz w postaci:

$$\sigma_N = \sigma_{(1)} \cdot e^{2\varphi_1 \operatorname{tg} \rho} \cdot e^{-2\varphi_N \operatorname{tg} \rho} \quad (6)$$

$$\sigma_N = \sigma_{(2)} \cdot e^{-2\varphi_2 \operatorname{tg} \rho} \cdot e^{2\varphi_N \operatorname{tg} \rho},$$

a następnie po przekształceniach (6) mamy:

$$\frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(2)}} = e^{2\operatorname{tg} \rho (2\varphi_N - \varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{lub} \quad 2\operatorname{tg} \rho (2\varphi_N - \varphi_1 - \varphi_2) = \ln \frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(2)}} \quad (7)$$

i stąd

$$\varphi_N = 0,5 \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) + 0,25 \cdot \operatorname{tg} \rho \cdot \ln \frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(2)}},$$

a następnie z zależności (6)

$$\sigma_N = \sigma_{(2)} \cdot e^{2\operatorname{tg} \rho (\varphi_N - \varphi_2)} \quad (8)$$

W celu znalezienia współrzędnych x_N i y_N punktu N równania kierunkowe (1) przekształcimy do postaci:

$$y_N - y_1 = (x_N - x_1) \operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_1) + \varepsilon] \quad (9)$$

$$y_N - y_2 = (x_N - x_2) \operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_2) - \varepsilon]$$

Oznaczając

$$\operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_1) + \varepsilon] = T_1 \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_2) - \varepsilon] = T_2$$

otrzymamy wzory na poszukiwane współrzędne

$$x_N = y_2 - y_1 + x_1 T_1 - x_2 T_2$$

(11)

$$y_N = y_2 + (x_N - x_2) T_2$$

4. Proces obciążania bloku stemplami płaskimi – warunek Coulomba. Wyznaczanie pola naprężeń i prędkości przemieszczeń – algorytm

4.1. Wyznaczanie pola naprężeń i nacisków granicznych dla różnych wartości stosunku wysokości bloku do szerokości stempli $\frac{2h}{2a} = \frac{h}{a}$

Założymy, że nieznanne naciski p pod stemplem są rozłożone równomiernie (rys. 6), co powoduje, że siatka charakterystyk w tym obszarze składa się z dwóch rodzin linii prostych. Skrajne charakterystyki, to jest charakterystyka AC, należąca do rodziny α i BC, należąca do rodziny β , przecinają się w punkcie C pod kątem 2ε . W trójkącie ABC mamy zatem jednorodny stan naprężenia, przy czym większe naprężenie główne σ_1 jest równe naciskom p . Odwzorowanie tego stanu na płaszczyźnie τ , σ pokazano na rys. 6d. Do trójkąta ABC przylegają dwa wachlarze BCD i ACD_1 , w których, jak łatwo udowodnić, charakterystyki β (dla wachlarza DCB) i α (dla wachlarza ACD_1) są prostoliniowe, zaś przecinające je charakterystyki α (wachlarz BCD) i β (wachlarz ACD_1) są krzywoliniowe. Ponieważ zachodzi symetria obciążenia, pole charakterystyk jest także symetryczne względem osi x i y układu współrzędnych. W analizach można więc rozpatrywać jedynie ćwiartkę tego pola.

Punkty A i B są punktami osobliwymi, w których następuje zmiana wartości kąta φ , jak również zmiana wartości naprężeń. W trójkątach BDE i AD_1E_1 mamy ponownie jednorodny stan naprężenia, którego odwzorowanie pokazuje rys. 6c. Krzywoliniowe charakterystyki w wymienionych poprzednio wachlarzach BCD i ACD_1 są spiralami logarytmicznymi. Jeżeli wprowadzić układ współrzędnych biegunowych r , ν z biegunem w punkcie A, to krzywoliniowe charakterystyki w wachlarzu ACD opisuje równanie

$$r = r_0 \cdot \exp(\nu \cdot \operatorname{tg} \rho), \quad (12)$$

gdzie r_0 jest współrzędną punktu, w którym dana charakterystyka przecina promień BC. Nietrudno więc znaleźć współrzędne punktów C, a, b, c, d, D, leżących na spirali CD, zarówno w układzie biegunowym, jak również w układzie prostokątnym x , y .

Siatka charakterystyk ograniczona liniami ACDE i BCD_1E_1 przedstawia obszar deformacji ośrodka w tzw. zagadnieniu L. Prandtla znanym z teorii plastyczności i mechaniki

gruntów [3, 4]. Polega ono na wyznaczeniu nacisków granicznych pod stemplem, gdy obciąża on półprzestrzeń. W naszym przykładzie można rozpatrywać to zagadnienie w przypadku, gdy wysokość bloku $2h$ obciążanego dwoma stemplami jest równa pewnej określonej wysokości $2h_p = 2h_{\max}$ (rys. 6a), lub większa od niej, a więc

$$2h \geq 2h_p = 2h_{\max}$$

Wyznamy teraz stan naprężenia σ w poszczególnych punktach charakterystyki AC, a, b, c, d....DE w funkcji nieznanego na razie nacisku p .

W równaniu (4)

$$\sigma = C_1 \exp(-2\varphi \operatorname{tg} \rho)$$

należy określić stałą C_1 . Z warunków brzegowych w punkcie C, dla którego mamy:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \sigma = \frac{p+H}{1+\sin \rho},$$

wynika, iż

$$C_1 = \frac{H+p}{1+\sin \rho} \exp(\pi \operatorname{tg} \rho)$$

A więc poszukiwana zależność wzdłuż ACDE przybiera postać:

$$\sigma = \frac{p+H}{1+\sin \rho} \exp[(\pi - 2\varphi) \operatorname{tg} \rho] \quad (13)$$

Na odcinku AC kąt $\varphi = \frac{\pi}{2}$, w punkcie a, $\varphi = \varphi_a$, w punkcie b, $\varphi = \varphi_b$, itd, w punkcie D,

$\varphi_D = \pi$.

Naprężenia główne σ_1 , i σ_2 wyrazimy jako (rys. 6d):

$$\sigma_1 = \sigma(1 + \sin \rho) - H \quad (14)$$

$$\sigma_2 = \sigma(1 - \sin \rho) - H$$

Dane na charakterystyce ACDE (to jest współrzędne poszczególnych punktów i stan naprężenia) wystarczają w zupełności do wyznaczenia siatki charakterystyk i stanu naprężenia w bloku przy różnych wartościach $\frac{h}{a}$.

Niech blok ma na przykład wysokość $2h_4$ (rys. 6a). Jego poziomą oś symetrii oznaczono w takim przypadku jako x_4 . Siatka charakterystyk składa się ze znanego już trójkąta ABC, wachlarzy BCD i ACd₁ oraz krzywoliniowego czworokąta Cd₄d₁. Określanie danych dla punktów 1, 2, 3, 4 leżących na osi y upraszcza się, ponieważ kąt φ wynosi w tym wypadku

$\frac{\pi}{2}$ oraz znane jest równanie tej osi, $x=0$. Mamy zatem układ równań pozwalających znaleźć

na przykład $\sigma_{(1)}$ i $y_{(1)}$ punktu 1 (pamiętamy, że znane są już φ_a , x_a , y_a , punktu a).

$$(\sigma_{(1)} - \sigma_a) - 2 \left(\frac{\sigma_a + \sigma_{(1)}}{2} \right) \cdot \left(\varphi_a - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \rho = 0 \quad (15)$$

$$(y_1 - y_a) = x_a \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \left(\varphi_a + \frac{\pi}{2} \right) - \varepsilon \right]$$

Mając dane punktów 1 i b określimy dane punktu e, mając dane punktów e i c określimy dane punktu f. itd. Skrajna charakterystyka Bdg i k musi przeciąć oś y w punkcie 4.

Poszukiwany nacisk p wyznaczamy z całkowitego warunku równowagi ćwiartki bloku

$$\int_0^{h_4} \sigma_2 \cdot dy = 0, \quad (16)$$

który oznacza, że pole naprężeń σ_2 , ściskających jest równe polu naprężeń σ_2 , rozciągających (A)(S)(C)(B) = (S)(4)(4) (wg rys. 6b).

Zapiszemy ten warunek inaczej wykorzystując wzory (13) i (14):

$$\int_0^{h_4} (\alpha_p - \beta_H) \cdot dy = 0$$

$$p = \frac{\int_0^{h_4} \beta \cdot dy}{\int_0^{h_4} \alpha \cdot dy}, \quad (17)$$

gdzie α i β oznaczają stałe współczynniki, które łatwo wyznaczyć dla punktów C, 1, 2, 3, 4, osi symetrii y.

W programie numerycznym wygodnie jest zakładać różne wartości nacisku p i poszukiwać odpowiadających im wysokości bloku tak, aby został spełniony całkowity warunek równowagi (16). Graniczny nacisk p ma dolne ograniczenie odpowiadające naciskom równym wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie S_c (rys. 3b) oraz ograniczenie górne określone wzorem Prandtla [1, 4].

$$p_p = H \cdot \left[\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \cdot \exp(\pi \operatorname{tg} \rho) - 1 \right] \quad (18)$$

Naciski p zawierają się przeto w przedziale:

$$S_c \leq p \leq p_p \quad (19)$$

Maksymalna wysokość bloku, o której wspomniano wcześniej, odpowiada więc naciskom Prandtla, tzn. naciskom, których przekroczenie jest fizycznie niemożliwe.

4.2. Wyznaczanie pola prędkości – algorytm

W celu wyznaczenia prędkości przemieszczania poszczególnych punktów siatki charakterystyk wykorzystujemy równania (2) przedstawiające zależności, jakie muszą być spełnione wzdłuż charakterystyk α i β . Podobnie jak w przypadku określania naprężeń z równań (1), różniczki w równaniach (2) zastępujemy różniczkami skończonymi. Jeśli więc dane są prędkości v_x , v_y w punktach 1 i 2 siatki, to prędkości w punkcie N (rys. 5) wynikają z układu równań

$$(v_{x1} - v_{xN}) + (v_{y2} - v_{yN}) \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_N) + \varepsilon\right] = 0 \quad (20)$$

$$(v_{x2} - v_{xN}) + (v_{y2} - v_{yN}) \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_N) - \varepsilon\right] = 0,$$

oznaczając

$$T_a = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_N) + \varepsilon\right] \quad (21)$$

$$T_b = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_N) - \varepsilon\right]$$

Otrzymamy

$$v_{yN} = [(v_{x2} - v_{x1}) - v_{y1} \cdot T_a + v_{y2} \cdot T_b] \cdot \frac{1}{T_b - T_a} \quad (22)$$

$$v_{xN} = v_{x2} + (v_{y2} - v_{yN}) \cdot T_b$$

Analogiczną procedurę należy powtarzać w odniesieniu do innych punktów, co umożliwi określenie ich prędkości i w rezultacie prędkości w całym polu granicznym.

Przejdźmy teraz do analizy prędkości w zagadnieniu obciążania bloku stemplami płaskimi. Zakładamy, że stemple przesuwają się w przeciwnych kierunkach z prędkością v_0 . Dwie symetryczne części bloku, leżące na zewnątrz obszaru granicznego, oddalają się od osi y z prędkością v_1 (rys. 7). Skrajne charakterystyki AD_1R i BDR są liniami nieciągłości, co oznacza, że prędkości doznają na nich zmiany wartości i kierunku. Na przykład punkt 2 ma od strony obszaru granicznego prędkość v_2 , a na zewnątrz tego obszaru, to jest w obszarze

sztynym, prędkość v_1 . Oznacza to, że prędkość v_2 doznała przyrostu Δv odchylonego od linii nieciągłości AD_1R o kąt tarcia wewnętrzznego ρ [2, 3].

Rozpatrzmy prędkości dwóch blisko położonych punktów 1 i 2 leżących na charakterystyce α , to jest linii AD_1R . Można zapisać następujące zależności:

$$(v_{x2} - v_{x1}) + (v_{y2} - v_{y1}) \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \varepsilon\right] = 0 \quad (23)$$

Składowe v_x i v_y prędkości punktu 2 (rys. 7) wyrazimy następująco:

$$v_{x2} = v_1 - \Delta v \cdot \cos[\pi - (\varphi_2 + \varepsilon + \rho)] \quad (24)$$

$$v_{y2} = \Delta v \cdot \sin[\pi - (\varphi_2 + \varepsilon + \rho)]$$

skąd otrzymamy

$$v_{x2} = v_1 + v_{y2} \cdot \operatorname{ctg}(\varphi_2 + \varepsilon + \rho) \quad (25)$$

$$v_{y2} = (v_{x2} - v_1) \cdot \operatorname{ctg}(\varphi_2 + \varepsilon + \rho)$$

Rozwiązując (23) i (25) dostaniemy:

$$v_{x2} = \{v_{x1} + [v_{y1} + v_1 \cdot \operatorname{tg}(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho_2}{2})] \cdot T_b\} / [1 + T_b \cdot \operatorname{tg}(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho_2}{2})] \quad (26)$$

$$v_{y2} = (v_{x2} - v_1) \cdot \operatorname{tg}(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}),$$

gdzie

$$T_b = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right)\right]$$

Obliczenia rozpoczynamy od punktu R przyjmując, iż $v_1 = 1$ oraz że $v_{yR} = 0$ (rys. 7).

Prędkość v_{yR} wynika z prostych rozważań. Otrzymamy:

$$v_{yR} = \Delta v \cdot \sin[\pi - (\varphi_R + \varepsilon + \rho)] = -v_1 \cdot \frac{\sin[\pi - (\varphi_R + \varepsilon + \rho)]}{\cos[\pi - (\varphi_R + \varepsilon + \rho)]} = v_1 \cdot \operatorname{tg}\left(\varphi_R + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right) \quad (27)$$

Po wyznaczeniu pola prędkości w całym obszarze granicznym ACD_1RDBC oraz wyznaczeniu składowej v_y w punkcie C żądamy, aby v_{yc} było równe jedności. Obliczamy mnożnik określony związkiem

$$v_1 = 1 / v_{yc}, \quad (28)$$

a następnie mnożymy składowe wektora prędkości przez wartość v_1 określoną wzorem (28) uzyskując rozwiązanie, w którym prędkość naciskającego stempla jest równa jedności, $v_0 = 1$.

5. Proces obciążania bloku stemplami płaskimi – warunek zmodyfikowany

5.1. Określanie pola naprężeń

Jak już wspomniano w punkcie 2.3, warunek zmodyfikowany jest kombinacją warunku liniowego i nieliniowego. Analiza numeryczna składa się więc z dwóch etapów, a mianowicie;

a) Etap I - obowiązuje warunek Coulomba [1, 2, 3]

$$(\sigma_1 - \sigma_2) - ((\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \sin \rho - 2 \cdot c \cdot \cos \rho) = 0, \quad (29)$$

który jest ograniczony zależnością

$$\sigma_2 \geq H_z, \quad (30)$$

(H_z – wytrzymałość na izotropowe rozciąganie wg warunku zmodyfikowanego)

b) Etap II – obowiązuje warunek nieliniowy odwzorowany na płaszczyźnie τ , σ łukiem koła (rys. 7c)

$$\sigma_2 + H_z = 0, \quad (31)$$

co oznacza, że kąt tarcia wewnętrznego $\rho = \frac{\pi}{2}$, a $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} = 0$

W pierwszym etapie zadania postępujemy w sposób opisany w punkcie 3.1. Zakładamy różne wartości nacisków granicznych p obciążających blok. Zawierają się one - jak pamiętamy - w przedziale:

$$S_c \leq p \leq p_p$$

Niech blok ma ponownie wysokość $2h_4$, tę samą jak w przykładzie opisanym w punkcie 3.1. Siatka charakterystyk odpowiadająca warunkowi Coulomba (pierwszy etap) została zmniejszona obecnie do obszaru A2B (rys. 8a). Odwzorowanie stanu naprężenia w punkcie 2 zostało pokazane na rys. 8c. Naprężenie σ_2 działające w tym punkcie osiągnęło wartość $-H_z$. Oznacza to, że należy przejść do II etapu analizy i wykreślić prostoliniową charakterystykę 234, wzdłuż której działają naprężenia rozrywające $\sigma_2 = -H$. Wartość nacisku granicznego

wynika z całkowitego warunku równowagi ćwiartki bloku. $\int_0^{h_4} \sigma_2 \cdot dy = 0$.

Jest ona niższa niż wartość nacisku wynikająca z przyjęcia warunku liniowego.

5.2. Określanie pola prędkości

Pole prędkości w obszarze A2B wyznaczamy analogicznie do przypadku, gdy obowiązuje warunek liniowy (p. 3.2). W punkcie osobliwym 2 kąt tarcia wewnętrznego zmienia swoją wartość od ρ opowiadającemu warunkowi Coulomba do $\rho = \frac{\pi}{2}$.

Podstawiając tę wartość do równania (27) i uwzględniając, że kąt φ w punkcie 2 jest równy

$\frac{\pi}{2}$, otrzymamy:

$$v_{y2} = v_1 \cdot \operatorname{tg}(\pi) = 0$$

A więc wzdłuż charakterystyki 234 nie występuje pionowa składowa prędkości.

6. Program komputerowy CHA-POL

Analiza numeryczna została opracowana dla zagadnienia ściskania bloku skalnego dwoma współosiowymi stemplami oraz po przyjęciu liniowego warunku stanu granicznego Coulomba lub zmodyfikowanego warunku stanu granicznego Coulomba.

Program CHA-POL napisano w języku programowania DELPHI 5, wskutek czego działa on w środowisku Windows 95/98/2000. Ekran powitalny tego programu przedstawiono na rys. 9, zaś ekran główny na rys. 10.

Dane potrzebne do analizy wprowadza się na głównej planszy programu. Są to:

ρ – kąt tarcia wewnętrznego,

C – spójność ośrodka,

2a – szerokość stempla,

p – nacisk stempla, którego wartość zawiera się w przedziale S_c (wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie) i p_{prandtl} (nacisk graniczny),

przycisk „radiowy” służący do wyboru liniowego lub zmodyfikowanego warunku Coulomba.

Po ich akceptacji można wyświetlić wyniki obliczeń w postaci wykresów, wciskając przyciski „Siatka” „Naprężenia” lub „Wykres”. Okno „Siatka” (rys. 11) przedstawia siatkę charakterystyk pola naprężeń dla danej wartości kąta tarcia wewnętrznego ρ . Na planszy „Naprężenia” (rys. 12) oprócz wykresu $\sigma_x(y)$ podano również wartość graniczną h , którą zaznaczono też poziomą czerwoną linią. Natomiast w oknie „Wykres” (rys. 13)

przedstawiono zależność nacisków granicznych (wyrażonych względem c) od stosunku h/a tj. $p/c=f(h/a)$. Oznaczenie $(h/a)^*$ przedstawia wartość stosunku h/a , przy którym nacisk p jest równy naciskowi granicznemu Prandtla.

Wyniki obliczeń są także automatycznie zapisywane w katalogu roboczym programu w postaci plików tekstowych o następujących nazwach:

x_{ab} , y_{ab} – współrzędne siatki charakterystyk,

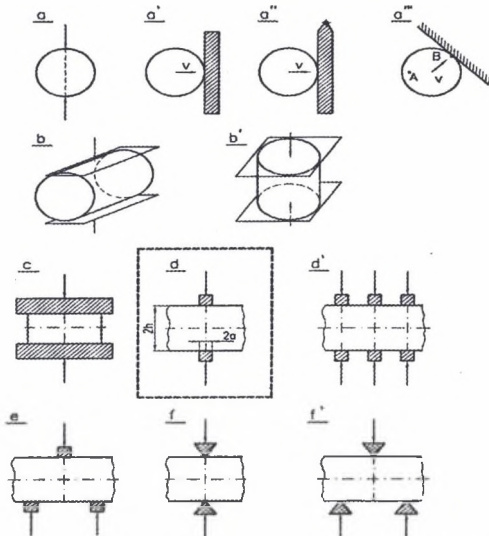
f_i , s_i – wartości kąta ϕ i naprężenia σ w punktach węzłowych siatki charakterystyk,

s_{ix} – wartości naprężenia σ_x wzdłuż osi y ,

ph – wartości przebiegu wykresu zależności $p/c=f(h/a)$.

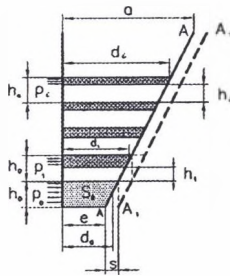
Dokładność obliczeń można zwiększyć przez zmianę gęstości siatki charakterystyk, tj. zmieniając ilość linii siatki.

Kopie ekranów programu uzyskuje się wciskając na klawiaturze przycisk „Print Screen”, przez co otrzymujemy kopie aktualnie wyświetlanej planszy w postaci pliku zapisanego w schowku Windows. Plik ten można następnie obrobić w standardowym programie graficznym systemu Windows – Imaging lub programem Microsoft Photo Editor, który znajduje się w pakiecie programów „Narzędzia Microsoft Office”.



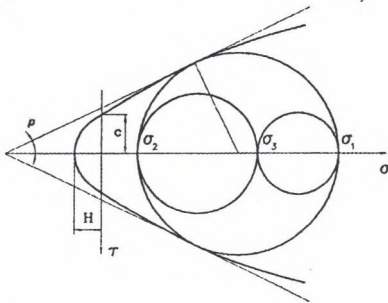
Rys. 1. Niektóre modelowe procesy elementarne: a, b) sposoby obciążania kul i walców; c, d) blok obciążany płytami i współosiowymi stemplami (parą i grupą stempli); e) blok ściskany grupą trzech stempli; f) blok ściskany klinami

Fig. 1. Certain model fundamental processes: a, b) ways of loading a sphere and a cylinder; c, d) block loaded by plates and coaxial punches (a pair and a group of punches); e) block compressed by a group of punches; f) block compressed by wedges



Rys. 2. Przykład modelowego procesu maszynowego realizowanego w kruszarce szczękowej – obciążanie warstw materiału przesuwających się w komorze kruszenia
 Fig. 2. Exemplary model machine process carried out in jaw crusher – loading of layers of material moving along crushing chamber

a) warunek Mohra $F(\sigma_{ij}) = f(\tau, \sigma) = \left(\frac{\tau}{c}\right)^n - \frac{\sigma}{H} - 1 = 0$

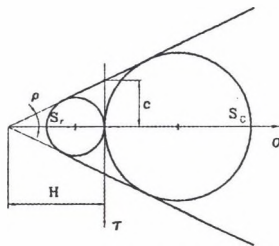


$$1 \leq n \leq 2$$

$$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$$

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{c^n}{n \cdot H \cdot \tau^{n-1}}$$

b) warunek liniowy (Coulomb 1773 r.)



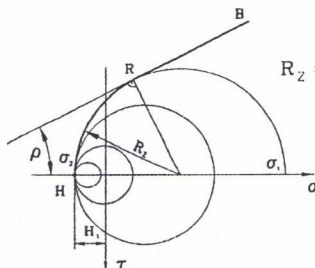
$$n=1$$

$$|\tau| = c + \operatorname{tg} \rho$$

$$S_c = \frac{2c \cdot \cos \rho}{1 - \sin \rho}$$

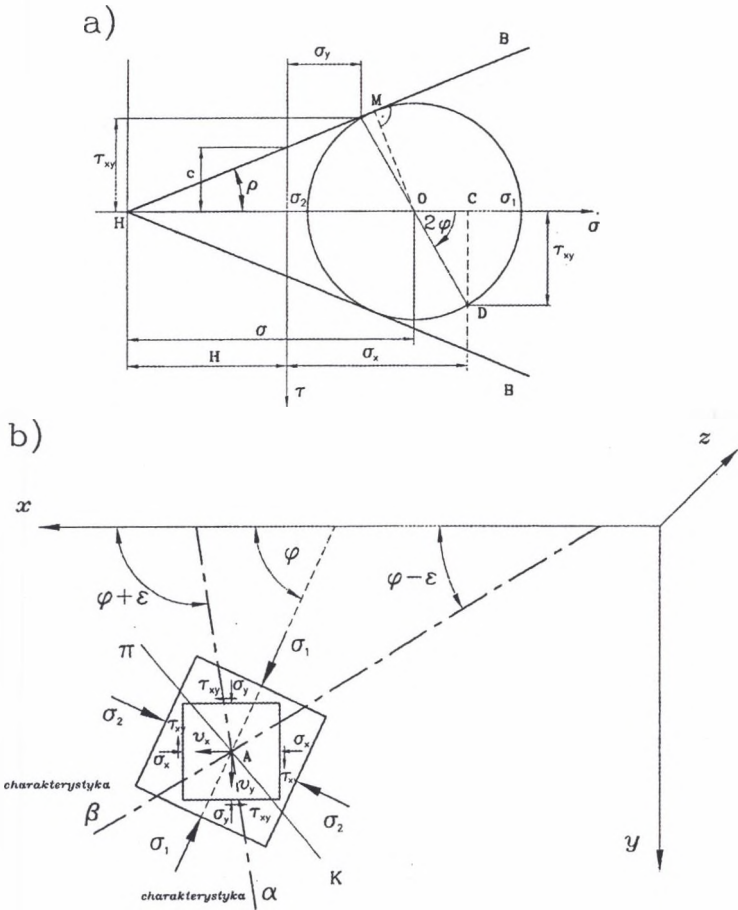
$$S_r = -\frac{2c \cdot \cos \rho}{1 + \sin \rho}$$

c) warunek liniowy zmodyfikowany (Z. Mróz)



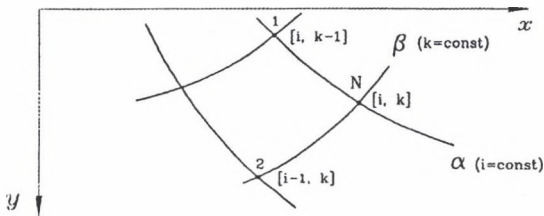
$$R_z = \frac{1}{2} S_c - H \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho}$$

Rys. 3. Teoretyczne warunki stanu granicznego stosowane najczęściej w praktyce
 Fig. 3. Most frequently applied theoretical yield conditions

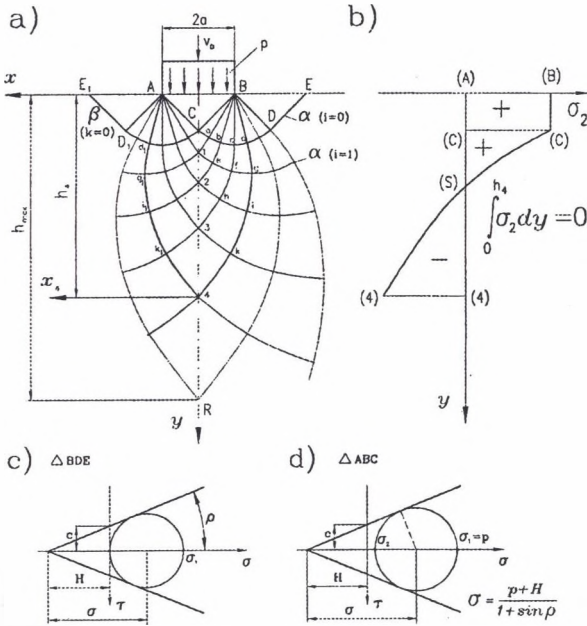


Rys. 4. Stan graniczny w danym punkcie ośrodku (PSO): a) graniczne koło Mhóra przedstawiające ten stan; b) składowe granicznego stanu naprężenia: naprężenia główne σ_1 , σ_2 oraz naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} , zaznaczono charakterystyki rodziny α i β

Fig. 4. Limit load state in certain point (2-D strain state): a) limit Mohr circle representing the state; b) limit stress components: principal stresses σ_1 , σ_2 and stresses σ_x , σ_y , τ_{xy} , indicated characteristics of α and β family

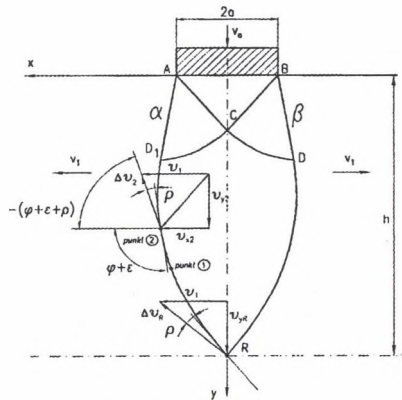


Rys. 5. Elementarne oczko siatki charakterystyk
Fig. 5. Basic characteristics mesh eye



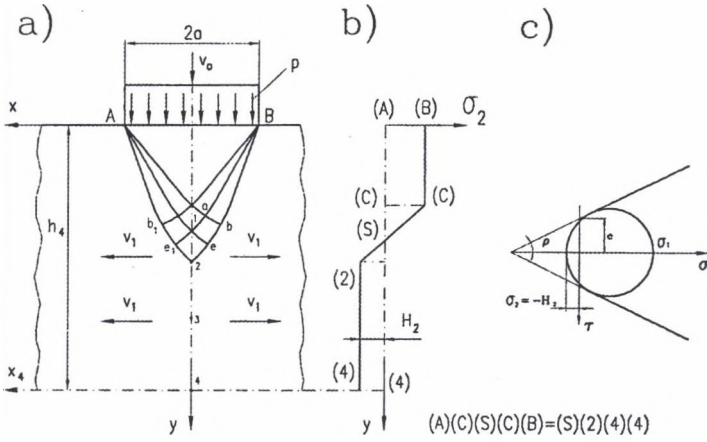
Rys. 6. Obciążanie bloku stemplami płaskimi, wyznaczanie pola naprężeń: a) siatka charakterystyk dla górnej połowy bloku; b) warunek równowagi połówki bloku (względem osi y); c) odwzorowanie stanu naprężenia w trójkącie ADE; d) wyznaczenie stanu naprężenia w trójkącie ABC

Fig. 6. Loading of block with flat punches, determining stress field: a) characteristics mesh for upper half of block; b) equilibrium condition for half-block (by Y-axis); c) representation of stress state in triangle ABC



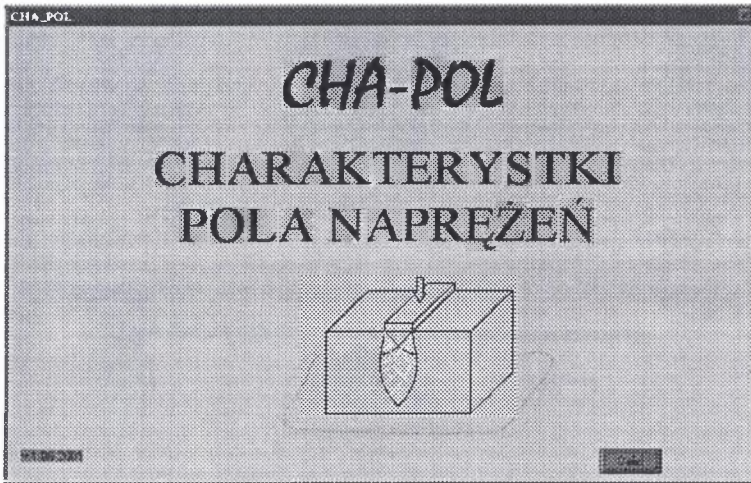
Rys. 7. Skrajne charakterystyki AD1R i BDR obszaru granicznego jako linie nieciągłości prędkości (na rysunku pokazano górną połówkę bloku)

Fig. 7. Yield zone outer characteristics AD1R and BDR as velocity discontinuity lines (upper half of block shown)

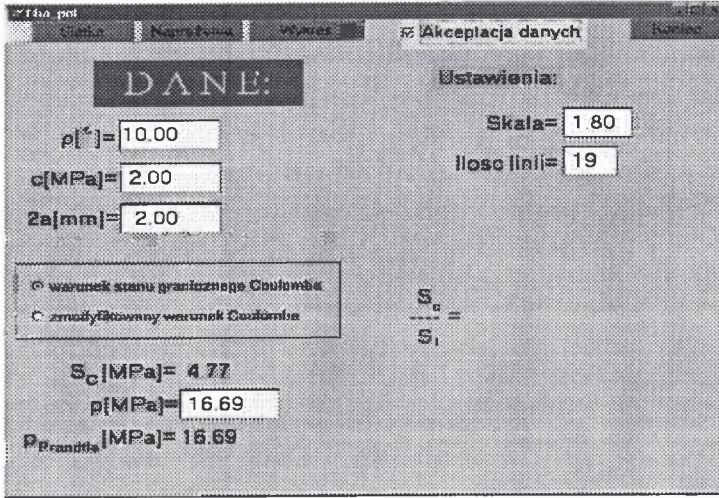


Rys. 8. Obciążanie bloku stemplami płaskimi – warunk zmodyfikowany, wyznaczenie pola naprężeń: a) siatka charakterystyk; b) warunk równowagi ćwiartki bloku; c) odwzorowanie stanu naprężenia w punkcie 2

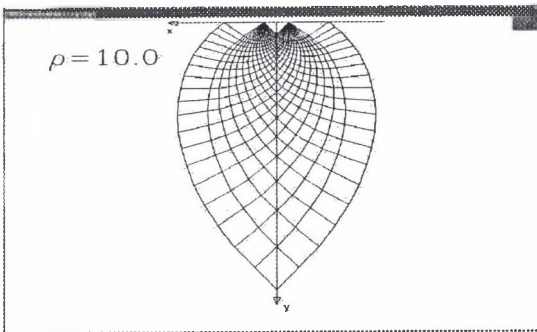
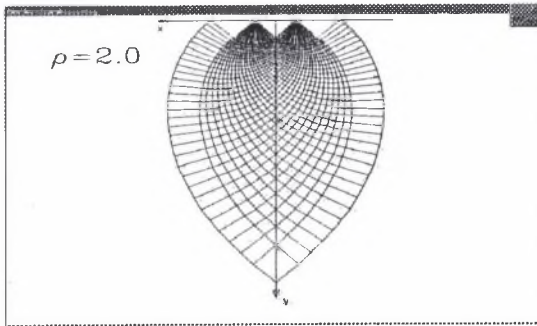
Fig. 8. Loading of block with flat punches – modified yield condition, determining stress field: a) characteristics mesh; b) equilibrium condition for quarter-block; c) representation of stress state in point 2

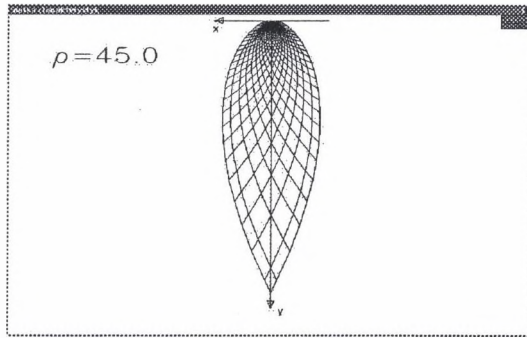


Rys. 9. Ekran powitalny programu CHA-POL
 Fig. 9. Initial screen of CHA-POL program

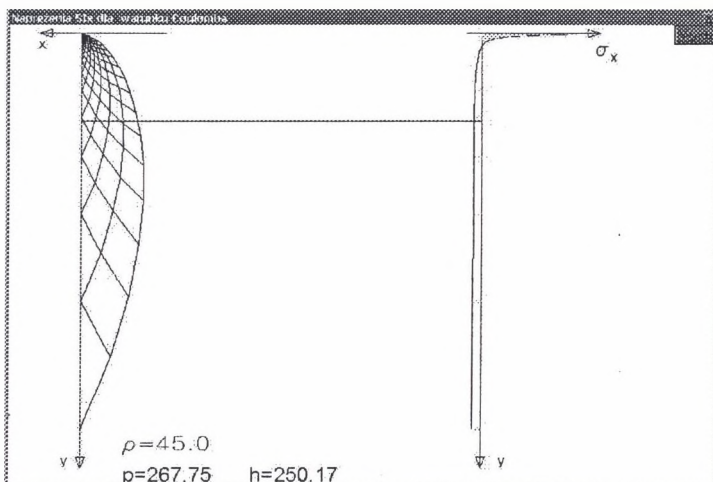
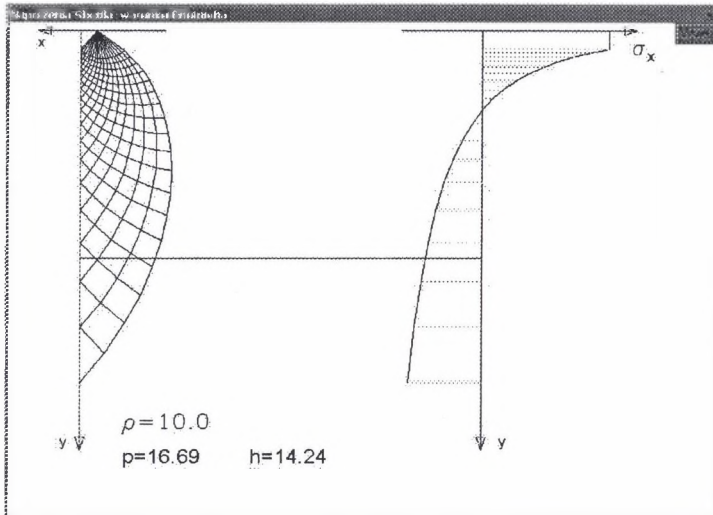


Rys. 10. Ekran główny programu CHA-POL
Fig. 10. Main screen of CHA-POL program

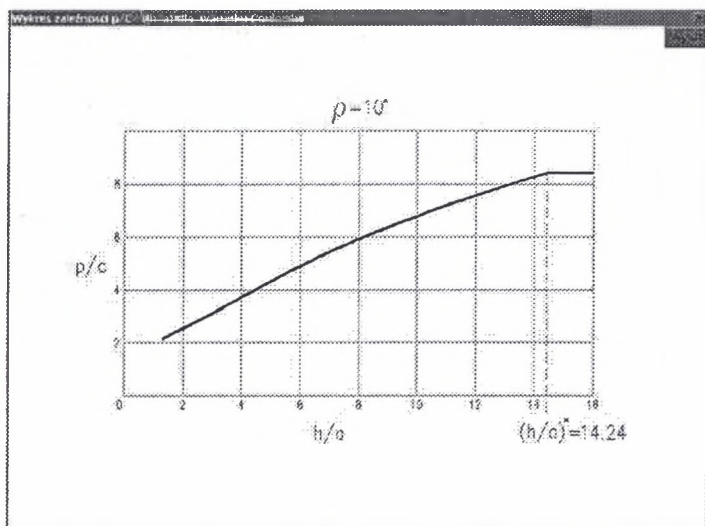




Rys. 11. Przykłady ekranu „Siatka”
 Fig. 11. Examples of “Siatka” (Mesh) screens



Rys. 12. Przykłady ekranu typu „Naprężenia”
 Fig. 12. Examples of “Naprężenia” (Stresses) screens



Rys. 13. Widok ekranu „Wykres”
Fig. 13. “Wykres” (Graph) screen

LITERATURA

1. Zawada J.: Wstęp do mechaniki procesów kruszenia. Wyd. Instytut Technologii Eksploatacji, Radom 1998.
2. Zawada J.: Obciążenie graniczne i pękanie skał. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
3. Izbicki R.J.; Mróz Z.; Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. PWN, Warszawa, Poznań, 1976.
4. Szczepiński W.: Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich. PWN, Warszawa 1974.

Recenzent: Dr hab. inż. Krystian Kalinowski

Abstract

The disintegration processes (crushing and grinding) mechanics development highly depends on the utilisation of numerical analysis for such processes. For this analysis various theoretical methods could be applied, such as:

- methods based on the Limit Load Carrying Capacity theory
- Contact Element Method
- Finite Element Method

The paper presents commonly applied method of Characteristics for Limit Equilibrium Differential Equations, one of the recognised methods based on the limit load carrying capacity theory. An example of the numerical analysis of important boundary problem, i.e. loading brittle block with flat coaxial punches, is provided. Algorithms for determining the stress and displacement velocity fields with Coulomb and modified linear yield conditions assumption as well as the description of computer program CHA-POL created in DELPHI 5 language are included. Finally, exemplary solution printouts are presented.