ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

P. 3359/82

MATEMATYKA-FIZYKA

Z. 40
GLIWICE
1982

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 728

P. 3359/82

ALEKSANDER WABERSKI

METODY TEORII OPTYMALNEJ ESTYMACJI W ZAGADNIENIACH DRGAŃ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH

GLIWICE 1982

OPINIODAWCA
Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Bielewicz

KOLEGIUM REDAKCYJNE
Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), *Sławomir Kończak* (redaktor działu),
Elżbieta Stinzing (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
Roma Łoś

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-470X

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+85 Ark. wyd. 7,5 Ark. druk. 7,625 Papier piśmienny kl. III. 70x100, 70g
Oddano do druku 7.06.1982 Podpis. do druku 15.07.1982 Druk ukończ. w sierpniu 1982
Zam 561/82 B-24 Cena zł 19,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

P.301/82

SPIS TREŚCI

Str.

1. WPROWADZENIE 5

2. MODELE DRGAŃ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH 9

2.1. Zagadnienia graniczne opisujące drgania układów dynamicznych o stałych rozłożonych 9

2.2. Sformułowanie zagadnień granicznych teorii drgań w terminach analizy funkcjonalnej 14

3. PROCESY STOCHASTYCZNE O WARTOŚCIACH W PRZESTRZENIACH HILBERTA . 20

3.1. Modele zakłóceń losowych jako procesy stochastyczne o wartościach w przestrzeniach Hilberta 20

3.2. Procesy stochastyczne Wienera o wartościach w przestrzeniach Hilberta 22

3.3. Całki stochastyczne jako procesy o wartościach w przestrzeniach Hilberta 23

4. OPTYMALNE FILTROWANIE ZAKŁÓCEŃ LOSOWYCH O CHARAKTERZE "BIAŁYCH SZUMÓW" 28

4.1. Sformułowanie problemu 28

4.2. Model optymalnego filtru 31

4.3. Wyznaczanie estymaty drgań układów o stałych rozłożonych . 42

5. OPTYMALNE FILTROWANIE ZAKŁÓCEŃ LOSOWYCH O ZNANYCH CHARAKTERYSTYKACH PROBABILISTYCZNYCH, A NIE BĘDĄCYCH "BIAŁYMI SZUMAMI" ... 55

5.1. Sformułowanie problemu 55

5.2. Model optymalnego filtru 60

5.3. Wyznaczanie estymaty drgań układów o stałych rozłożonych . 70

6. OPTYMALNE FILTROWANIE ZAKŁÓCEŃ LOSOWYCH WYSTĘPUJĄCYCH W OGRANICZONYM OBSZARZE 78

6.1. Sformułowanie problemu 78

6.2. Model optymalnego minimaksowego filtru 81

6.3. Wyznaczanie estymaty i obszaru jej występowania 88

7. ZASTOSOWANIE TEORII. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE 90

7.1. Estymacja drgań prętów 90

7.2. Estymacja drgań płyt 102

8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE 109

Str.

DODATEK 1. Zastosowanie metody R-funkcji do badanie drgań układów o stałych rozłożonych o złożonej geometrii 111

DODATEK 2. Aspekt eksperymentalny metod teorii estymacji. Identyfikacja zakłóceń losowych 116

LITERATURA 117

STRESZCZENIA 120

1. WPROWADZENIE

W wielu problemach techniki, a w szczególności techniki rakietowej i lotniczej, zachodzi konieczność badania drgań losowych układów dynamicznych o stałych rozłożonych jakimi są konstrukcje cienkościenne. Przy badaniu drgań, np. lotniczych konstrukcji prototypowych, występuje konieczność oszacowania wpływu zakłóceń o charakterze losowym, pojawiających się w przyrządach pomiarowych, a także bezpośrednio oddziałujących na konstrukcję. Oszacowania te można uzyskać wykorzystując teorię optymalnego filtrowania, przy czym szczególnie użyteczny jest model estymacji przedstawiony przez Kalmana i Bucy'ego ([15], [16]). Metoda oparta na tym modelu posiada zasadniczą przewagę nad innymi metodami oszacowań. Przewaga ta wynika z rekurencyjnego charakteru uzyskiwanych za pomocą tej metody oszacowań, czyli estymaty, gdyż obserwacje w miarę jak napływają, są na bieżąco wykorzystywane do korygowania tej estymaty. Dzięki temu uzyskuje się znaczną oszczędność w pracochłonności obliczeń numerycznych. Podstawowymi, typowymi konstrukcjami nośnymi, które mogą być interpretowane jako układy dynamiczne o stałych rozłożonych są elementy prętowe i płytowe.

Filtrowanie zakłóceń losowych dla tego typu układów przedstawione zostało w niniejszej pracy. Ze względu na fakt, że zagadnienia graniczne drgań układów o stałych rozłożonych są opisane przez równania różniczkowe cząstkowe wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi, konstrukcję optymalnego filtru trzeba przeprowadzić w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta. Badania w tym zakresie odnośnie do równań różniczkowych cząstkowych z pierwszą pochodną względem czasu prowadzili H. Kushner ([19], [20]), P.S. Knopow i L.G. Bażenow ([1], [21]), S.G. Tsafestas ([38÷44]), A. Bensoussan ([3]), J.H. Seinfeld ([35]), a także R. Curtain i Ichikawa ([7, 8]).

W pracach tych najczęściej rozpatrywano problem optymalnego filtrowania w związku z optymalnym sterowaniem układami dynamicznymi opisanymi przez paraboliczne stochastyczne równania różniczkowe cząstkowe. W pracy A. Bensoussona ([3]) podano również metodę dekompozycji drogą rozwiązania problemu optymalnego filtrowania układów opisanych przez równania różniczkowe cząstkowe z drugą pochodną względem czasu. Wszystkie te prace dotyczyły w zasadzie zagadnień filtrowania zakłóceń losowych o charakterze "białych szumów", co stanowiło poważne uproszczenie problemu, gdyż są to procesy fizykalnie nierealizowalne. Znacznie bliższe rzeczywistości mogą być te modele optymalnego filtrowania, które uwzględniają zakłócenia losowe o charakterze tzw. "kolorowych szumów". Jednak przyjęty wtedy klasyczny model filtru Kalmana staje się bardzo skomplikowany, gdyż powięk-

sza się układ równań różniczkowych cząstkowych opisujących ten model i wzrastają gwałtownie trudności w procesie numerycznego rozwiązania tego problemu. Optymalny filtr Kalmana-Bucy w ujęciu klasycznym, jak widać wymaga znajomości charakterystyk probabilistycznych działających zakłóceń losowych. W wielu problemach techniki wyznaczenie takich charakterystyk jest trudne lub wręcz niemożliwe. Dość łatwo natomiast można oszacować obszar, w którym te zakłócenia występują. Informacje te mogą być wykorzystane do konstrukcji tzw. "minimaksowego filtru", który pozwala oszacować optymalną estymatę w sensie średniokwadratowym, a także oszacować obszar, w środku którego będzie ona występować. Obszar ten zwany jest "obszarem informacyjnym". Szersze omówienie teorii minimaksowego filtrowania można znaleźć w podstawowych pracach Schweppego ([34]) i Kurżańskiego ([18]). Zastosowaniem teorii minimaksowego filtrowania dla układów o stałych rozłożonych zajmowali się K. Lee ([24]) i A.J. Hapałow ([11]). W pracach swoich analizowali oni układy opisane przez równania paraboliczne typu przewodnictwa cieplnego z pierwszą pochodną względem czasu.

W prezentowanej pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia optymalnego filtrowania zakłóceń losowych drgań układów o stałych rozłożonych tak w przypadku gdy te zakłócenia posiadają znane charakterystyki probabilistyczne ("białe i kolorowe szumy), jak i w przypadku znajomości tylko obszarów występowania tych zakłóceń.

Całą pracę podzielono na osiem części. Część pierwszą stanowi wprowadzenie. W części drugiej przedstawiono zagadnienia graniczne opisujące drgania takich układów o stałych rozłożonych, jak pręty, płyty i powłoki, poprzez równania różniczkowe operatorowe w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta. W trzeciej zaprezentowano modele zakłóceń losowych działających na układy o stałych rozłożonych jako procesy stochastyczne (pola losowe) o wartościach w przestrzeniach Hilberta. Szczególną przy tym uwagę zwrócono na procesy Wienera i całki stochastyczne na procesach Wienera o wartościach w przestrzeniach Hilberta. W czwartej przedstawiono klasyczny model optymalnego filtru Kalmana-Bucy dla zagadnień granicznych drgań prętów i płyt w przypadku działania zakłóceń losowych o charakterze "białych szumów". Ponieważ procesy tego typu stanowią bardzo wyidealizowany model zakłóceń losowych, w rozdziale piątym opracowany został przez autora nowy model filtru uwzględniający zakłócenia losowe o innym charakterze niż "białe szumy" i posiadające znane charakterystyki probabilistyczne. Model ten w odróżnieniu od klasycznego modelu Kalmana dla "kolorowych szumów" nie wymaga konieczności gwałtownego zwiększenia liczby równań opisujących go. W przypadku dużych trudności w wyznaczeniu charakterystyk probabilistycznych zakłóceń losowych działających na układy, a przy znajomości obszarów występowania tych zakłóceń można zastosować model tzw. minimaksowego filtru średniokwadratowego. W rozdziale szóstym zastosowano taki filtr do badania drgań układów o stałych rozłożonych, takich jak pręty i płyty. Rozdział siódmy niniejszej pracy przeznaczono na zademonstrowanie teoretycznych modeli filtrów do badania drgań w obecności zakłóceń losowych konkretnych elementów konstrukcyjnych prętowych i płytowych, przedstawiając wyczerpujące przykłady numeryczne. W rozdziale ósmym zawarto podsumowanie i wnioski końcowe wypływające z pracy. Na końcu pracy dołączono również dwa dodatki. Pierwszy z nich został poświęcony metodzie R-funkcji, której zastosowanie pozwala badać filtrowanie drgań szerszej klasy układów o stałych rozłożonych na przypadki układów o złożonej geometrii, a w szczególności układów płytowych. W drugim z dodatków przedstawiono krótkie omówienie metod identyfikacji charakterystyk probabilistycznych zakłóceń losowych działających na układy o stałych rozłożonych.

2. MODELE DRGAŃ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH

2.1. Zagadnienia graniczne opisujące drgania układów dynamicznych o stałych rozłożonych

Rozważać będziemy układy dynamiczne o stałych rozłożonych opisane przez pewną klasę równań różniczkowych cząstkowych o postaci:

$$a_0(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + a_1(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + Lu(x,t) = f(x,t,\vartheta), \qquad \begin{matrix} x\in\Omega\subset R^n \\ t\in R^1_+ \end{matrix} \tag{2.1}$$

gdzie

$$L(\cdot) \stackrel{df}{=} \sum_{p,q\leq m} (-1)^p \, D^p\left[a_{pq}(x)\, D^q(\cdot)\right],$$

$$a_{pq}(x)\in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \quad a_0(x), \quad a_1(x)\in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

$$D^p(\cdot) \stackrel{df}{=} \frac{\partial^{|p|}(\cdot)}{\partial(x^1)^{p_1}\,\partial(x^2)^{p_2}\ldots\partial(x^n)^{p_n}}, \qquad |p| = p_1 + p_2 + \ldots p_n$$

jest wielowskaźnikowym symbolem różniczkowania.

Przestrzeń $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ jest przestrzenią funkcji próbnych, na których definiowane są rozwiązania uogólnione równania (2.1), ([10], [25]). Prawą stronę równania (2.1), zwaną wymuszeniem losowym, stanowi czasowo-przestrzenne pole losowe $f(x,t,\vartheta)$ generowane przez przestrzeń probabilistyczną $(\Gamma, \mathcal{F}, P)$ i $\vartheta\in\Gamma$ gdzie Γ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych ([50]).

Równania te, gdy opisują jakieś zagadnienia graniczne, należy rozpatrywać wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi, które w przypadku gdy są liniowe mają postać:

$$\sum_{0\leq j\leq m-1} B_j u\Big|_{\partial\Omega} = g_j \qquad x\in\partial\Omega \tag{2.2}$$

gdzie

$$B_j(\cdot) \stackrel{df}{=} \sum_{|h|\leq m_j} b_{jh}(x)\, D^h(\cdot)$$

a $\partial\Omega$ jest brzegiem obszaru Ω i warunkami początkowymi:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = u_1(x) \tag{2.3}$$

Równania stanu (2.1) wraz z warunkami brzegowymi (2.2) i początkowymi (2.3) stanowią tzw. zagadnienie graniczne problemu. Układy dynamiczne o stałych rozłożonych, opisane tego typu równaniemi reprezentują szeroką klasę modeli drgań elementów konstrukcyjnych, jak pręty i płyty. Rozpatrzymy obecnie szczególne przypadki zagadnienia granicznego (1-3), opisujące drganie typowych elementów konstrukcyjnych ([17] , [37] , [45]).

1. Drgania wzdłużne i skrętne prętów

Równanie drgań ma postać:

$$a_0(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + a_1(x)\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left[a_2(x)\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right] = f(x,t,\gamma) \tag{2.4}$$
$$x \in \Omega \subset R^1, \quad t \in R^1_+$$

gdzie w tym przypadku

$$L(\cdot) \stackrel{df}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)\right]$$

przy czym dla drgań wzdłużnych

$a_0(x) = \rho F(x)$, ρ - jest gęstością materiału pręta, $F(x)$ - jest polem przekroju poprzecznego pręta,
$a_1(x) = 2n a_0(x)$, n - jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego,
$a_2(x) = EF(x)$, E - jest modułem Younga,

a dla drgań skrętnych

$a_0(x) = \rho I_0(x)$, $I_0(x)$ - jest biegunowym momentem bezwładności.
$a_1(x) = 2n a_0(x)$
$a_2(x) = GI_0(x)$, G - jest modułem Kirchhoffa.

Warunki brzegowe są uzależnione od sposobu umocowania brzegów pręta i ich liczba zależy od rzędu operatorów różniczkowych występujących w równaniu. W przypadku drgań wzdłużnych i skrętnych najczęściej mają one postać:

a) Dla pręta sztywno utwierdzonego na brzegach:

$u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0$ (gdyż przemieszczenie brzegów pręta jest równe zeru).

b) Dla pręta o ewobodnych brzegach

$\frac{\partial}{\partial x} u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0$ (w przypadku drgań wzdłużnych oznacza to zerowenie się siły rozciągającej pręt $P(x,t) = EF(x)\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$ na brzegu, a w przypadku drgań skrętnych zerowanie się momentu $M_s(x,t) = GI_0(x)\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$ na brzegach).

c) Dla pręta o mieszanych warunkach brzegowych, np. na jednym końcu sztywno utwierdzonego, a na drugim swobodnego:

$$u\Big|_{x\in\partial\Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u\Big|_{x\in\partial\Omega_2} = 0, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$$

2. Drgania poprzeczne prętów

Równanie drgań ma postać:

$$a_0(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + a_1(x)\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right] = f(x,t,\gamma) \tag{2.5}$$
$$x \in \Omega \subset R^1, \quad t \in R^1_+$$

gdzie w tym przypadku

$$L(\cdot) \stackrel{df}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot)\right]$$

przy czym

$a_0(x) = \rho F(x)$, ρ - jest gęstością materiału pręta, $F(x)$ jest polem przekroju poprzecznego pręta,
$a_1(x) = 2n a_0(x)$, n - jest współczynnikiem tłumienia,
$a_2(x) = EI(x)$, $I(x)$ - jest momentem bezwładności przekroju pręta,
E - modułem Younga.

W przypadku drgań poprzecznych pręta najczęściej spotykane warunki brzegowe mają postać:

a) Dla pręta sztywno utwierdzonego na brzegach

$$u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

(Oznacza to zerowanie się na brzegu przemieszczenia i kąta ugięcia).

b) Dla pręta swobodnie podpartego na obu brzegach

$$u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

(Oznacza to zerowanie się na brzegu przemieszczenia i momentu zginającego $M(x,t) = EI(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$).

c) Dla pręta o mieszanych warunkach brzegowych:
(np. na jednym końcu sztywno utwierdzonego, a na drugim swobodnego).

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{x\in\partial\Omega_1} &= 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\Big|_{x\in\partial\Omega_2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} u\Big|_{x\in\partial\Omega_1} &= 0, \qquad \frac{\partial^3}{\partial x^3} u\Big|_{x\in\partial\Omega_2} = 0 \end{aligned}\right\} \partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2$$

(Warunek $\frac{\partial^3}{\partial x^3} u\Big|_{x\in\partial\Omega_2} = 0$ oznacza, że siła poprzeczna $T(x,t) = EI(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x,t)$ równa się zeru na brzegu).

3. Drgania poprzeczne płyt

Równanie drgań ma postać:

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + \rho_1(x)\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \Big[\Delta\big(D\Delta u(x,t) - (1-\vartheta_0)$$

$$\Big[\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} D(x)\frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} u(x,t) - 2\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2} D(x)\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2} u(x,t) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} D(x)\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} u(x,t)\Big]\Big] = f(x,t,\eta), \qquad \begin{matrix} x = (x^1,x^2)\in\Omega\subset R^2 \\ t\in R^1_+ \end{matrix} \qquad (2.6)$$

gdzie

$$L(\cdot) \stackrel{df}{=} \Big[\Delta\big(D\Delta(\cdot) - (1-\vartheta_0)\Big[\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} D(x)\frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}(\cdot) -$$

$$- 2\frac{\partial^2}{\partial x^1 x^2} D(x)\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} D(x)\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}(\cdot)\Big]\Big]$$

przy czym

$$\Delta(\cdot) = \Big(\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}\Big)(\cdot)$$

$\rho_0(x) = \rho h(x)$, ρ - jest gęstością materiału płyty, $h(x)$ - jest jej grubością,

$\rho_1(x) = 2n\rho_0(x)$, n - jest współczynnikiem tłumienia,

$D(x) = \frac{\tilde{E}h^3(x)}{12(1-\vartheta_0^2)}$, $\tilde{E}$ - jest modułem Younga, ϑ_0 - liczbą Poissona.

W przypadku drgań cienkich płyt sprężystych najczęściej spotykane warunki brzegowe mają postać:

a) Dla płyt sztywno utwierdzonych na całym brzegu

$$u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\nu} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \qquad (2.7)$$

gdzie ν - jest jednostkowym wektorem normalnym do brzegu $\partial\Omega$.
(Warunek $\frac{\partial}{\partial\nu} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0$ oznacza zerwanie się kąta ugięcia płyty na brzegu $\partial\Omega$).

b) Dla płyt swobodnie podpartych na całym brzegu

$$u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} u + \vartheta_0\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \qquad (2.8)$$

gdzie τ - jest wektorem jednostkowym stycznym do brzegu $\partial\Omega$.
(Warunek $\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} u + \vartheta_0\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big|_{x\in\partial\Omega} = M(x,t) = 0$ oznacza zerowanie się momentu gnącego na brzegu $\partial\Omega$).

c) Dla płyt przy mieszanych warunkach brzegowych np. na części brzegu sztywnie utwierdzonych a na części swobodnych,

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{x\in\partial\Omega_1} &= 0 \qquad \frac{\partial}{\partial\nu} u\Big|_{x\in\partial\Omega_1} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} u + \vartheta_0\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} u\Big|_{x\in\partial\Omega_2} &= 0 \\ \frac{\partial^3}{\partial\nu^3} u + (2-\vartheta_0)\frac{\partial^3}{\partial\nu\partial\tau^2} u\Big|_{x\in\Omega_2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

(Warunek ostatni oznacza zerowanie się siły poprzecznej $T(x,t)$ na brzegu $\partial\Omega_2$).

4. Drgania poprzeczne płyt ortotropowych

W przypadku drgań płyt, w których własności sprężyste przy zginaniu w różnych kierunkach posiadają różne własności, mamy do czynienia z płytami anizotropowymi. Szczególny przypadek płyt anizotropowych stanowią płyty ortotropowe. Charakterystyczną cechą tych płyt jest to, że ich włas-

ności sprężyste mają trzy płaszczyzny symetrii, z których jedna leży w płaszczyźnie płyty. Równanie drgań płyt ortotropowych ma postać:

$$D_1\frac{\partial^4}{(\partial x^1)^4}u(x,t) + 2D_3\frac{\partial^4}{(\partial x^1)^2(\partial x^2)^2}u(x,t) + D_2\frac{\partial^4}{(\partial x^2)^4}u(x,t) +$$

$$+ 2\varrho h\gamma\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \varrho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = f(x,t\gamma)$$

W przypadku płyty prostokątnej o osiach ortotropii równoległych do osi współrzędnych mamy:

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{ox}\nu_{oy})}, \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{ox}\nu_{oy})}, \quad r_3 = \frac{G_{xy}h^3}{12}$$

gdzie E_x, E_y, G_{xy}, ν_{ox}, ν_{oy} - stałe sprężyste charakteryzujące ortotropię płyty.

W przypadku drgań płyt ortotropowych warunki brzegowe nałożone na przemieszczenia $u(x,t)$ są analogiczne jak dla płyt izotropowych rozpatrywanych w punkcie 3. Równanie drgań obowiązuje oczywiście dla płyt ortotropowych o stałej grubości. W przypadku gdy ortotropia jest spowodowana samym ukształtowaniem płyty przez wprowadzenie żeber dość gęsto i w regularnych odstępach, a materiał jest jednorodny, stałe D_1, D_2 i D_3 obliczane są za pomocą różnych innych wzorów.

Dla płyty wzmocnionej żebrami w jednym kierunku, np.

$$D_1 = D_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_o^2)}, \quad D_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_o^2)} + \frac{E'I}{a_1},$$

gdzie:

E' - moduł sprężystości,

I - moduł bezwładności usztywnień.

2.2. Sformułowanie zagadnień granicznych teorii drgań w terminach analizy funkcjonalnej

Układy dynamiczne o stałych rozłożonych opisane równaniem (2.1), mogą być interpretowane jako równania różniczkowe operatorowe w przestrzeniach Banacha, o postaci: ([10], [23], [25], [26])

$$\left.\begin{aligned} &a_o\frac{d^2}{dt^2}u(t) + a_1\frac{d}{dt}u(t) + Lu(t) = f(t,\gamma) \\ &u(0) = u_o, \quad \frac{d}{dt}u(0) = u_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

Taka interpretacja równań różniczkowych cząstkowych wymaga jednak wprowadzenia złożonych przestrzeni funkcyjnych o wartościach w przestrzeniach Banacha. Drgania bowiem, układów o stałych rozłożonych, jako procesy niestacjonarne, przebiegające w przestrzeni na przedziale czasowym $[0,T]$, można interpretować jako funkcje czasu i położenia, tzn. utożsamić z funkcjami, które przyporządkowują każdej parze $\{x,t\} \in \Omega \times [0,T]$ rzeczywistą liczbę lub wektor $u(x,t)$. Wtedy czas i przestrzeń są traktowane równoprawnie. Okazuje się jednak, że znacznie wygodniej posługiwać się funkcjami czasu, które każdemu momentowi czasu t przyporządkowują odpowiednią funkcję położenia $u(\cdot,t)$. Na przykład każdemu momentowi czasu przyporządkowane jest jakieś ugięcie płyty drgającej. Tak więc określa się funkcje określone na przedziale czasowym $[0,T]$ o wartościach w pewnej przestrzeni funkcji położenia, która w większości rozpatrywanych w tej pracy przypadków będzie przestrzenią Banacha. Przy takiej interpretacji pochodne występujące w równaniu (2.10) są pochodnymi w sensie Gateux, funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha. Pochodne takie definiujemy następująco:

Definicja 1: Funkcja $u \in ([0,T] \to X)$, gdzie X jest pewną przestrzenią Banacha, nazywa się różniczkowalną w punkcie $t \in [0,T]$, jeśli istnieje taki element $e \in X$, dla którego spełniony jest warunek:

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ t+h\in[0,T]}} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - e \right\| = 0 \qquad (2.11)$$

Ten element e nazywa się pochodną od u w punkcie t.

Definicja 2: Funkcja $u \in ([0,T] \to X)$ nazywa się różniczkowalną, jeśli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $[0,T]$.
Funkcję $\frac{d}{dt}u(t) \in ([0,T] \to X)$, która każdemu $t \in [0,T]$ przyporządkowuje pochodną od u w punkcie t, nazywamy pochodną od u.

Definicja 3: Funkcja $u \in ([0,T] \to X)$ jest słabo różniczkowalna w punkcie $t \in [0,T]$, jeśli istnieje element $e \in X$, dla którego spełniony jest warunek:

$$\bigwedge_{f\in V} \lim_{\substack{h\to 0 \\ t+h\in[0,T]}} < f, \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - e > = 0, \qquad (2.12)$$

gdzie X^* jest przestrzenią Banacha sprzężoną do X, a $<\cdot,\cdot>$ jest funkcjonałem liniowym na elementach z X o wartościach w X^*.
Ten element e nazywamy słabą pochodną od u w punkcie t i także oznaczamy $\frac{d}{dt}u(t)$.

Operowanie przestrzeniami funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha, oprócz pojęcia pochodnej, wymaga jeszcze wprowadzenia pojęć mierzalności i całkowalności funkcji z $([0,T] \to X)$. Pojęcie to po raz pierwszy wprowadził Bochner.

Definicja 4: Funkcja $u \in ([0,T] \to X$ nazywa się prostą, jeśli w $[0,T]$ posiada skończoną liczbę parami nieprzecinających się mierzalnych w sensie Lebesgue'a podzbiorów B_i z $mes(B_i) < \infty$, takich że funkcja u na każdym zbiorze B_i przyjmuje stałą wartość e_i i $u(s) = 0$ dla $s \in [0,T] - \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Całkę w sensie Bochnera od funkcji prostej określa się wzorem:

$$\int_0^T u(s)ds = \sum_{i=1}^{n} mes(B_i)e_i. \tag{2.13}$$

Definicja 5: Funkcja $u \in ([0,T] \to X)$ nazywa się mierzalną w sensie Bochnera, jeśli istnieje taki ciąg $\{u_n\}$ funkcji prostych, że $u_n(s) \to u(s)$ dla prawie wszystkich $s \in [0,T]$.

Jeśli dodatkowo taki ciąg spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u(s) - u_n(s)\| ds = 0, \tag{2.14}$$

to funkcja u nazywa się całkowalną w sensie Bochnera.

Całka Bochnera od takiej funkcji u po mierzalnym w sensie Lebesgue'a zbiorze $B \subset [0,T]$ określona jest wzorem:

$$\int_B u(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(s)\, C_B(s)ds, \tag{2.15}$$

gdzie

C_B - indykatorowa funkcja B:

$$C_B(s) = \begin{cases} 1 & \text{przy} \quad s \in B \\ 0 & \text{przy} \quad s \notin B \end{cases}$$

Z mierzalności w sensie Bochnera funkcji u wynika, że funkcja rzeczywista $\| u(\cdot) - u_n(\cdot) \|$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a na $[0,T]$. Dlatego warunek (2.14) ma sens. Jeśli jest on spełniony, to granica (2.15) istnieje i nie zależy od wyboru ciągu funkcji prostych posiadających własności (2.13) i (2.14). Pojęcie całkowalności w sensie Bochnera pozwala wprowadzić przestrzenie funkcji całkowalnych o wartościach w przestrzeniach Banacha.

Definicja 6: Przez $L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$ oznacza się zbiór wszystkich mierzalnych w sensie Bochnera funkcji $u \in ([0,T] \to X)$, dla których

$$\int_0^T \|u(s)\|_X^p \, ds \leq \infty \tag{2.16}$$

Norma funkcji u w przestrzeniach $L^p(0,T;X)$ jest definiowana następująco:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(s)\|_X^p \, ds\right)^{1/p} \leq \infty \tag{2.17}$$

Szczególnym przypadkiem przestrzeni $L^p(0,T;X)$ jest przestrzeń Hilberta $L^2(0,T;H)$, w której iloczyn skalarny dwóch funkcji u i v zdefiniowany jest następująco:

$$\langle u,v\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u,v\rangle_H dt \tag{2.18}$$

gdzie H jest pewną przestrzenią Hilberta.

Przestrzenie te odgrywają ważną rolę przy badaniu równań różniczkowych operatorowych w przestrzeniach Banacha. Tak np. równanie (2.1) można interpretować jako równanie różniczkowe operatorowe odwzorowujące funkcje $u \in L^2(0,T;V)$ w przestrzeń sprzężoną $L^2(0,T;V^*)$, gdzie V jest pewną przestrzenią Banacha, a V^* przestrzenią Banacha sprzężoną do niej. Aby jednak zagadnienia graniczne opisywane przez równania różniczkowe operatorowe były poprawnie postawione, czyli aby istniało jednoznacznie określone rozwiązanie problemu, trzeba nałożyć pewne warunki na operator L oraz dobrać przestrzenie Banacha, w których będzie działał. Niech $L: V \to V^*$, gdzie V jest pewną przestrzenią Banacha, a V^* jest przestrzenią Banacha sprzężoną do niej ([10], [24]). Przez rozwiązanie problemu w tym przypadku uważamy rozwiązanie w sensie uogólnionym (czyli dystrybucyjnym). Operator L można wtedy rozpatrywać jako rozszerzenie pewnego operatora różniczkowego rozumianego w sensie klasycznym i oznaczonego L_0 ([10]). Typowy operator L można przedstawić w postaci:

$$L = S^* L_1 S, \tag{2.19}$$

gdzie

S - ciągły operator liniowy działający z przestrzeni Banacha V w jakąś inną przestrzeń Banacha Y $L_1 \in (Y \to Y^*)$; gdzie Y^* przestrzeń Banacha sprzężona do Y,

S^* - sprzężony do S operator odwzorowujący przestrzeń Y^* w sprzężoną do V przestrzeń Banacha V^*.

Operator L o postaci

$$L = S^* L_1 S$$

nazywany jest energetycznym rozszerzeniem operatora L_0. Jeśli operator L_1 jest liniowy, ograniczony, ciągły, symetryczny i dodatnio określony ([10], [24]), to równanie (2.1) posiada jednoznaczne rozwiązanie. Badanie tego typu równań wymaga operowania kilkoma normami określonymi w odpowiednich przestrzeniach Banacha lub Hilberta. Wraz z przestrzenią Banacha V wprowadza się bowiem przestrzeń Hilberta H (10. 24), przy czym

$$V \subset H$$

V jest gęsta w H i włożenie V w H jest ciągłe. Przestrzeń H pokrywa się ze swoim sprzężeniem i jeśli przez V^* oznaczymy przestrzeń sprzężoną do V, to ponieważ V jest gęsta w H, można utożsamić H z podprzestrzenią przestrzeni V^*.

Wtedy $V \subset H \subset V^*$.

Przedstawione w niniejszym rozdziale ujęcie zagadnień granicznych w terminach analizy funkcjonalnej zademonstrujemy na przykładzie zagadnienia granicznego drgań wzdłużnych pręta sztywno utwierdzonego na brzegach. Operator L_0 ma wtedy postać:

$$L_0(\cdot) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)\right]$$

Dziedzina operatora L_0, $D(L_0) = C^2(\Omega)$, $\Omega = R^1$, $V = H_0^1(\Omega)$, gdzie $H_0^1(\Omega)$ jest przestrzenią Sobolewa, będącą domknięciem zbioru funkcji przestrzeni funkcji gładkich o nośniku zwartym $C_0^\infty(\Omega)$ w przestrzeni Sobolewa $H^1(\Omega)$. Iloczyn skalarny w przestrzeni $H_0^1(\Omega)$ definiuje się, tak jak iloczyn skalarny w przestrzeni $H^1(\Omega)$, czyli

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx$$

$$Y = L^2(\Omega), \quad S(\ ) \stackrel{df}{=} \operatorname{grad}(\cdot), \quad S^*(\cdot) \stackrel{df}{=} \operatorname{div}(\cdot)$$

$$L_1(\cdot) \stackrel{df}{=} a_2(x)\,(\cdot), \quad H = L^2(\Omega)$$

Tak więc

$$L: V \to V^*, \quad S: V \to Y, \quad L_1: Y \to Y^*, \quad S^*: Y^* \to V^*$$

W oparciu o przestrzenie Banacha lub Hilberta V, H, V^* można teraz wprowadzić złożone przestrzenie funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha lub Hilberta:

$$\mathcal{V} = L^2(0,T;V), \quad \mathcal{H} = L^2(0,T;H), \quad \mathcal{V}^* = L^2(0,T;V^*)$$

Oczywiście $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}^*$

Można pokazać, że jeśli wymuszenie $f(t)$ ma charakter zdeterminowany i $f \in \mathcal{V}$, to rozwiązanie równania (2.1) $u(t) \in \mathcal{V}$. W przypadku jeśli wymuszenie $f(t,\vartheta)$ ma charakter losowy, to trzeba je traktować jako proces stochastyczny o wartościach w przestrzeniach Hilberta. Istnieje wtedy konieczność wprowadzenia przestrzeni zmiennych losowych o wartościach w przestrzeniach Hilberta. Zagadnieniem tym zajmiemy się w następnym rozdziale.

3. PROCESY STOCHASTYCZNE O WARTOŚCIACH W PRZESTRZENIACH HILBERTA

3.1. Modele zakłóceń losowych jako procesy stochastyczne o wartościach w przestrzeniach Hilberta

Zakłócenia losowe działające na układ i pojawiające się w przyrządach pomiarowych podczas obserwacji, można modelować za pomocą procesów stochastycznych o znanych charakterystykach probabilistycznych i które mogą być polami losowymi. W przypadku układów dynamicznych o stałych, rozłożonych na ogół są to procesy stochastyczne o wartościach w przestrzeniach Hilberta. Posługiwanie się tego typu procesami wymaga jednak wprowadzenia odpowiedniej miary probabilistycznej w przestrzeni Hilberta, czyli uzyskania mierzalności w tej przestrzeni. Niech $(\Gamma,\mathcal{F},P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną i

Definicja 7: Mierzalne odwzorowanie $[0,T]\times\Gamma\to H$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta, nazywamy procesem stochastycznym o wartościach w przestrzeni Hilberta H i zapisujemy:

$$\mathrm{mes}([0,T]\times\Gamma\to H),\quad [0,T]\in R_+^1 \tag{3.1}$$

Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych jest przestrzenią topologiczną. Wtedy miara probabilistyczna P jest interpretowana jako miara Radona ([3], [14]).

Definicja 8: Miarą probabilistyczną Radona nazywamy funkcję zbiorów określonych na σ-algebrze borelowskich zbiorów $\mathcal{F}$ w przestrzeni topologicznej Γ o postaci P_1-P_2, gdzie P_1, P_2 są skończonymi miarami regularnymi zdefiniowanymi następująco:

$$\bigwedge_{B\in\mathcal{F}} P(B) = \sup_{\substack{K\subset B\\ K \text{ jest zwarty}}} P(K) \tag{3.2}$$

Za pomocą probabilistycznej miary Radona można wprowadzić całkowalne przestrzenie procesów stochastycznych o wartościach w przestrzeniach Hilberta. Przedtem jednak wprowadzimy całkowalne przestrzenie zmiennych losowych o wartościach w przestrzeniach Hilberta.

Definicja 9: Przez $L^p(\Gamma,P;H)$, $1\leq p<\infty$ oznacza się zbiór wszystkich mierzalnych w sensie Bochnera funkcji $u(\gamma)\in(\Gamma\to H)$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta, dla których

$$\int_\Gamma \|u(\gamma)\|^p\, P(d\gamma) < \infty \tag{3.3}$$

i norma w tej przestrzeni jest określona następująco:

$$\|u\|_{L^p(\Gamma,P;H)} = \left(\int_\Gamma \|u(\gamma)\|_H^p\, P(d\gamma)\right)^{1/p} \tag{3.4}$$

Szczególnym przypadkiem przestrzeni $L^p(\Gamma,P;H)$ jest przestrzeń Hilberta $L^2(\Gamma,P;H)$ z iloczynem skalarnym:

$$\langle u,v\rangle_{L^2(\Gamma,P;H)} = \int_\Gamma \langle u,v\rangle_H\, P(d\gamma) \tag{3.5}$$

i normą

$$\|u\|_{L^2(\Gamma,P;H)} = \int_\Gamma \|u(\gamma)\|^2\, P(d\gamma) \tag{3.6}$$

Na podobnych zasadach można zdefiniować całkowalne przestrzenie procesów stochastycznych o wartościach w przestrzeniach Hilberta.
Oznaczmy $\mathcal{H} = L^p(0,T;H)$.

Definicja 10: Przez $L^p(0,T;\mathcal{H})$, $1\leq p<\infty$ oznaczamy zbiór wszystkich mierzalnych w sensie Bochnera funkcji $u(t)\in([0,T]\to\mathcal{H})$, dla których

$$\int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^p\, dt < \infty \tag{3.7}$$

i norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;\mathcal{H})} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^p\, dt\right)^{1/p}$$

W przypadku gdy $p=2$, przestrzeń $L^2(0,T;\mathcal{H})$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle u,v\rangle_{L^2(0,T;\mathcal{H})} = \int_0^T \langle u,v\rangle_{\mathcal{H}}\, dt \tag{3.8}$$

i normą

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2\, dt\right)^{1/2} \tag{3.9}$$

3.2. Procesy stochastyczna Wienara o wartościach w przestrzeniach Hilberta

Oprócz całkowalnych procesów stochastycznych o wartościach w przestrzeniach Hilberta, ważną klasę modeli zakłóceń losowych stanowią procesy stochastyczne Wienera o wartościach w przestrzeniach Hilberta ([3], [28]). Są to procesy stochastyczne ciągłe, ale nieróżniczkowalne w sensie klasycznym we wszystkich punktach swojej trajektorii. Pochodne względem czasu procesów Wienera trzeba więc traktować jako pochodne w sensie uogólnionym ([3], [10]). Te pochodne uogólnione stanowią procesy stochastyczne zwane "białymi szumami" i mają duże zastosowanie przy badaniu wielu zagadnień techniki i fizyki. Obecnie zajmiemy się bliżej tymi procesami.

Definicja 11: Niech E i F są przestrzeniami Banacha. Operator $Q \in E \to F$ jest pełnociągły, gdy odwzorowuje każdy ograniczony zbiór E w zbiór zwarty F.
Niech E^* będzie przestrzenią sprzężoną do E. Podklasę operatorów pełnociągłych stanowią operatory liniowe skończenie wymiarowe, które definiuje się następująco:

$$\bigwedge_{x\in E, y_i\in F, f_i\in E^*} Qx = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)y_i \tag{3.10}$$

Ważną podklasę operatorów pełnociągłych stanowią także operatory jądrowe.

Definicja 12: Operator liniowy nazywamy jądrowym, jeśli daje się on przedstawić w postaci:

$$Qx = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)y_i \tag{3.11}$$
$$x\in E, y_i\in F, f_i\in E^*$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{E^*} \|y_i\|_F < \infty \tag{3.12}$$

Definicja 13: Niech $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormalna baza w ośrodkowej przestrzeni Hilberta E. Liczbę $trQ = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, Qe_i \rangle$ nazywamy śladem operatora Q.

Definicja 14: Operator Q nazywa się operatorem ze śladem, jeśli $tr|Q| < \infty$

Definicja 15: Operator Q nazywany operatorem Hilberta-Schmidta, jeśli $trQ^*Q < \infty$, gdzie Q^* jest operatorem sprzężonym do Q, czyli

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle Qe_i, Qe_i \rangle < \infty$$

Definicja 16: Przestrzeń wszystkich operatorów liniowych, ograniczonych odwzorowujących przestrzeń unormowaną E w drugą F oznaczamy $\mathcal{L}(E,F)$. Niech E jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, $Q(\cdot) \in L^{\infty}(0,T;\mathcal{L}(E,E))$ jest rodziną operatorów spełniających następujące warunki:

1. $Q(t)$ jest samosprzężony ≥ 0 i jądrowy prawie dla każdego t
2. Funkcja $trQ(t) \in L^{\infty}(0,T)$, czyli $t \to trQ(t) \in L^{\infty}(0,T)$.

Zajmiemy się obecnie procesami stochastycznymi $w(t,\gamma)$ o wartościach w przestrzeni Hilberta E jako odwzorowaniami

$$[0,T] \to \text{mes}[\Gamma,P;E] \tag{3.13}$$

Definicja 17: Procesem stochastycznym Wienera nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\langle w(t,\gamma), e_j \rangle_E$, gdzie $e_j \in E$, spełniającą następujące warunki:

1. $\bigwedge_t E[w(t,\gamma)] = 0$ (E oznacza operację uśredniania)
2. Trajektorie są silnie ciągłe.
3. Przyrosty $\langle w(t_1,\gamma) - w(t_2,\gamma), e_1 \rangle$ i $\langle w(t_3,\gamma) - w(t_4,\gamma) e_2 \rangle$ są zmiennymi losowymi normalnymi i niezależnymi.
4. $$E\left\{ \langle w(t_1,\gamma), e_1 \rangle \langle w(t_2,\gamma), e_2 \rangle \right\} = \int_0^{\min(t_1,t_2)} \langle Q(\tau)e_1, e_2 \rangle \, d\tau$$

Tak zdefiniowany proces Wienera jest elementem przestrzeni $C([0,T];L^2(\Gamma,P;E))$. Jego pochodna względem czasu, czyli "biały szum" jest dystrybucją losową ([3]) o wartościach w przestrzeni Hilberta E:

$$\frac{d}{dt} w(t,\gamma) \in \mathcal{D}'([0,T]; L^2(\Gamma,P;E))$$

3.3. Całki stochastyczne jako procesy o wartościach w przestrzeniach Hilberta

Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych opisujących układy dynamiczne o stałych rozłożonych, w których występują procesy stochastyczne o charakterze "białych szumów" wiążą się z koniecznością wprowadzenia pojęcia całek stochastycznych o wartościach w przestrzeniach Hilberta.

Definicja 18: Niech H i E są ośrodkowymi przestrzeniami Hilberta, a $w(t,\mathcal{J})$ procesem stochastycznym Wienera o wartościach w E. Wprowadzimy liniowy operator $B(\cdot) \in L^{\infty}((0,T);\mathcal{L}(E,H))$. Niech istnieje skończone rozbicie $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant T$ odcinka $[0,T]$, gdzie wszystkie punkty t_i, $i = 1,2,\ldots,m+1$ są punktami ciągłości funkcji $B(t)$.
Całkę stochastyczną $\xi(t,\mathcal{J})$ o wartościach w przestrzeni Hilberta H definiujemy jako granicę średniokwadratowych sum:

$$\xi(t,\mathcal{J}) \stackrel{df}{=} \lim_{\substack{m\to\infty \\ \max \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{m} B(\tilde{t}_i)\Delta w(t_i,\mathcal{J}). \qquad (3.14)$$

gdzie:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad \Delta w(t_i,\mathcal{J}) = w(t_{i+1},\mathcal{J}) - w(t_i,\mathcal{J})$$

$$t_i \leqslant \tilde{t}_i \leqslant t_{i+1}$$

Przy zadanym czasie t

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \max \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{m} B(\tilde{t}_i)\,\Delta w(t_i,\mathcal{J}) \longrightarrow \int_0^t B(\tau)\,dw(\tau,\mathcal{J})$$

oznacza, że

$$E\left\{ \lim_{\substack{m\to\infty \\ \max \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{m} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[B(\tilde{t}_i) - B(\tau) \right] dw(\tau,\mathcal{J}) \right|^2 \right\} \longrightarrow 0$$

Podamy obecnie przykłady konkretnych całek stochastycznych o wartościach w przestrzeniach Hilberta.
Niech $w(t,\mathcal{J})$ będzie procesem Wienera o wartościach w R, przy czym

$$\left.\begin{array}{l} q(x_1,x_2,t) \\ q(x_1,x_2,t) = q(x_2,x_1,t) \end{array}\right\}$$

Załóżmy, że prawie dla każdego t

$$\int_{\Omega} q(x,x,t)\,dx < +\infty$$

i funkcja

$$t \longrightarrow \int_{\Omega} q(x,x,t)\,dx \in L^{\infty}(0,T)$$

Zgodnie z teorią Aronszajn-Bergmana ([14])

$$q(x_1,x_2,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(t)\, h_n(x_1,t)\, h_n(x_2,t)$$

prawie dla każdego x_1,x_2 i funkcje $h_n(x)$ prawie dla każdego t stanowią bazę ortonormalną w $L^2(\Omega)$. Stąd

$$\int_{\Omega} q(x,x,t)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(t) = \mathrm{tr}Q(t)$$

i operator $Q(t)$ jest zgodnie z hipotezą jądrowy, a funkcja

$$t \longrightarrow \mathrm{tr}Q(t) \in L^{\infty}(0,T)$$

Rozważmy obecnie proces Wienera (pole losowe) $w(x,t,\mathcal{J})$ o wartościach w przestrzeni $L^2(\Omega)$ z operatorem kowariancji $Q(t)$. Wtedy

$$E\Big(\int_{\Omega} w(x,t_1,\mathcal{J})h_1(x)dx\Big)\Big(\int_{\Omega} w(x,t_2,\mathcal{J})h_2(x)dx\Big) =$$

$$= \int_0^{\min(t_1,t_2)} d\tau \int_{\Omega}\int_{\Omega} q(x_1,x_2,\tau)h(x_2)h(x_1)dx_1dx_2$$

Stąd

$$E\Big[w(x_1,t_1,\mathcal{J})w(x_2,t_2,\mathcal{J})\Big] = \int_0^{\min(t_1,t_2)} q(x_1,x_2,\tau)d\tau$$

Niech

$$\sigma(x,t) \in L^{\infty}((0,T)\times\Omega),$$

wtedy

$$B(t)h = \sigma(x,t)h(x)$$

Wprowadzimy całkę stochastyczną o wartościach w $L^2(\Omega)$

$$\int_0^t B(\tau)dw(\tau,\gamma) = \int_0^t \sigma(x,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} w(x,\tau,\gamma)d\tau$$

Przyjmiemy

$$E = R, \quad H = L^2(\Omega), \quad Q(t) = I, \qquad (I - \text{operator identyczności})$$

a

$$B(\cdot) \in L^{\infty}(0,T); \; \mathcal{L}(R,L^2(\Omega)),$$

gdzie

$$B(t)\lambda = \sigma(x,t)\lambda$$

Całka stochastyczna o wartościach w przestrzeni Hilberta H ma wtedy postać:

$$\xi(x,t,\gamma) = \int_0^t \sigma(x,\tau)dw(\tau,\gamma)$$

Niech obecnie $E = H = L^2(\Omega)$, a operator $Q(\tau)$ zdefiniowany jest następująco:

$$Q(\tau)h = \int_{\Omega} q(x_1,x_2,t)h(x_2)dx_2$$

Proces $\int_0^t B(\tau)dw(\tau,\gamma)$ jest procesem Wienera o wartościach $L^2(\Omega)$,

$$B(t)Q(t)B^*(t) = \sigma(x_1,t)\int_{\Omega} q(x_1,x_2,t)\sigma(x_2,t)h(x_2)dx_2$$

Stąd

$$E\left(\int_0^{t_1} \sigma(x_1,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} w(x_1,\tau,\gamma)d\right) \cdot \left(\int_0^{t_2} \sigma(x_2,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} w(x_2,\tau,\gamma)d\tau\right) =$$

$$= \int_0^{\min(t_1,t_2)} \sigma(x_1,\tau)q(x_1,x_2,\tau)\sigma(x_2,\tau)d\tau$$

Wprowadzając formalnie proces $\vartheta(x,t,\gamma) = \frac{\partial}{\partial\tau} w(x,t,\gamma)$, otrzymamy

$$E\left[\vartheta(x_1,t_1,\gamma)\vartheta(x_2,t_2,\gamma)\right] = q(x_1,x_2,t_1)\delta_D(t_1-t_2),$$

gdzie δ_D - delta funkcja Diraca.

$$\int_0^t \sigma(x,\Theta)\frac{\partial}{\partial\Theta} w(x,\Theta,\gamma)d\Theta = \int_0^t \sigma(x,\Theta)\vartheta(x,\Theta,\gamma)d\Theta$$

Pojęcie całki stochastycznej o wartościach w przestrzeni można rozszerzyć na przypadek, gdy operator $B(\cdot)$ jest losowy.

4. OPTYMALNE FILTROWANIE ZAKŁÓCEŃ LOSOWYCH O CHARAKTERZE "BIAŁYCH SZUMÓW"

4.1. Sformułowanie problemu

Drgania dużej klasy układów dynamicznych o stałych rozłożonych są opisane, jak to pokazano w paragrafie 2.1, przez równania różniczkowe cząstkowe o postaci:

$$a_0(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + a_1(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + Lu(x,t) = f(x,t,\gamma), \quad \begin{matrix} x \in \Omega \subset R^n \\ t \in R_+^1 \end{matrix} \tag{4.1}$$

wraz z warunkami brzegowymi:

$$\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.2}$$

i początkowymi

$$u(x,0) = u_0 \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = u_1, \tag{4.3}$$

gdzie $f(x,t,\gamma)$ stanowi czasowo-przestrzenne pole losowe generowane przez przestrzeń probabilistyczną $(\Gamma,\mathcal{F},P)$.
Ponieważ na ogół $a_1(x) = 2na_0(x)$, więc równanie (4.1) można przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 2n\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \tilde{L}u(x,t) = \tilde{f}(x,t,\gamma), \tag{4.4}$$

gdzie:

$$\tilde{L}(\cdot) \overset{df}{=} \frac{1}{a_0(x)}L(\cdot),$$

$$\tilde{f}(x,t,\gamma) \overset{df}{=} \frac{1}{a_0(x)}f(x,t,\gamma).$$

Wymuszające pole losowe $f(x,t,\gamma)$ jest ściśle związane z procesami stochastycznymi Wienera o wartościach w przestrzeniach Hilberta (hilbertowskimi) i wyraża się za pomocą całki stochastycznej

$$f(x,t,\gamma) = \frac{\partial}{\partial t}\beta(x,t,\gamma) \tag{4.5}$$

$$\beta(x,t,\gamma) = \int_0^t \Phi(x,t)dw(\tau,\gamma). \tag{4.6}$$

gdzie $w(t,\gamma)$ jest procesem Wienera o wartościach w przestrzeni Hilberta $K = R$, i $H = L^2(\Omega)$

$$\Phi \in L^2((0,T);\mathcal{L}(K;H))$$

Φ jest $\mathcal{F}_t$ - mierzalnym dla każdego $t \in (0,T)$.
Równanie (4.4) za pomocą metody dekompozycji można zredukować do układu równań:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= y_1(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}y_1(x,t) &= y_2(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}y_2(x,t) &= -\tilde{L}y_1(x,t) - 2ny_2(x,t) + \tilde{f}(x,t,\ ) \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t) = \mathcal{L}y(x,t) + g(x,t,\gamma), \tag{4.8}$$

gdzie

$$y(x,t) = \begin{bmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{L}(\cdot) & -2n \end{bmatrix}, \quad g(x,t,\gamma) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{f}(x,t,\gamma) \end{bmatrix}$$

W pracach R. Curtain i P. Falba ([5], [6]), a także A. Bensoussana ([3]) badano zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązań tego typu równań, przy pewnych założeniach nałożonych na prawą stronę i operator $\mathcal{L}(\cdot)$. Najbardziej ogólne rezultaty uzyskano dla przypadku, gdy prawa strona równania jest procesem o charakterze "białego szumu" zadanym przez pochodną całki stochastycznej o wartościach w przestrzeniach Hilberta. Zacytujemy obecnie to twierdzenie za A. Bensoussanem ([3]) pomijając dowód:

TWIERDZENIE 1 ([3])

Niech V i H są ośrodkowymi przestrzeniami Banacha i Hilberta i $V \subset H$, niech V będzie gęsta w H i włożenie V w H będzie ciągłe oraz $\mathcal{H} = L^2(\Gamma,P;H)$ i $\mathcal{V} = L^2(\Gamma,P;V)$.

Zakładając, że przestrzeń H pokrywa się ze swoim sprzężeniem H^* mamy, że

$$V \subset H \subset V^* \tag{4.9}$$

i

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}^* \tag{4.10}$$

gdzie V^* jest przestrzenią sprzężoną z V a $\mathcal{V}^*$ sprzężona z $\mathcal{V}$. Niech rodzina liniowych, ciągłych operatorów $\tilde{L}\ V \to V^*$ spełnie warunek:

$$\bigwedge_{u \in V} < \tilde{L}u, u > \geqslant \alpha \|u\|^2, \quad \alpha > 0 \tag{4.11}$$

i stąd

$$\bigwedge_{y \in V \times H} < \mathcal{L} y, y > \geqslant \alpha_1 \|y\|^2, \quad \alpha_1 > 0 \tag{4.12}$$

a $\beta(x,t,\gamma)$ jest polem losowym interpretowanym jako proces stochastyczny o wartościach w przestrzeni Hilberta $H = L^2(\Omega)$ i $\beta(x,t,\gamma) \subset C([0,T];\mathcal{H})$. Wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (4.1) i $y \in C([0,T];\mathcal{V}^*) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H}) \cap L^2(0,T;\mathcal{V})$. Wybór przestrzeni Banacha V i H jest uzależniony od postaci operatora $\tilde{L}$ i typu warunków brzegowych.

Załóżmy dla uproszczenia, że jedynym wymuszeniem działającym na układ są zakłócenia losowe, tak że w przypadku braku zakłóceń, rozwiązaniem dokładnym równanie (4.1) może być rozwiązanie zerowe. Niech obserwacja drgań zachodzi w całym obszarze Ω w obecności zakłóceń losowych $\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t,\gamma)$ o charakterze "białych szumów" ściśle związanych z procesami Wienera o wartościach w przestrzeniach Hilberta. Pola losowe $\eta(x,t,\gamma)$ wyrażają się przez całki stochastyczne:

$$\eta(x,t,\gamma) = \int_0^t \psi(x,t)\,dw(\tau,\gamma). \tag{4.13}$$

gdzie $w(t,\gamma)$ jest procesem Wienera o wartościach w przestrzeni Hilberta $K = R$, $H = L^2(\Omega)$, a

$$\psi \in L^2((0,T);\mathcal{L}(K,H)).$$

ψ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne dla każdego $t \in (0,T)$.

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial t} z(x,t) = u(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t,\gamma) \tag{4.14}$$

lub zapisując w postaci różniczkowej

$$dz(x,t) = u(x,t)dt + \eta(x,t,\gamma)$$

Wprowadzając macierze

$$\mathcal{Y}(x,t) = \begin{bmatrix} z(x,t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s(x,t,\gamma) = \begin{bmatrix} \eta(x,t,\gamma) \\ 0 \end{bmatrix}$$

równanie dla obserwacji zmiennej stanu można zapisać w postaci

$$d\mathcal{Y}(x,t) = \mathcal{C}y(x,t)dt + ds(x,t,\gamma).$$

4.2. Model optymalnego filtru

Zagadnienie optymalnego filtrowania zakłóceń losowych w sensie Kalmana sprowadzać się będzie do sformułowania odpowiednich równań filtru, których rozwiązanie w optymalnym stopniu będzie rekonstruować rozwiązanie równań stanu (4.1), (4.4). Rozwiązanie tego problemu sformułować można w postaci następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 2

Optymalne oszacowanie (estymacja) $\tilde{u}(x,t) = \tilde{y}_1(x,t)$ dotyczące rozwiązania równania drgań (4.1) lub (4.4) układów dynamicznych o stałych rozłożonych wraz z warunkami brzegowymi (4.2) i warunkami początkowymi (4.3), w przypadku gdy niezależne pola losowe $f(x,t,\gamma)$ i $\eta(x,t,\gamma)$, które są związane z procesami Wienera o wartościach w przestrzeniach Hilberta $w(t,\gamma)$ następującymi relacjami:

$$\left.\begin{aligned} f(x,t,\gamma) &= \frac{\partial}{\partial t}\beta(x,t,\gamma), \quad \beta(x,t,\gamma) = \int_0^t \Phi(x,t)\,dw(\tau,\gamma) \\ \eta(x,t,\gamma) &= \int_0^t \psi(x,t)\,dw(\tau,\gamma) \\ x &\in \Omega \subset R^n, \quad t \in [0,T] \subset R_+^1 \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

tworzą dwuwymiarowe pole losowe $\{f(x,t,\gamma),\ \eta(x,t,\gamma)\}$ o rozkładzie gaussowskim.

$$E[f(x,t,\gamma)] = 0, \quad E[\eta(x,t,\gamma)] = 0, \quad E\left[f(x,t,\gamma)\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t,\gamma)\right] = 0 \tag{4.16}$$

$$E\left[f(x,t,\vartheta)f(\xi,\tau,\vartheta)\right] = q(x,\xi,t)\delta_D(t-\tau), \quad q(x,\xi,t) = q(\xi,x,t) \tag{4.17}$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t,\vartheta)\frac{\partial}{\partial \tau}\eta(\xi,\tau,\vartheta)\right] = r(x,\xi,t)\delta_D(t-\tau), \quad r(x,\xi,t) = r(\xi,x,t) \tag{4.18}$$

δ_D - delta funkcja Diraca,

przy czym obserwacja rozwiązania równania drgań (4.1) w obecności zakłóceń losowych ma miejsce w całym obszarze Ω, tj.

$$dz(x,t) = u(x,t)dt + d\eta(x,t,\vartheta) \qquad x \in \Omega \subset R^n, \quad t \in [0,T] \subset R^1_+ \tag{4.19}$$

jest opisywane przez równania filtru Kalmana o postaci:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{y}_1(x,t) = \hat{y}_2(x,t) + \int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{11}(x,\xi_1,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}z(\xi_2,t) - \hat{y}_1(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2\\
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{y}_2(x,t) = -\tilde{L}\hat{y}_1(x,t) - 2n\hat{y}_2(x,t) +\\
&\quad + \int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{21}(x,\xi_1,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}z(\xi_2,t) - \hat{y}_1(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$\hat{y}_1(x,0) = \hat{y}_{10}, \quad \hat{y}_2(x,0) = \hat{y}_{20} \qquad x \in \Omega \subset R^n \tag{4.21}$$

$$\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j\hat{y}_1(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j\hat{y}_2(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.22}$$

Nieznane operatory wzmocnienia $P_{11}(x,\xi,t)$ i $P_{21}(x,\xi,t)$, pojawiające się w równaniach filtru Kalmana, są wyznaczane z następującego układu nieliniowych równań różniczkowo-całkowych typu Riccati:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{11}(x,\xi,t) = 2P_{21}(x,\xi,t) - \int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{11}(x,\xi_1,t)P_{11}(\xi,\xi_2,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2\\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{21}(x,\xi,t) = P_{22}(x,\xi,t) - \tilde{L}_{x,\xi}P_{11}(x,\xi,t) - 2nP_{21}(x,\xi,t) -\\
&\quad - \int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{11}(x,\xi_1,t)\,P_{21}(\xi,\xi_2,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{22}(x,\xi,t) = -\tilde{L}_x P_{21}(x,\xi,t) - \tilde{L}_\xi P_{21}(x,\xi,t) - 4nP_{22}(x,\xi,t) -\\
&\quad - \int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{21}(x,\xi_1,t)\,P_{21}(\xi,\xi_2,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2 + \frac{q(x,\xi,t)}{s_o(x)s_o(\xi)}
\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$P_{11}(x,\xi,0) = P_{21}(x,\xi,0) = P_{22}(x,\xi,0) = 0 \tag{4.24}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{11}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{21}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0\\
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{22}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned}
&\bigwedge_{i,j=1,2} P_{ij}(x,\xi,t) = P_{ji}(x,\xi,t), \quad \bigwedge_{i,j=1,2} P_{ij}(x,\xi,t) = P_{ij}(\xi,x,t)\\
&\bigwedge_{i,j=1,2} P_{ij}(x,x,t) \ge 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

D o w ó d

Równanie drgań (4.1) układów o stałych rozłożonych przekształcimy metodą dekompozycji do układu równań z pierwszą pochodną względem czasu. Układ ten przyjmie postać (4.8).

Ponieważ pola losowe $g(x,t)$ i $\vartheta(x,t)$ mają łączny rozkład gaussowski, więc estymata $\hat{y}(x,t)$ posiada następującą reprezentację liniową ([15], [16]).

$$\hat{y}(x,t) = \int_0^t\int_\Omega K(x,\xi,t,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\vartheta(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Stąd równanie filtru będzie miało postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{y}(x,t) = \mathcal{F}\hat{y}(x,t) + \varphi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(x,t), \tag{4.27}$$

gdzie $\hat{y}(x,t)$ jest estymatą, czyli oszacowaniem $y(x,t)$.

Niech $\varepsilon(x,t) = y(x,t) - \tilde{y}(x,t)$ jest tzw. błędem filtrowania.

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(x,t) = \left[\mathcal{L} - \mathcal{F}\right] y(x,t) + \mathcal{F}\varepsilon(x,t) + g(x,t) - \varphi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \tag{4.28}$$

Stąd ponieważ warunkowe wartości oczekiwane przy zadanej przestrzeni obserwacji $V(x,t)$

$$E\left[\varepsilon(x,t)\middle|V(x,t)\right] = 0,$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(x,t)\middle|V(x,t)\right] = 0 \tag{4.29}$$

więc

$$\left[\mathcal{L} - \mathcal{F} - \varphi(x,t)\mathcal{C}\right] E\left[y(x,t)\middle|V(x,t)\right] = 0 \tag{4.30}$$

W rezultacie

$$\mathcal{F}(\cdot) \stackrel{df}{=} \mathcal{L}(\cdot) - \varphi(x,t)\mathcal{C}(\cdot) \tag{4.31}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{y}(x,t) = \left[\mathcal{L} - \varphi(x,t)\mathcal{C}\right]\tilde{y}(x,t) + \varphi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}s(x,t) \tag{4.32}$$

Wprowadzimy teraz pojęcie macierzy kowariancji błędu filtrowania, którę oznaczymy $\mathcal{P}(x,\xi,t)$.

$$(x,\xi,t) = E\left[\varepsilon(x,t)\varepsilon^{*}(\xi,t)\right] \tag{4.33}$$

* - oznacza transpozycję macierzy.

Jest ona elementem tzw. przestrzeni operatorów Hilberta-Schmidta $\mathcal{P}=(H,H)$, która stanowi zbiór operatorów Hilberta-Schmidta $\mathcal{P}$ odwzorowujących ośrodkową przestrzeń Hilberta $H \to H$ z iloczynem skalarnym,

$$\langle \mathcal{P}, Q\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathcal{P}e_n, Qe_n\rangle_H$$

gdzie $\{e_n\}$ ortonormalna baza w H i normę

$$\|\mathcal{P}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\mathcal{P}e_n\right|_H^2$$

(patrz paragraf 3.2).

Wyprowadzimy obecnie równanie różniczkowe, którego rozwiązanie stanowić będzie macierz kowariancji błędu filtrowania.

Z równań (4.28) i (4.31) otrzymujemy, że:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(x,t) = \left[\mathcal{L} - \varphi(x,t)\mathcal{C}\right]\varepsilon(x,t) + g(x,t) - \varphi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}s(x,t) \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x,\xi,t) = \frac{\partial}{\partial t}E\left[\varepsilon(x,t)\varepsilon^{*}(\xi,t)\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(x,t)\varepsilon^{*}(\xi,t)\right] +$$

$$+ E\left[\varepsilon(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^{*}(\xi,t)\right] \tag{4.35}$$

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x,\xi,t) = \left[\mathcal{L} - \varphi(x,t)\mathcal{C}\right]\mathcal{P}(x,\xi,t) + \mathcal{P}(x,\xi,t)\left[\mathcal{L}^{*} - \mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(\xi,t)\right] +$$

$$+ E\left[g(x,t)\varepsilon^{*}(\xi,t)\right] + E\left[\varepsilon(x,t)g^{*}(\xi,t)\right] -$$

$$- \varphi(x,t)E\left[\frac{\partial}{\partial t}s(x,t)\varepsilon^{*}(\xi,t)\right] - E\left[\varepsilon(x,t)\frac{\partial}{\partial t}s^{*}(\xi,t)\right]\varphi^{*}(\xi,t) \tag{4.36}$$

Rozwiązanie równania (4.34) przy niezerowych warunkach początkowych ma postać:

$$\varepsilon(x,t) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(x,\xi,0)\, y(0,\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_0^t\int_{\Omega} \mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)g(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi - \int_0^t\int_{\Omega} \mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)\varphi(\xi,\tau)\,ds(\xi,\tau)$$

gdzie $\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)$ - jest funkcję Greena układu równań

$$E\left[\varepsilon(x,t)g^{*}(\xi,t)\right] = \int_0^t\int_{\Omega} \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)E\left[g(\xi_1,\tau)g^{*}(\xi,t)\right]d\tau\,d\xi_1 -$$

$$- \int_0^t\int_{\Omega} \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi(\xi_1,\tau)E\left[\frac{\partial}{\partial t}s(\xi_1,\tau)g(\xi,t)\right]d\tau\,d\xi_1 = \frac{1}{2}Q(x,\xi,t) \tag{4.37}$$

Po analogicznych przekształceniach otrzymujemy:

$$E\left[\varepsilon(x,t)\frac{\partial}{\partial t}s^{*}(\xi,t)\right] = \frac{1}{2}\varphi(x,t)\,R(x,\xi,t) \tag{4.38}$$

$$E\left[g(x,t)\varepsilon^{*}(\xi,t)\right] = \frac{1}{2}Q(x,\xi,t) \tag{4.39}$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial t}\, s(x,t)\xi^{*}(\xi,t)\right] = \frac{1}{2}\, R(x,\xi,t)\varphi^{*}(\xi,t) \qquad (4.40)$$

Równanie (4.36) przyjmie wtedy postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x,\xi,t) = \left[\mathcal{L} - \varphi(x,t)\mathcal{C}\right]\mathcal{P}(x,\xi,t) + \mathcal{P}(x,\xi,t)\left[\mathcal{L}^{*} - \mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(\xi,t)\right] +$$

$$+ Q(x,\xi,t) - \varphi(x,t)\, R(x,\xi,t)\varphi^{*}(\xi,t) \qquad (4.41)$$

Potraktujemy teraz to zagadnienie jako problem optymalnego sterowania. Dobierzemy mianowicie funkcję $\varphi(x,t)$ uznaną za sterowanie w ten sposób, aby zminimalizowała funkcjonał ([13], [26], [27], [36]).

$$\mathcal{J}[\xi] = E\int_{\Omega} |\xi(x,t)|^{2}dx \qquad (4.42)$$

Jeżeli założymy, że macierz kowariancji $\mathcal{P}(x,\xi,t)$ reprezentuje stan układu, a $\varphi(x,t)$ jest sterowaniem optymalnym układu, to zagadnienie zostanie sprowadzone do problemu optymalnego sterowania deterministycznego. W celu rozwiązania tego zagadnienia wykorzystamy następujący lemat, będący analogią zasady maksimum Pontriagina w stosunku do układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi czastkowymi. Dowód tego lematu można przeprowadzić metodami przedstawionymi w pracy ([26]).

Lemat 1 ([26]) (zasada maksimum)

Niech dana jest rodzina form dwuliniowych ciągłych na przestrzeni (operatorów Hilberta-Schmidta w tym przypadku) $\mathcal{V}$.

$$\bigwedge_{t\in[0,T]} \mathcal{P}(t), \quad W(t) \longrightarrow a(P,W) = \langle \mathcal{K}\mathcal{P}(t), \quad W(t)\rangle, \quad \mathcal{K}\mathcal{P}(t) \in \mathcal{V}^{*}$$

gdzie $\mathcal{K}\mathcal{P}(t) \equiv \left[\mathcal{L} - \varphi(t)\mathcal{C}\right]\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)\left[\mathcal{L}^{*} - \mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(t)\right]$

Niech spełnione są następujące warunki:

(1.) $\bigwedge_{\mathcal{P},W\in\mathcal{V}}$ funkcja $t \longrightarrow a(\mathcal{P},W)$ jest mierzalna na $[0,T]$

$$|a(\mathcal{P},W)| \leqslant c\|\mathcal{P}\|_{\mathcal{V}}\|W\|_{\mathcal{V}} \qquad c > 0 \qquad (4.43)$$

(2.) Istnieje taka liczba λ, że

$$\bigwedge_{P\in\mathcal{V}}\bigwedge_{t\in[0,T]} a(\mathcal{P},\mathcal{P}) + \lambda\|\mathcal{P}\|^{2}_{\mathcal{H}} \geqslant \alpha\|\mathcal{P}\|^{2}_{\mathcal{V}} \qquad \alpha > 0 \qquad (4.44)$$

gdzie

i zadany jest funkcjonał stanu:

$$I[\varphi(x,t)] = E\int_{\Omega}|\xi(x,t)|^{2}dx = E\langle\tilde{\xi}(t),\tilde{\xi}(t)\rangle_{H} = tr\mathcal{P}(t) \qquad (4.45)$$

Łatwo pokazać, że operator $\mathcal{L}$ w równaniu (4.8) spełnia warunki (1) i (2), a stąd warunki te spełnia także operator $\mathcal{K}$. Załóżmy, że $t \in [0,T] \subset R^{1}_{+}$, przy czym czas T jest ustalony, a koniec trajektorii swobodny. Wprowadzimy tzw. funkcję Hamiltona

$$\mathcal{H} = tr\left\{\frac{d}{dt}\mathcal{P}(t)\tilde{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} = tr\left\{\frac{d}{dt}\,\mathcal{P}(t)\tilde{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} =$$

$$= tr\left\{\left[\mathcal{L}-\varphi(t)\mathcal{C}\right]\mathcal{P}(t)\tilde{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} + tr\left\{\mathcal{P}(t)\left[\mathcal{L}^{*}-\mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(t)\right]\tilde{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} +$$

$$+ tr\left\{Q(t)\tilde{\mathcal{P}}(t)\right\} - tr\left\{\varphi(t)\, R(t)\,\varphi^{*}(t)\,\tilde{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} \qquad (4.46)$$

gdzie

$$\mathcal{P}(t)\varphi = \int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \qquad \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

$\mathcal{P}(x,\xi,t)$ jest jądrem operatora $\mathcal{P}(t)$ a $\tilde{\mathcal{P}}(t)$ jest pewną pomocniczą zmienną stanu, zwaną zmienną sprzężoną do zmiennej $\mathcal{P}(t)$.

Warunki konieczne i wystarczające istnienia optymalnego sterowania $\varphi(t)$ są następujące:

1. $$\frac{d}{dt}\mathcal{P}(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\mathcal{P}}} \qquad (4.47)$$

czyli

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}(t) = \left[\mathcal{L}-\varphi(t)\mathcal{C}\right]\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)\left[\mathcal{L}^{*}-\mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(t)\right] + Q(t) + \varphi(t)\, R(t)\,\varphi^{*}(t)$$

2. $$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{P}}(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathcal{P}} \qquad (4.48)$$

czyli

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{P}}(t) = -\left[\mathcal{L}^{*}-\mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(t)\right]\tilde{\mathcal{P}}(t) - \tilde{\mathcal{P}}(t)\left[\mathcal{L}-\varphi(t)\mathcal{C}\right]$$

3. $$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = \tilde{\mathcal{P}}(t)\left[\varphi(t)\, R^{*}(t) - \mathcal{P}^{*}(t)\,\mathcal{C}^{*}\right] + \tilde{\mathcal{P}}^{*}(t)\left[\varphi(t)\, R(t) - \mathcal{P}(t)\mathcal{C}^{*}\right] = 0 \qquad (4.49)$$

czyli sterowanie optymalne osiąga pewną wartość optymalną $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(x,t)$, która minimalizuje funkcję Hamiltona:

$$\mathcal{H}\left[\tilde{\varphi}(t)\,\mathcal{P}(t),\,\tilde{\mathcal{P}}(t)\right] = \inf_{\varphi}\mathcal{H}\left[\varphi(t),\,\mathcal{P}(t),\,\tilde{\mathcal{P}}(t)\right] \qquad (4.50)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\tilde{\mathcal{P}}^{*}(t)\left[\varphi(t)R(t) - \mathcal{P}(t)\mathcal{C}^{*}\right] = 0 \tag{4.51}$$

mamy

$$\varphi(x,t)R(x,\xi,t) - \mathcal{C}^{*}\mathcal{P}(x,\xi,t) = 0 \tag{4.52}$$

W dalszych naszych rozważeniach wykorzystamy własności inwersji operatora $R(x,\xi,t)$, a mianowicie

$$\int_{\Omega} R(x,\xi,t)R^{-1}(\xi,\xi_1,t)d\xi = I\delta_D(x-\xi_1) \tag{4.53}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

Mnożąc prawostronnie relację (4.52) przez $R^{-1}(\xi,\xi_1,t)$ i całkując po ξ i ξ_1, otrzymamy:

$$\int_{\Omega}\varphi(x,t)R(x,\xi,t)R^{-1}(\xi,\xi^{1},t)d\xi = \int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\ R^{-1}(\xi,\xi_1,t)d\xi \tag{4.54}$$

lub

$$\varphi(x,t)\delta_C(x-\xi_1) = \int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\,\mathcal{C}\,R^{-1}(\xi,\xi_1,t)d\xi \tag{4.55}$$

Mnożąc prawostronnie powyższe wyrażenie przez $\mathcal{C}\,\mathcal{P}(x,\xi,t)$ i całkując po ξ i ξ_1, otrzymamy:

$$\varphi(x,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(x,\xi,t) = \int_{\Omega}\int_{\Omega}\varphi(\xi,t)\mathcal{C}\,\mathcal{P}(\xi_2,\xi_1,t)\delta_D(\xi-\xi_1)\delta_D(x-\xi)d\xi\,d\xi_1 =$$

$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi,\xi_1,t)\mathcal{C}\,\mathcal{P}(\xi_2,\xi_1,t)d\xi\,d\xi_1 \tag{4.56}$$

Ale

$$\left.\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi,\xi_1,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi_2,\xi_1,t)d\xi\,d\xi_1 = \\ -\int_{\Omega}\int_{\Omega}(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi,\xi_2,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi,\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

W rezultacie

$$\varphi(x,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(x,\xi,t) = \int_{\Omega}\int_{\Omega}(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi,\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2 \tag{4.58}$$

Analogiczną drogą można otrzymać, że:

$$\mathcal{C}^{*}\mathcal{P}(\xi,t)\mathcal{P}(x,\xi,t) = \int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi,\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2 \tag{4.59}$$

Wykorzystując wzory (4.53) i (4.55), otrzymamy:

$$\varphi(x,t)R(x,\xi,t)\varphi^{*}(\xi,t) =$$

$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\varphi(\xi,t)R(\xi,\xi_1,t)\varphi(\xi_1,t)\delta_D(x-\xi)\delta_D(\xi-\xi_1)\delta_D(\xi_1-\xi_3)d\xi\,d\xi_1 d\xi_3 =$$

$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(\xi_3,\xi,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi,\xi_3,t)R(x,\xi,t)R^{-1}(\xi_2,\xi_1,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi_2,\xi_1,t)d\xi\,d\xi_1 d\xi_3 =$$

$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(\xi,\xi_3,t)\mathcal{C}^{*}\delta_D(x-\xi_3)R^{-1}(\xi_2,\xi,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi_2,\xi_1,t)d\xi\,d\xi_1 d\xi_3 =$$

$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi,\xi_1,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi_1,\xi_2,t)d\xi\,d\xi_1 =$$

$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi,\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2 \tag{4.60}$$

Podstawiając relacje (4.58), (4.59) i (4.60) do równania (4.41) otrzymujemy nieliniowe równanie różniczkowo-całkowe z nieliniowością typu Riccati o postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x,\xi,t) = \mathcal{A}_x\mathcal{P}(x,\xi,t) + \mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{A}^{*}_{\xi} + Q(x,\xi,t) -$$

$$-\int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(\xi,\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2 \tag{4.61}$$

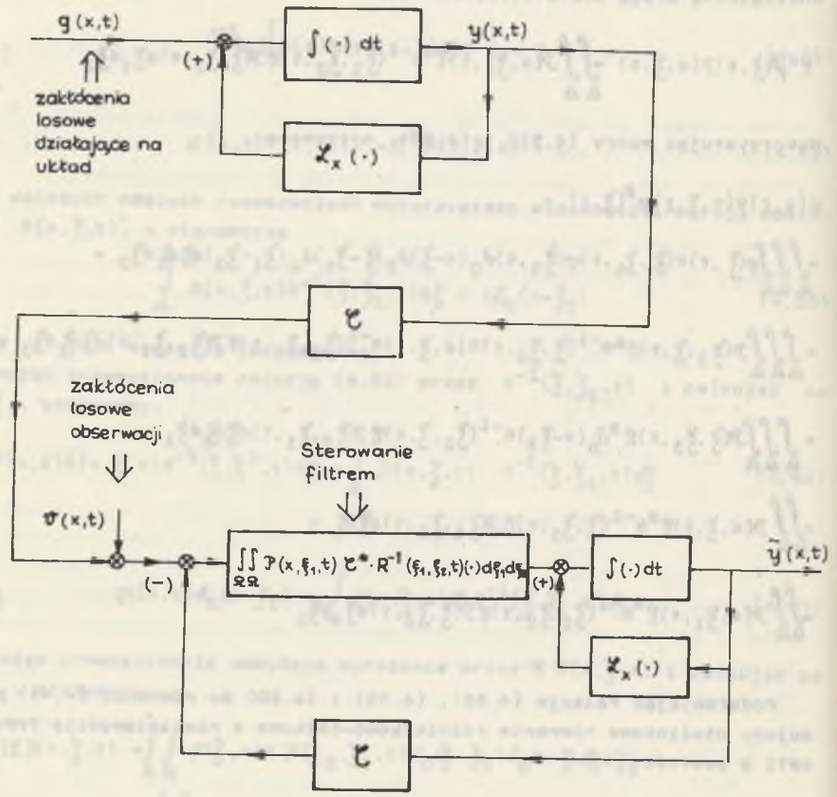
Oznaczmy

$$1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}z(x,t) - \mathcal{V}_1(x,t)$$

Mnożąc prawostronnie wyrażenie (4.55) przez $1(\xi_1,t)$ i całkując po ξ_1, otrzymamy:

$$\varphi(x,t)1(x,t) + \int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi,\xi_1,t)1(\xi_1,t)d\xi\,d\xi_1 =$$

$$-\int_{\Omega}\int_{\Omega}(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)1(\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2 \tag{4.62}$$



Rys. 1. Schemat blokowy klasycznego filtru Kalmana dla układów dynamicznych o stałych rozłożonych opisanych układem równań (4.8)

W rezultacie na podstawie (4.32) i (4.62) równanie filtru przyjmuje ostateczną postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}(x,t) = \mathcal{L}\tilde{v}(x,t) + \int_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\left[\frac{\partial}{\partial t}z(\xi_2,t)-\tilde{v}_1(\xi_2,t)\right]d\xi_1\,d\xi_2 \tag{4.63}$$

Równanie Riccati (4.61) i równanie filtru (4.62) występujące w postaci macierzowej, można rozpisać w postaci układów równań i wtedy wystąpią one w postaci (4.20), (4.23).

Równania opisujące optymalny filtr Kalmana dla układów dynamicznych o stałych rozłożonych zmienią nieco swoją postać, jeśli obserwowana będzie nie zmienna stanu, ale jej pochodna względem czasu, czyli

$$\frac{\partial}{\partial t}z(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t,\varphi) \tag{4.64}$$

lub w postaci różniczkowej

$$dz(x,t) = du(x,t) + d\eta(x,t,\varphi) \tag{4.65}$$

Równania opisujące proces optymalnego filtrowania zakłóceń drgań takich układów są następujące:

1. Równania filtru:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}_1(x,t) &= \tilde{v}_2(x,t) + \int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{21}(x,\xi_1,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t}\left[\frac{\partial}{\partial t}z(\xi_2,t) - \tilde{v}_2(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2\\
\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}_2(x,t) &= -\tilde{\mathcal{L}}_x\tilde{v}_1(x,t) - 2n\tilde{v}_2(x,t) +\\
&+\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{22}(x,\xi_1,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}z(\xi_2,t) - \tilde{v}_2(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}\right\} \tag{4.66}$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$\tilde{v}_1(x,0) = \tilde{v}_2(x,0) = 0 \tag{4.67}$$

$$\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j\tilde{v}_1(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j\tilde{v}_2(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.68}$$

2. Nieliniowe równania różniczkowo-całkowe typu Riccati, z których wyznacza się nieznane operatory wzmocnienia $P_{21}(x,\xi,t)$ i $P_{22}(x,\xi,t)$.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{11}(x,\xi,t) = 2P_{21}(x,\xi,t) - \int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{21}(x,\xi_1,t)P_{21}(\xi,\xi_2,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}\,d\xi_1 d\xi_2\\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{21}(x,\xi,t) = P_{22}(x,\xi,t) - L_{x,}\,P_{11}(x,\xi,t) - 2nP_{21}(x,\xi,t) -\\
&\qquad -\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{21}(x,\xi_1,t)P_{22}(\xi,\xi_2,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}\,d\xi_1 d\xi_2\\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{22}(x,\xi,t) = -\tilde{L}_x P_{21}(x,\xi,t) - \tilde{L}_\xi P_{21}(x,\xi,t) - 4nP_{22}(x,\xi,t) -\\
&\qquad -\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{22}(x,\xi_1,t)P_{22}(\xi,\xi_2,t)}{r(\xi_1,\xi_2,t)}\,d\xi_1 d\xi_2 + \frac{q(x,\xi,t)}{a_0(x)a_0(\xi)}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.69)$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$P_{11}(x,\xi,0) = P_{21}(x,\xi,0) = P_{22}(x,\xi,0) = 0 \qquad (4.70)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{11}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{21}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0\\
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{22}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.71)$$

4.3. Wyznaczanie estymaty drgań układów o stałych rozłożonych

Przejdziemy obecnie do rozwiązania sformułowanych zagadnień granicznych opisujących optymalny filtr Kalmana, dla przypadku drgań układów dynamicznych o stałych rozłożonych. W tym rozdziale rozważania ograniczymy do wyznaczenia estymaty drgań, przy filtrowaniu zakłóceń losowych o charakterze "białych szumów", przy założeniu stacjonarności rozwiązań nieliniowych równań różniczkowo-całkowych typu Riccati. Założenie takie jest słuszne dla przypadku bardzo dużych czasów, czyli gdy $t \to \infty$. Równania różniczkowo-całkowe Riccati (4.61) przyjmą wtedy postać:

$$\left.\begin{aligned}
&2P_{21}(x,\xi) - \int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{11}(x,\xi_1)P_{11}(\xi,\xi_2)}{r(\xi_1,\xi_2)}\,d\xi_1 d\xi_2 = 0\\
&P_{22}(x,\xi) - \tilde{L}_{x,\xi}P_{11}(x,\xi) - 2nP_{11}(x,\xi) -\\
&\qquad -\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{11}(x,\xi_1)P_{21}(\xi,\xi_2)}{r(\xi_1,\xi_2)}\,d\xi_1 d\xi_2 = 0\\
&-\tilde{L}_x P_{21}(x,\xi) - \tilde{L}_\xi P_{21}(x,\xi) - 4nP_{22}(x,\xi) -\\
&\qquad -\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{21}(x,\xi_1)P_{21}(\xi,\xi_2)}{r(\xi_1,\xi_2)}\,d\xi_1 d\xi_2 + \frac{q(x,\xi)}{a_0(x)a_0(\xi)} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.72)$$

przy warunkach brzegowych:

$$\left.\begin{aligned}
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{11}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{21}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} = 0\\
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{22}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.73)$$

Problem rozwiążemy stosując metodę Ritza-Galerkina ([12], [30]). W tym celu rozwiązania przedstawimy w postaci następujących kombinacji liniowych:

$$\left.\begin{aligned}
P_{11}(x,\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m V_m(x)V_m(\xi)\\
P_{21}(x,\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m V_m(x)V_m(\xi)\\
P_{22}(x,\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m V_m(x)V_m(\xi)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.74)$$

gdzie jako funkcje $V_m(x)$ przyjmiemy funkcje własne rozpatrywanego zagadnienia granicznego, opisującego drgania układów o stałych rozłożonych. Metodę konstruowania funkcji własnych dla zagadnień granicznych dynamiki płyt o dowolnym kształcie, opartę na teorii tzw. R-funkcji ([31]), podano w pracy ([44]).

Nieznane współczynniki $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ i $\{c_m\}$ można wyznaczyć jako rozwiązania układów równań:

$$\left.\begin{aligned} &2b_m - \mathcal{K}_m a_m^2 = 0 \\ &c_m - \omega_m^2 a_m - 2n a_m - \mathcal{K}_m a_m b_m = 0 \\ &-2\omega_m^2 b_m - 4n c_m - \mathcal{K}_m b_m + q_m = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.75)$$

gdzie

$$q_m = \int_\Omega\int_\Omega \frac{g(x,\xi)}{a_o(x)a_o(\xi)} V_m(x)V_m(\xi)$$

$$\mathcal{K}_m = \int_\Omega\int_\Omega \frac{V_m(\xi_1)V_m(\xi_2)}{r(\xi_1,\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2$$

$$\omega_m^2 = \int_\Omega \tilde{L}V_m(x)V_m(x)dx = \int_\Omega \tilde{L}V_m(\xi)V_m(\xi)d\xi \qquad (4.76)$$

Układy równań (4.75) można rozwiązać metodami analitycznymi. Współczynniki $\{a_m\}$ są wtedy rzeczywistymi, dodatnimi, najmniejszymi rozwiązaniami równań algebraicznych:

$$q_m - 4n(\tilde{\omega}_m^2+2n)a_m - \tilde{\omega}_m^2\mathcal{K}_m a_m^2 - 2n\mathcal{K}_m^2 a_m^3 - \tfrac{1}{4}\mathcal{K}_m^2 a_m^4 = 0 \qquad (4.77)$$

Współczynniki $\{b_m\}$ i $\{c_m\}$ mogą być przy tym wyznaczone wg formuł:

$$b_m = \tfrac{1}{2}\mathcal{K}_m a_m^2 \qquad (4.78)$$

$$c_m = (\tilde{\omega}_m^2+2n)a_m + \tfrac{1}{2}\mathcal{K}_m^2 a_m^3 \qquad (4.79)$$

Stosując metodę Ritza-Galerkina rozwiązanie równań filtru, można przedstawić w postaci następujących kombinacji liniowych:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_1(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t)V_m(x) \\ \tilde{y}_2(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} d_m(t)V_m(x) \end{aligned}\right\} \qquad (4.80)$$

Nieznane funkcje $g_m(t)$ i $d_m(t)$ będą wyznaczane z następujących układów równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}g_m(t) - d_m(t) - a_m\mathcal{K}_m\frac{d}{dt}z_m(t) + a_m\mathcal{K}_m g_m(t) = 0 \\ &\frac{d}{dt}d_m(t) + \tilde{\omega}_m^2 g_m(t) + 2n d_m(t) - b_m\mathcal{K}_m\frac{d}{dt}z_m(t) + b_m\mathcal{K}_m g_m(t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.81)$$

$$g_m(0) = d_m(0) = 0 \qquad (4.82)$$

gdzie

$$z_m(t) = \int_\Omega z(x,t)V_m(x)dx$$

Rozwiązanie tych równań ma postać:

$$\left.\begin{aligned} g_m(t) &= A_m^1\int_0^t e^{-n_m(t-\tau)}\cos\varepsilon_m(t-\tau)\frac{d}{d\tau}z_m(\tau)d\tau - \\ &- B_m^1\int_0^t e^{-n_m(t-\tau)}\sin\varepsilon_m(t-\tau)\frac{d}{d\tau}z_m(\tau)d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (4.83)$$

$$\left.\begin{aligned} d_m(t) &= A_m^2\int_0^t e^{-n_m(t-\tau)}\cos\varepsilon_m(t-\tau)\frac{d}{d\tau}z_m(\tau)d\tau - \\ &- B_m^2\int_0^t e^{-n_m(t-\tau)}\sin\varepsilon_m(t-\tau)\frac{d}{d\tau}z_m(\tau)d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (4.84)$$

gdzie

$$\alpha_m = a_m\mathcal{K}_m, \quad \beta_m = b_m\mathcal{K}_m$$

$$n_m = \tfrac{1}{2}(\alpha_m+2n)$$

$$\varepsilon_m = \tfrac{1}{2}\sqrt{4(\tilde{\omega}_m^2+\beta_m+2n\alpha_m) - (\alpha_m+2n)^2}$$

przy czym

$$4(\tilde{\omega}_m^2+\beta_m+2n\alpha_m) >> (\alpha_m+2n)^2$$

$$A_m^1 = \frac{2\left\{2\varepsilon_m^2\beta_m + \alpha_m\left[\alpha_m+2(n-n_m)\right]\left[2\beta_m+\tilde{\omega}_m^2-n_m\beta_m\right]\right\}}{4n_m^2 + (\varepsilon_m^2+\alpha_m+2n)^2}$$

$$B_m^1 = \frac{2\left\{2\alpha_m\left(2\beta_m+\tilde{\omega}_m^2-n_m\beta_m\right) - \alpha_m\beta_m\left(\alpha_m+2(n-n_m)\right)\right\}}{4n_m^2 + (\varepsilon_m^2+\alpha_m+2b)^2}$$

$$A_m^{\cdot\cdot} = \frac{2\left\{2\varepsilon_m^2\alpha_m + \left[2(n-n_m) - \alpha_m\right]\left[\beta_m + (2n-n_m)\alpha_m\right]\right\}}{4n_m^2 + (\varepsilon_m^2+\alpha_m+2n)^2}$$

$$B_m^{\cdot\cdot} = \frac{2\left\{2\alpha_m n + \alpha_m^2 + 2\beta_m\right.}{4n_m^2 + (\varepsilon_m^2+\alpha_m+2n)^2}$$

W przypadku jeśli zmienną obserwowaną jest nie zmienna stanu (drgania) ale jej pochodna względem czasu, to równania różniczkowo-całkowe Riccati dla przypadku stacjonarnego ($t \to \infty$) przyjmą postać:

$$\left.\begin{aligned}
&2P_{21}(x,\xi) - \iint_{\Omega\Omega} \frac{P_{21}(x,\xi_1)P_{21}(\xi,\xi_2)}{r(\xi_1,\xi_2)}\, d\xi_1 d\xi_2 = 0\\
&P_{22}(x,\xi) - \tilde{L}_x P_{11}(x,\xi) - 2nP_{11}(x,\xi) -\\
&\quad - \iint_{\Omega\Omega} \frac{P_{11}(x,\xi_1)P_{21}(\xi,\xi_2)}{r(\xi_1,\xi_2)}\, d\xi_1 d\xi_2 = 0\\
&- \tilde{L}_x P_{21}(x,\xi) - \tilde{L}_\xi P_{21}(x,\xi) - 4nP_{22}(x,\xi) -\\
&\quad - \iint_{\Omega\Omega} \frac{P_{21}(x,\xi_1)P_{21}(\xi,\xi_2)}{r(\xi_1,\xi_2)}\, d\xi_1 d\xi_2 + \frac{q(x,\xi)}{a_o(x)a_o(\xi)} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.85)$$

przy warunkach brzegowych:

$$\left.\begin{aligned}
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{11}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{21}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} = 0\\
&\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{22}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.86)$$

Zastosowanie metody Ritza-Galerkina do rozwiązania układu równań (4.85) prowadzi do następujących układów równań algebraicznych:

$$\left.\begin{aligned}
&2b_m - \mathcal{K}_m b_m^2 = 0\\
&c_m - \omega_m^2 a_m - 2nb_m - \mathcal{K}_m b_m c_m = 0\\
&-2\omega_m^2 b_m - 4nc_m - \mathcal{K}_m c_m^2 + q_m = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.87)$$

Z równań (4.87) wynika, że $b_m = 0$, więc $P_{21}(x,\xi) = 0$. W rezultacie otrzymamy:

$$c_m - \tilde{\omega}_m^2 a_m = 0 \qquad (4.88)$$

Stąd

$$a_m = \frac{c_m}{\tilde{\omega}_m^2} \qquad (4.89)$$

Współczynniki c_m można łatwo wyznaczyć jako rozwiązania układu równań:

$$- 4nc_m - \mathcal{K}_m c_m^2 + q_m = 0 \qquad (4.90)$$

Rozwiązania te mają postać:

$$c_m = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 + \mathcal{K}_m q_m}}{\mathcal{K}_m} \qquad (4.91)$$

Ponieważ rozwiązania powinny być dodatnie, więc:

$$c_m = \frac{-2n + \sqrt{4n^2 + \mathcal{K}_m q_m}}{\mathcal{K}_m} \qquad (4.92)$$

i

$$a_m = \frac{-2n + \sqrt{4n^2 + \mathcal{K}_m q_m}}{\tilde{\omega}_m^2 \mathcal{K}_m} \qquad (4.93)$$

Równania filtru ze względu na zerowanie się operatora $P_{21}(x,\xi)$ przyjmą postać:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{\bar{y}}_1(x,t) = \tilde{\bar{y}}_2(x,t)\\
&\frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{\bar{y}}_2(x,t) = -\tilde{L}_x\tilde{\bar{y}}_1(x,t) - 2n\tilde{\bar{y}}_2(x,t) +\\
&\qquad + \iint_{\Omega\,\Omega} \frac{P_{22}(x,\xi_1)}{r(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\,z(\xi_2,t) - \tilde{\bar{v}}_2(\xi_2,t)\right] d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}\right\} \qquad (4.94)$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$\tilde{\bar{y}}_1(x,0) = \tilde{\bar{y}}_2(x,0) = 0 \qquad (4.95)$$

$$\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j\tilde{\bar{y}}_1(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j\tilde{\bar{v}}_2(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (4.96)$$

Układ tych równań można przedstawic w postaci jednego równania różniczkowo-całkowego:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\tilde{u}(x,t) + 2n\,\frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{u}(x,t) + \tilde{L}_x(x,t) -$$

$$-\iint_{\Omega\,\Omega} \frac{P_{22}(x,\xi_1)}{r(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\,z(\xi_2,t) - \frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{u}(\xi_2,t)\right] d\xi_1 d\xi_2 = 0 \qquad (4.97)$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$\tilde{u}(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{u}(x,0) = 0 \qquad (4.98)$$

$$\bigwedge_{0\le j\le m-0} B_j\tilde{u}(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (4.99)$$

przy czym

$$\tilde{u}(x,t) = \tilde{\bar{y}}_1(x,t)$$

Stosując metodę Ritza-Galerkina rozwiązanie równania filtru można przedstawic w postaci kombinacji liniowej:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t)V_m(x) \qquad (4.100)$$

Nieznane funkcje $q_m(t)$ wyznaczone będą z następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,q_m(t) + 2n\,\frac{d}{dt}\,q_m(t) + \omega_m^2 q_m(t) - c_m\mathcal{K}_m\,\frac{d}{dt}\left[z_m(t) - q_m(t)\right] = 0 \qquad (4.101)$$

wraz z warunkami początkowymi:

$$q_m(0) = \frac{d}{dt}\,q_m(0) = 0 \qquad (4.102)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań można przedstawić w postaci:

$$q_m(t) = \int_0^t e^{-n_m(t-\tau)}\,\frac{\sin p_m(t-\tau)}{p_m}\,\mathcal{K}_m c_m\,\frac{d}{d\tau}\,z_m(\tau)\,d\tau \qquad (4.103)$$

gdzie

$$p_m = \sqrt{\omega_m^2 - n_m^2}, \quad \omega_m^2 >> n_m^2$$

$$n_m = n + \tfrac{1}{2}\mathcal{K}_m c_m$$

Uzyskane, przy założeniu stacjonarności rozwiązań nieliniowych równań różniczkowo-całkowych Riccati, wyniki (w obu rozpatrywanych przypadkach obserwacji) pozwoliły zauważyć, że sterowanie równaniem filtru, które reprezentują operatory wzmocnienia filtru $P_{ik}(x,\xi)$ związane z błędem filtrowania, pojawiają się nie tylko w członach reprezentujących wymuszenie, ale także w członach reprezentujących tłumienie (patrz równania (4.83-4.84) i (4.101). Rozwiązanie problemu przy małych czasach t, kiedy w układzie występują drgania niestacjonarne, wymaga uwzględnienia niestacjonarności operatorów wzmocnienia $P_{ik}(x,\xi,t)$, czyli rozwiązania niestacjonarnych równań różniczkowo-całkowych Riccati. Rozwiązanie to można uzyskac tylko za pomocą metod numerycznych ([22], [30]) Zakładając jednak, że intensywność zakłóceń obserwacji jest znacznie większa od intensywności zakłóceń wymuszających drgania, do rozwiązania można zastosować ([9]) metodę perturbacji. Rozwiązanie uzyskane tą metodą ma zamkniętą postać analityczną, wygodną do analizy jakościowej i nie wymaga pracochłonnych obliczeń numerycznych. Ponieważ intensywność zakłóceń obserwacji jest duża w stosunku do wymuszenia, więc wprowadzając mały parametr ε otrzymamy,że:

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}\,\eta(x,t,\vartheta)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\eta(\xi,\tau,\vartheta)\right] = \frac{1}{\varepsilon}\,r(x,\xi,t)\,\delta_D(t-\tau) \qquad (4.104)$$

Wprowadzenie małego parametru powoduje, że macierzowe nieliniowe równanie różniczkowo-całkowe typu Riccati (4.61) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,\xi,t) = \mathcal{A}_x P_\varepsilon(x,\xi,t) + P_\varepsilon(x,\xi,t)\mathcal{A}_\xi^* + \Phi(x,\xi,t) - \varepsilon \int_\Omega \int_\Omega P_\varepsilon(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^* R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C} P_\varepsilon(\xi,\xi_2,t)\,d\xi_1 d\xi_2 \qquad (4.105)$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}$$

Równanie to można rozwiązać za pomocą metody perturbacji. W tym celu rozwiązanie można rozwinąć w szereg wg małego parametru ε :

$$P(x,\xi,t) = P_0(x,\xi,t) + \varepsilon P_1(x,\xi,t) + \varepsilon^2 P_2(x,\xi,t) + \ldots \qquad (4.106)$$

Podstawiając relacje (4.106) w równanie (4.105) i porównując wyrazy przy tych samych potęgach parametru ε oraz ograniczając się do dwu pierwszych wyrazów w tych rozwinięciach, otrzymamy ciąg równań rekurencyjnych:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0(x,\xi,t) = \mathcal{A} P_0(x,\xi,t) + P_0(x,\xi,t)\mathcal{A}^* + Q(x,\xi,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1(x,\xi,t) = \mathcal{A} P_1(x,\xi,t) + P_1(x,\xi,t)\mathcal{A}^* - \int_\Omega \int_\Omega P_0(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^* R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C} P_0(\xi,\xi_2,t)\,d\xi_1 d\xi_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_2(x,\xi,t) = \mathcal{A} P_2(x,\xi,t) + P_2(x,\xi,t)\mathcal{A}^* - \int_\Omega \int_\Omega P_0(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^* R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C} P_1(\xi,\xi_2,t)\,d\xi_1 d\xi_2 - \int_\Omega \int_\Omega P_1(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^* R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\mathcal{C} P_0(\xi,\xi_2,t)\,d\xi_1 d\xi_2 \qquad (4.107)$$

Po dokonaniu dyskretyzacji metodą Ritza-Galerkina powyższy układ równań rekurencyjnych sprowadzi się do liniowych rekurencyjnych układów równań różniczkowych zwyczajnych. Przyjmując bowiem rozwiązania w postaci kombinacji liniowych:

$$\left.\begin{aligned} P_{11}(x,\xi,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) V_m(x) V_m(\xi) \\ P_{21}(x,\xi,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t) V_m(x) V_m(\xi) \\ P_{22}(x,\xi,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) V_m(x) V_m(\xi) \end{aligned}\right\} \qquad (4.108)$$

i biorąc pod uwagę, że

$$\left.\begin{aligned} a_m(t) &= a_m^0(t) + \varepsilon a_m^1(t) + \varepsilon^2 a_m^2(t) + \ldots \\ b_m(t) &= b_m^0(t) + \varepsilon b_m^1(t) + \varepsilon^2 b_m^2(t) + \ldots \\ c_m(t) &= c_m^0(t) + \varepsilon c_m^1(t) + \varepsilon^2 c_m^2(t) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4.109)$$

Nieznane funkcje $a_m^0(t)$, $a_m^1(t),\ldots,b_m^0(t),b_m^1(t),\ldots,c_m^0(t),c_m^1(t),\ldots$ wyznaczane będę z następujących rekurencyjnych układów równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_m^0(t) &= 2b_m^0(t) \\ \frac{d}{dt} b_m^0(t) &= c_m^0(t) - \tilde{\omega}_m^2 a_m^0(t) - 2n a_m^0(t) \\ \frac{d}{dt} c_m^0(t) &= -2\tilde{\omega}_m^2 b_m^0(t) - 4n c_m^0(t) + q_m(t) \\ a_m^0(0) &= b_m^0(0) = c_m^0(0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.110)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,a_m^1(t) = 2b_m^1(t) - \mathcal{K}_m\left[a_m^0(t)\right]^2\\
&\frac{d}{dt}\,b_m^1(t) = c_m^1(t) - \tilde{\omega}_m^2 a_m^1(t) - 2nb_m^1(t) - \mathcal{K}_m b_m^0(t)c_m^0(t)\\
&\frac{d}{dt}\,c_m^1(t) = -2\tilde{\omega}_m^2 b_m^1(t) - 4nc_m^1(t) - \mathcal{K}_m\left[c_m^0(t)\right]^2 + q_m(t)\\
&a_m^1(0) = b_m^1(0) = c_m^1(0) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.111)$$

Przejdziemy obecnie do rozwiązania równania filtru. Do rozwiązania użyjemy ponownie metody perturbacji.

Rozwiązanie przedstawimy w postaci rozwinięcia wg parametru ε, czyli:

$$\tilde{y}(x,t) = \tilde{y}^0(x,t) + \varepsilon\tilde{y}^1(x,t) + \varepsilon^2\tilde{y}^2(x,t) + \ldots \qquad (4.112)$$

Podstawiając rozwinięcia (4.106) i (4.112) do równania (4.63) i porównując stronami, otrzymujemy ciąg równań rekurencyjnych:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{y}^0(x,t) = \mathcal{L}\,\tilde{y}^0(x,t) + \int_\Omega\int_\Omega \mathcal{P}_0(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\left[\frac{\partial}{\partial t}\,z(\xi_2,t) - \tilde{y}_1^0(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2\\
&\frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{y}^1(x,t) = \mathcal{L}\,\tilde{y}^1(x,t) + \int_\Omega\int_\Omega \mathcal{P}_1(x,\xi_1,t)\mathcal{C}^{*}R^{-1}(\xi_1,\xi_2,t)\left[\frac{\partial}{\partial t}\,z(\xi_2,t) - \tilde{y}_1^1(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (4.113)$$

Po dokonaniu dyskretyzacji metodą Ritza-Galerkina powyższy układ równań rekurencyjnych (4.113) przekształca się w układy rekurencyjnych równań różniczkowych zwyczajnych. Przyjmując bowiem rozwiązania $\tilde{y}_1(x,t)$ i $\tilde{y}_2(x,t)$ w postaci kombinacji liniowych:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{y}_1(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t)v_m(x)\\
&\tilde{y}_2(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m(t)v_m(x)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.114)$$

i biorąc pod uwagę, że

$$\left.\begin{aligned}
&g_m(t) = g_m^0(t) + \varepsilon g_m^1(t) + \ldots\\
&d_m(t) = d_m^0(t) + \varepsilon d_m^1(t) + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (4.115)$$

nieznane funkcje $g_m^0(t), g_m^1(t), \ldots$ i $d_m^0(t), d_m^1(t), \ldots$ wyznaczane będę z następujących układów rekurencyjnych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,g_m^0(t) - d_m^0(t) - a_m^0(t)\mathcal{K}_m(t)\frac{d}{dt}\,z_m(t) + a_m^0(t)\mathcal{K}_m(t)g_m^0(t) = 0\\
&\frac{d}{dt}\,d_m^0(t) + \tilde{\omega}_m^2 g_m^0(t) + 2nd_m^0(t) - b_m^0(t)\mathcal{K}_m(t)\frac{d}{dt}\,z_m(t) + b_m^0(t)\mathcal{K}_m(t)g_m^0(t) = 0\\
&g_m^0(0) = d_m^0(0) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.116)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,g_m^1(t) - d_m^1(t) - a_m^1(t)\mathcal{K}_m(t)\frac{d}{dt}\,z_m(t) + a_m^1(t)\mathcal{K}_m(t)g_m^1(t) = 0\\
&\frac{d}{dt}\,d_m^1(t) + \tilde{\omega}_m^2 g_m^1(t) + 2nd_m^1(t) - b_m^1(t)\mathcal{K}_m(t)\frac{d}{dt}\,z_m(t) + b_m^1(t)\mathcal{K}_m(t)g_m^1(t) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.117)$$

itd.

Jeśli założyć, że niestacjonarności rozwiązań nieliniowych równań różniczkowo-całkowych typu Riccati są niewielkie, to rozwiązanie tych równań można przedstawić w postaci:

$$\mathcal{P}(x,\xi,t) = \mathcal{P}_0(x,\xi) + \varepsilon\mathcal{P}_1(x,\xi,t) + \ldots \qquad (4.118)$$

Wtedy nieznane funkcje $g_m^0(t), g_m^1(t), \ldots$, i $d_m^0(t), d_m^1(t)\ldots$ wyznaczane będą z następujących układów rekurencyjnych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\, g_m^0(t) - d_m^0(t) = 0 \\ &\frac{d}{dt}\, d_m^0(t) + \tilde{\omega}_m^2 g_m^0(t) + 2n d_m^0(t) = 0 \\ &g_m^0(0) = d_m^0(0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.119)$$

czyli

$$\left.\begin{aligned} &g_m^0(t) = d_m^0(t) = 0 \\ &\frac{d}{dt}\, g_m^1(t) - d_m^1(t) - a_m^0 \mathcal{K}_m(t) \frac{d}{dt}\, z_m(t) = 0 \\ &\frac{d}{dt}\, d_m^1(t) + \tilde{\omega}_m^2 g_m^1(t) + 2n d_m^1(t) - b_m^0 \mathcal{K}_m(t) \frac{d}{dt}\, z_m(t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.120)$$

itd.
gdzie

$$\mathcal{K}_m(t) = \varepsilon \mathcal{K}_m^1(t) + \varepsilon^2 \mathcal{K}_m^2(t) + \ldots$$

a współczynniki $a_m^0, a_m^1, \ldots, b_m^0, b_m^1, \ldots$ wyznacza się z następujących układów rekurencyjnych równań:

$$\left.\begin{aligned} &b_m^0 = 0 \\ &c_m^0 - \omega_m^2 a_m^0 - 2n a_m^0 = 0 \\ &-4n c_m^0 + q_m^0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.121)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\, a_m^1(t) = 2 b_m^1(t) - \mathcal{K}_m(t) \left[a_m^0\right]^2 \\ &\frac{d}{dt}\, b_m^1(t) = c_m^1(t) - \tilde{\omega}_m^2 a_m^1(t) - 2n b_m^1(t) - \mathcal{K}_m(t) b_m^0 c_m^0 \\ &\frac{d}{dt}\, c_m^1(t) = -2\, {}^2_m b_m^1(t) - 4n c_m^1(t) - \mathcal{K}_m(t) \left[c_m^0\right]^2 + q_m^1(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4.122)$$

itd.

przy czym

$$q_m(t) = q_m^0 + \varepsilon q_m^1(t) + \ldots$$

5. OPTYMALNE FILTROWANIE ZAKŁÓCEŃ LOSOWYCH O ZNANYCH CHARAKTERYSTYKACH PROBABILISTYCZNYCH, A NIE BĘDĄCYCH "BIAŁYMI SZUMAMI"

5.1. Sformułowanie problemu

Przyjmowane dotychczas przy badaniu drgań układów o stałych rozłożonych założenie o charakterze zakłóceń losowych w postaci "białego szumu" (patrz § 4) jest poważnym uproszczeniem problemu, gdyż są to procesy fizykalnie nierealizowalne. Znacznie bliższe rzeczywistości mogą być te modele optymalnej estymacji, które uwzględniają zakłócenia losowe o charakterze "kolorowych szumów". Jednak przyjęty wtedy klasyczny model filtru Kalmana staje się bardzo skomplikowany, gdyż powiększa się gwałtownie liczba równań opisujących ten model i wzrastają trudności w procesie ich rozwiązywania. Pokażemy to na prostym przykładzie. Jak wiadomo, wprowadzając jako wymuszenie dla dowolnego układu dynamicznego procesy gaussowskie o charakterze "białego szumu", uzyskamy rozwiązania będące procesami gaussowskimi o charakterze "kolorowych szumów"

Założymy, dla uproszczenia, że wymuszenie o charakterze "kolorowego szumu" będzie rozwiązaniem jednego tylko równania, w którym wymuszenie będzie "białym szumem", czyli

$$\frac{\partial}{\partial t}\, f(x,t) = L_1 f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\, m(x,t,\psi) \qquad (5.1)$$

Również obserwacje zmiennej stanu założymy, że zachodzi w obecności zakłócenia o charakterze "kolorowego szumu", będącego rozwiązaniem jednego tylko równania, w którym wymuszenie będzie "białym szumem", czyli

$$\left.\begin{aligned} &z(x,t) = y_1(x,t) + h(x,t) \\ &\frac{\partial}{\partial t}\, h(x,t) = L_2 h(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\, \eta(x,t,\psi) \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

Równania filtru przyjmą wtedy postać:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}_1(x,t) = \hat{v}_2(x,t) + \iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{12}(x,\xi_1,t) - L_2P_{11}(x,\xi_1,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)} \times \\
&\times \left[z_1(\xi_2,t) - L_2\hat{v}_1(\xi_2,t) - \hat{v}_2(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}_2(x,t) = \hat{v}_3(x,t) + \iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{22}(x,\xi_1,t) - L_2P_{12}(x,\xi_1,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)} \times \\
&\times \left[z_1(\xi_2,t) - L_2\hat{v}_1(\xi_2,t) - \hat{v}_2(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}_3(x,t) = L\hat{v}_1(x,t) + 2nL_1\hat{v}_2(x,t) + L\hat{v}_2(x,t) + L_1\hat{v}_3(x,t) - \\
&- 2n\hat{v}_3(x,t) + \iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{23}(x,\xi_1,t) - L_2P_{13}(x,\xi_1,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)} \times \\
&\times \left[z_1(\xi_2,t) - L_2\hat{v}_1(\xi_2,t) - \hat{v}_2(\xi_2,t)\right]d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

gdzie

$$z_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}y_1(x,t) - L_2y_1(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t,\vartheta),$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$\hat{v}_1(x,0) = \hat{v}_2(x,0) = \hat{v}_3(x,0) = 0 \qquad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
&B_1\hat{v}_1(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad B_1\hat{v}_2(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad B_1\hat{v}_3(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\
&B_2\hat{v}_1(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad B_2\hat{v}_2(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad B_2\hat{v}_3(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned} \qquad (5.5)$$

Nieliniowe równania różniczkowo-całkowe typu Riccati, z których wyznacza się nieznane operatory wzmocnienia $P_{11}(x,\xi,t)$, $P_{12}(x,\xi,t)$, $P_{13}(x,\xi,t)$ i $P_{23}(x,\xi,t)$ mają postać:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{11}(x,\xi,t) = 2P_{12}(x,\xi,t) - \\
&-\iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{12}(x,\xi_1,t) - L_2P_{11}(x,\xi_1,t)\right]\left[P_{12}(\xi,\xi_2,t) - L_2P_{11}(\xi,\xi_2,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{12}(x,\xi,t) = P_{22}(x,\xi,t) + P_{12}(x,\xi,t) - \\
&-\iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{12}(x,\xi,t) - L_2P_{11}(x,\xi_1,t)\right]\left[P_{22}(\xi,\xi_2,t) - L_2P_{12}(\xi,\xi_2,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{13}(x,\xi,t) = P_{23}(x,\xi,t) - L(L_2P_{11}(x,\xi,t) - 2nL_2P_{12}(x,\xi,t) - LP_{12}(x,\xi,t) + \\
&+ L_2P_{13}(x,\xi,t) - 2nP_{13}(x,\xi,t) - \\
&-\iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{12}(x,\xi_1,t) - L_2P_{11}(x,\xi_1,t)\right]\left[P_{23}(\xi,\xi_2,t) - L_2P_{13}(\xi,\xi_2,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{22}(x,\xi,t) = 2P_{23}(x,\xi,t) - \\
&-\iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{22}(x,\xi_1,t) - L_2P_{12}(x,\xi_1,t)\right]\left[P_{22}(\xi,\xi_2,t) - L_2P_{12}(\xi,\xi_2,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{23}(x,\xi,t) = -L(L_2P_{12}(x,\xi,t) - 2nL_2P_{22}(x,\xi,t) - LP_{22}(x,\xi,t) + L_2P_{23}(x,\xi,t) \\
&- 2nP_{23}(x,\xi,t) + P_{33}(x,\xi,t) - \\
&-\iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{22}(x,\xi_1,t) - L_2P_{12}(x,\xi_1,t)\right]\left[P_{23}(\xi,\xi_2,t) - L_2P_{13}(\xi,\xi_2,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{33}(x,\xi,t) = -L(L_2P_{13}(x,\xi,t) - LP_{13}(x,\xi,t) + 4nL_2P_{23}(x,\xi,t) - L_{23}(x,\xi,t) + \\
&+ 2L_2P_{33}(x,\xi,t) - 4nP_{33}(x,\xi,t) - \\
&-\iint_{\Omega\Omega} \frac{\left[P_{23}(x,\xi_1,t) - L_2P_{13}(x,\xi_1,t)\right]\left[P_{23}(\xi,\xi_2,t) - L_2P_{13}(\xi,\xi_2,t)\right]}{r(\xi_1,\xi_2,t)}d\xi_1 d\xi_2 + \\
&+ q(x,\xi,t)
\end{aligned} \qquad (5.6)$$

wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi

$$P_{11}(x,\xi,0) = P_{12}(x,\xi,0) = P_{22}(x,\xi,0) = P_{13}(x,\xi,0) = P_{23}(x,\xi,0) = P_{33}(x,\xi,0) = 0 \tag{5.7}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1P_{11}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} &= 0 \quad B_1P_{12}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ B_2P_{11}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} &= 0 \quad B_2P_{12}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ B_1P_{22}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} &= 0 \quad B_1P_{13}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ B_2P_{22}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} &= 0 \quad B_2P_{13}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ B_1P_{23}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} &= 0 \quad B_1P_{33}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ B_2P_{23}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} &= 0 \quad B_2P_{33}(x,\xi,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Jak widać, już w tym najprostszym przypadku, uzyskuje się skomplikowany i trudny do rozwiązania układ równań różniczkowych cząstkowych i różniczkowo-całkowych wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Chcąc uniknąć trudności przy rozwiązywaniu tych równań, sformułujemy obecnie nowy model filtru, który uwzględniać będzie zakłócenia losowe o znanych charakterystykach probabilistycznych (konkretnie o znanych wartościach średnich i funkcjach korelacyjnych), nie będących jednak "białymi szumami" i który będzie znacznie prostszy od modelu klasycznego.

Założymy, że układy dynamiczne o stałych rozłożonych są opisane przez takie same równania różniczkowe cząstkowe wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi (patrz § 4, równania (4.1), (4.4), (4.7), (4.8) i (4.2), (4.3)) z tę jednak różnicę, że prawa strona tych równań $f(x,t,\xi)$ będzie gaussowskim polem losowym II rzędu, interpretowanym jako proces stochastyczny o wartościach w przestrzeniach Hilberta o następujących własnościach:

$$E\left[f(x,t,\varphi)\right] = 0 \tag{5.9}$$

$$E\left[f^2(x,t,\varphi)\right] < \infty \tag{5.10}$$

$$E\left[f(x,t,\varphi)f(\xi,\tau,\varphi)\right] = K_f(x,\xi,t,\tau) \tag{5.11}$$

gdzie $K_f(x,\xi,t,\tau)$ jest znaną funkcją korelacyjną $f(x,t,\varphi)$.

Dalej założymy, że obserwacja stanu układu jest prowadzona w obecności zakłóceń losowych, polem losowym $\eta(x,t,\varphi)$ II rzędu, interpretowanym jako proces stochastyczny o wartościach w przestrzeni Hilberta, czyli:

$$z(x,t) = u(x,t) + \eta(x,t,\varphi) \tag{5.12}$$

lub w postaci macierzowej

$$z(x,t) = \mathcal{C}y(x,t) + \eta(x,t,\varphi) \tag{5.13}$$

gdzie $\mathcal{C} = [1, 0]$

Odnośnie do pól losowych $\eta(x,t,\varphi)$ założymy, że mają one następujące własności:

$$E\left[\eta(x,t,\varphi)\right] = 0 \tag{5.14}$$

$$E\left[\eta^2(x,t,\varphi)\right] < \infty \tag{5.15}$$

$$E\left[\eta(x,t,\varphi)\eta(\xi,\tau,\varphi)\right] = K_\eta(x,\xi,t,\tau) \tag{5.16}$$

gdzie $K_\eta(x,\xi,t,\tau)$ jest znaną funkcją korelacyjną $\eta(x,t,\varphi)$, a także że są niezależne od pól losowych $f(x,t,\varphi)$, czyli

$$E\left[f(x,t,\varphi)\eta(\xi,\tau,\varphi)\right] = 0 \tag{5.17}$$

Dążąc z punktu widzenia obliczeń numerycznych do uproszczenia modelu filtru, wprowadzimy jeszcze jedno (niekonieczne) założenie, dotyczące wzajemnego stosunku poziomu zakłóceń $f(x,t,\varphi)$ i $\eta(x,t,\varphi)$. Przyjmiemy bowiem, że intensywność zakłoceń obserwacji jest znacznie większa od zakłóceń $f(x,t,\varphi)$. Wprowadzając mały parametr ε, zapiszemy ten fakt następująco:

$$\left.\begin{aligned} E\left[f(x,t,\varphi)f(\xi,\tau,\varphi)\right] &= K_f(x,\xi,t,\tau) \qquad (5.18)\\ E\left[\eta(x,t,\varphi)\eta(\xi,\tau,\varphi)\right] &= \varepsilon K_\eta(x,\xi,t,\tau) \qquad (5.19)\\ K_f(x,\xi,t,\tau) &<< \tfrac{1}{\varepsilon}K_\eta(x,\xi,t,\tau) \qquad (5.19a) \end{aligned}\right\}$$

Po tych wstępnych uwagach przejdziemy obecnie do sformułowania i udowodnienia zasadniczych twierdzeń dotyczących zmodyfikowanego filtru.

5.2. Model optymalnego filtru

Sformułujemy obecnie zasadnicze twierdzenia dotyczące reprezentowanego w niniejszym rozdziale modelu optymalnego filtru:

TWIERDZENIE 3

Niech niezależne pola losowe $f(x,t,\varphi)$ i $\eta(x,t,\varphi)$ interpretowane jako procesy stochastyczne II rzędu o wartościach w przestrzeniach Hilberta, spełniają następujące warunki:

Dwuwymiarowe pole losowe $\{f(x,t,\varphi), \eta(x,t,\varphi)\}$ ma rozkład gaussowski

$$E\left[f^2(x,t,\varphi)\right] < \infty, \quad E\left[\eta^2(x,t,\varphi)\right] < \infty \tag{5.20}$$

$$E\left[f(x,t,\varphi)\right] = 0; \quad E\left[\eta(x,t,\varphi)\right] = 0 \tag{5.21}$$

$$E\left[f(x,t,\varphi)\eta(\xi,\tau,\varphi)\right] = 0, \tag{5.22}$$

$$E\left[f(x,t,\varphi)f(\xi,\tau,\varphi)\right] = K_f(x,\xi,t,\tau), \tag{5.23}$$

$$E\left[\eta(x,t,\varphi)\,(\xi,\tau,\varphi)\right] = \varepsilon K_\eta(x,\xi,t,\tau), \tag{5.24}$$

$$K_f(x,\xi,t,\tau) >> \varepsilon K_\eta(x,\xi,t,\tau), \tag{5.24a}$$

gdzie ε - jest małym parametrem.

Założymy, że obserwacja rozwiązania równania dynamiki (4.4) zachodzi w obecności zakłóceń losowych $\eta(x,t,\varphi)$ w całym obszarze $\Omega \subset R^n$, czyli

$$z(x,t) = u(x,t) + \eta(x,t,\varphi), \quad x = (x^1 \ldots x^n) \in \Omega \subset R^n, \quad t \in R^1_+ \tag{5.25}$$

1. Optymalne oszacowanie (estymacja) $\tilde{u}(x,t) = \tilde{y}_1(x,t)$ rozwiązania równania (4.4) wraz z warunkami brzegowymi (4.2) i początkowymi (4.3) jest opisane przez równania filtru o postaci:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{y}_1(x,t) &= \tilde{y}_2(x,t) + \varepsilon\varphi_1(x,t)\left[z(x,t) - \tilde{y}_1(x,t)\right] \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{y}_2(x,t) &= -\tilde{L}\tilde{y}_1(x,t) - 2n\tilde{y}_2(x,t) + \varepsilon\varphi_2(x,t)\left[z(x,t) - y_1(x,t)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

- przy warunkach brzegowych:

$$\bigwedge_{1\le j\le m-1} B_j\tilde{y}_1(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j\tilde{y}_2(x,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5.27}$$

- i warunkach początkowych:

$$\tilde{y}_1(x,0) = y_{10} \quad \tilde{y}_2(x,0) = y_{20} \tag{5.28}$$

gdzie funkcje $\varphi_1(x,t)$ i $\varphi_2(x,t)$ są określone przez dodatkowe równania całkowe o postaci:

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\xi,t) &= \int_0^t\int_\Omega \left[G^o_{11}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_1(\xi_1,\tau) + \right. \\ &\left. + G^o_{12}(x,\xi_1,t\tau)\varphi_2(\xi_1,\tau)\right] K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\xi \\ P_{21}(x,\xi,t) &= \int_0^t\int_\Omega \left[G^o_{21}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_1(\xi_1,\tau) + \right. \\ &\left. + G^o_{22}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_2(\xi_2,\tau)\right] K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau \end{aligned} \tag{5.29}$$

przy czym $G^o_{ik}(x,\xi,t,\tau)$, $i,k = 1,2$ są elementami macierzowej funkcji Greena $\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)$ równań filtru.

2. Nieznane operatory kowariancji $P_{ik}(x,\xi,t)$ występujące w równaniach optymalnego filtru (5.26) i pomocniczych równaniach całkowych (5.29) wyznacza się jako rozwiązania układu równań różniczkowo-całkowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P_{11}(x,\xi,t) &= P_{11}(x,\xi,t) + P_{21}(x,\,,t) - \varepsilon\varphi_1(x,t)\left[P_{11}(x,\xi,t) + P_{21}(x,\xi,t) + \right. \\ &+ \int_0^t\int_\Omega \left[G^o_{11}(x,\xi_1,t,\tau) + G^o_{12}(x,\xi_1,t,\tau)\right] K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau - \\ &-2\varepsilon\varphi_1(x,t)\int_0^t\int_\Omega \left[G^o_{11}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_1(\xi_1,\tau) + G^o_{12}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_2(\xi_1,\tau)\right] K_\eta(\xi,\xi_1,t\tau)\,d\xi_1 d\tau \\ \frac{\partial}{\partial t}P_{21}(x,\xi,t) &= P_{22}(x,\xi,t) - 2nP_{11}(x,\xi,t) - \tilde{L}P_{21}(x,\xi,t) - P_{21}(x,\xi,t) \times \\ &\times\varepsilon\left[\varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t)\right] + \int_0^t\int_\Omega \left[G^o_{21}(x,\xi_1,t,\tau) + G^o_{22}(x,\xi_1,t,\tau)\right] K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau - \\ &-\varepsilon\varphi_1(x,t)\int_0^t\int_\Omega \left[G^o_{22}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_1(\xi_1,\tau) + G^o_{12}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_2(\xi_1,\tau)\right] K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau - \end{aligned}$$

$$-\varepsilon\varphi_2(x,t)\int_0^t\int_\Omega\left[G_{11}^0(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_1(\xi_1,\tau)+G_{12}^0(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_2(\xi_1,\tau)\right]K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{22}(x,\xi,t) = -\mathcal{L}_x P_{21}(x,\xi,t) - \mathcal{L}_\xi P_{21}(x,\xi,t) - 4nP_{22}(x,\xi,t) -$$

$$-\varepsilon\varphi_2(x,t)\left[P_{21}(x,\xi,t)+P_{22}(x,\xi,t)\right] +$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\left[G_{12}^0(x,\xi_1,t,\tau)+G_{22}^0(x,\xi_1,t,\tau)\right]K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau -$$

$$-\varepsilon^2\varphi_1(x,t)\int_0^t\int_\Omega\left[G_{22}^0(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_1(\xi_1,\tau)+G_{21}^0(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_2(\xi_1,\tau)\right]K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau -$$

$$-\varepsilon^2\varphi_2(x,t)\int_0^t\int_\Omega\left[G_{21}^0(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_1(\xi_1,\tau)+G_{22}^0(x,\xi_1,t,\tau)\varphi_2(\xi_1,\tau)\right]K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\xi_1 d\tau \tag{5.30}$$

- przy warunkach początkowych:

$$P_{11}(x,\xi,0) = P_{21}(x,\xi,0) = P_{22}(x,\xi,0) = 0 \tag{5.31}$$

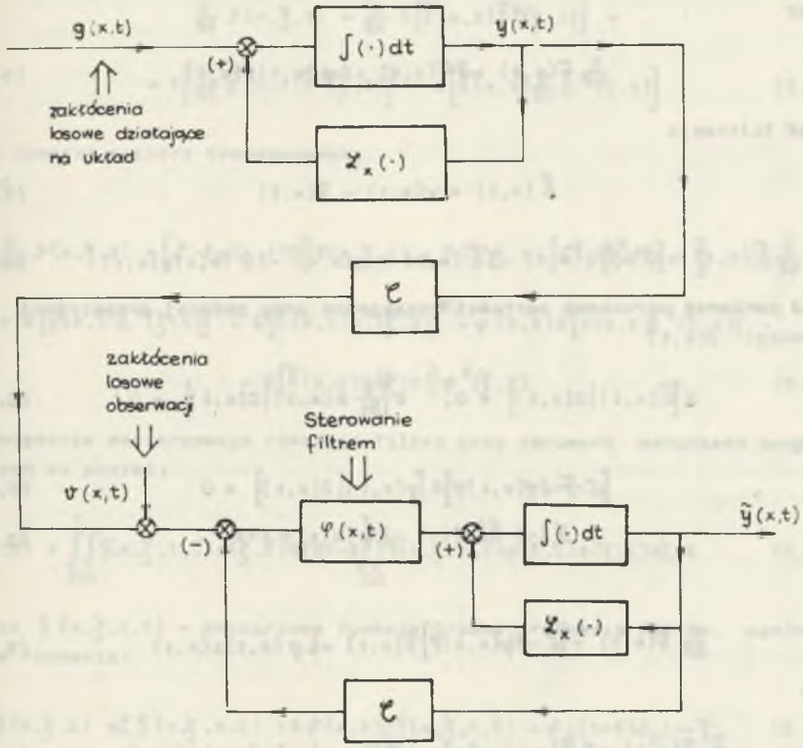
- i brzegowych:

$$\left.\begin{aligned}\bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{11}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} &= 0\\ \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{21}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} &= 0\\ \bigwedge_{0\le j\le m-1} B_j P_{22}(x,\xi,t)\Big|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

D o w ó d

Ponieważ dwuwymiarowe pole losowe $\{f(x,t),\eta(x,t)\}$ jest gaussowskie, optymalna estymata ma reprezentację

$$y(x,t) = \int_0^t\int_\Omega K(x,\xi,t,\tau)z(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$



Rys. 2. Schemat blokowy zmodyfikowanego filtru dla układów dynamicznych o stałych rozłożonych w przypadku zakłóceń losowych nie posiadających charakteru "białych szumów"

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\bar{y}}(x,t) = \mathcal{F}\hat{\bar{y}}(x,t) + \mathcal{E}\varphi(x,t)z(x,t) \tag{5.33}$$

Błąd filtracji

$$\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t) = y(x,t) - \hat{\bar{y}}(x,t) \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t) = \left[\mathcal{L} - \mathcal{F}\right] y(x,t) + \mathcal{F}\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t) + g(x,t) - \mathcal{E}\varphi(x,t)z(x,t) \tag{5.35}$$

Stąd ponieważ warunkowe wartości oczekiwane przy zadanej przestrzeni obserwacji $Z(x,t)$

$$E\left[\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)\middle|Z(x,t)\right] = 0, \quad E\left[\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)\middle|Z(x,t)\right] = 0 \cdot \tag{5.36}$$

więc

$$\left[\mathcal{L} - \mathcal{F} - \mathcal{E}\varphi(x,t)\mathcal{C}\right] E\left[y(x,t)\middle|Z(x,t)\right] = 0 \tag{5.37}$$

$$\mathcal{F}(\cdot) \triangleq \mathcal{L}(\cdot) - \mathcal{E}\varphi(x,t)\mathcal{C}(\cdot) \tag{5.38}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\bar{y}}(x,t) = \left[\mathcal{L} - \mathcal{E}\varphi(x,t)\mathcal{C}\right]\hat{\bar{y}}(x,t) + \mathcal{E}\varphi(x,t)z(x,t) \tag{5.39}$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\bar{y}}(x,t) = \mathcal{L}\hat{\bar{y}}(x,t) - \mathcal{E}\varphi(x,t)\mathcal{C}\hat{\bar{y}}(x,t) + \mathcal{E}\varphi(x,t)z(x,t) \tag{5.49}$$

Po rozpisaniu tego macierzowego równania na skalarne otrzymamy równania filtru (5.26).

Nieznane sterowania $\varphi(x,t)$, które występują w równaniach optymalnego filtru wyznaczone będą w oparciu o warunek minimum funkcjonału reprezentowanego przez iloczyn skalarny wektorów $\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)$ oznaczających błąd filtrowania:

$$I = E\int_{\Omega}\tilde{\bar{\varepsilon}}^{*}(x,t)\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)dx \tag{5.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t) = \left[\mathcal{L} - \mathcal{E}\mathcal{C}\varphi(x,t)\right]\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t) - \mathcal{E}\varphi(x,t)z(x,t) \tag{5.42}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,\xi,t) = \frac{\partial}{\partial t}E\left[\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)\tilde{\bar{\varepsilon}}^{*}(\xi,t)\right] =$$

$$= E\left[\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)\tilde{\bar{\varepsilon}}^{*}(\xi,t)\right] + E\left[\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\bar{\varepsilon}}^{*}(\xi,t)\right] \tag{5.43}$$

* - oznacza macierz transponowaną.

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,\xi,t) = \left[\mathcal{L} - \mathcal{E}\varphi(x,t)\mathcal{C}\right]P(x,\xi,t) + P(x,\xi,t)\left[\mathcal{L}^{*} - \mathcal{E}\mathcal{C}^{*}\varphi(x,t)\right] +$$

$$+ E\left[g(x,t)\tilde{\bar{\varepsilon}}^{*}(\xi,t)\right] + E\left[\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)g^{*}(\xi,t)\right] - \varphi(x,t)E\left[z(x,t)\tilde{\bar{\varepsilon}}^{*}(\xi,t)\right] -$$

$$- E\left[\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)z(\xi,t)\right]\varphi^{*}(\xi,t) \tag{5.44}$$

Rozwiązanie macierzowego równania filtru przy zerowych warunkach początkowych ma postać:

$$\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t) = \int_{0}^{t}\int_{\Omega}\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau - \mathcal{E}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)\varphi(\xi,\tau)z(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{5.45}$$

gdzie $\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)$ - macierzowa funkcja Greena, równania filtru, spełniające równanie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}(x,\xi,\tau) = \mathcal{L}\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau) - \mathcal{E}\varphi(x,t)\mathcal{C}\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau) + \delta_{D}(t-\tau)\delta_{D}(x-\xi) \tag{5.46}$$

$$E\left[\tilde{\bar{\varepsilon}}(x,t)g^{*}(\xi,t)\right] = \int_{0}^{t}\int_{\Omega}\mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)E\left[g(\xi_1,t)g^{*}(\xi,\tau)\right]d\xi_1 d\tau -$$

$$-\mathcal{E}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi(\xi_1,\tau)E\left[z(\xi_1,t)g(\xi,\tau)\right]d\xi_1 d\tau =$$

$$-\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)K_{f}(\xi,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau \tag{5.47}$$

$$E\left[g(x,t)\tilde{\bar{\varepsilon}}^{*}(\xi,t)\right] = \int_{0}^{t}\int_{\Omega}K_{f}(\xi,\xi_1,t,\tau)\mathcal{G}^{*}(x,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau \tag{5.48}$$

$$E\left[\tilde{\varepsilon}(x,t)z(\xi,t)\right] = \int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)E\left[a(\xi_1,\tau)z(\xi,t)\right]d\xi_1 d\tau -$$

$$- \varepsilon \int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi(\xi_1,\tau)E\left[z(\xi_1,\tau)z(\xi,t)\right]d\xi_1 d\tau$$

$$= \varepsilon \int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi(\xi_1,\tau)K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau \qquad (5.49)$$

$$E\left[z(x,t)\varepsilon^*(\xi,t)\right] = \varepsilon \int_0^t\int_\Omega K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\varphi^*(\xi_1,\tau)\mathcal{G}^*(x,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau \qquad (5.50)$$

W rezultacie otrzymujemy następujące macierzowe równanie różniczkowo-całkowe na macierz kowariancji błędu filtrowania:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x,\xi,t) = \mathcal{L}_x\mathcal{P}(x,\xi,t) + \mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{L}^* - \varepsilon\varphi(x,t)\mathcal{C}\mathcal{P}(x,\xi,t) -$$

$$- \varepsilon\mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{C}^*\varphi^*(\xi,t) + \int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_\Omega K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)\mathcal{G}^*(x,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau -$$

$$- \varepsilon^2 \int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)\varphi(\xi_1,\tau)K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau\varphi^*(\xi,t) -$$

$$- \varepsilon^2\varphi(x,t)\int_0^t\int_\Omega K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\varphi^*(\xi_1,\tau)\mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau \qquad (5.51)$$

Potraktujemy teraz zagadnienie jako zadanie dotyczące problemu optymalnego sterowania. Mianowicie dobierzemy funkcje $\varphi(x,t)$ uznaną za sterowanie w taki sposób, aby minimalizowała funkcjonał $\mathcal{J}\left[\varphi(x,t)\right] = E\int_\Omega |\tilde{\varepsilon}(x,t)|^2 dx = E\langle\tilde{\varepsilon}(t),\tilde{\varepsilon}(t)\rangle_H = tr\mathcal{P}(t)$. Jeżeli założymy, że macierz kowariancji $\mathcal{P}(x,\xi,t)$ reprezentuje stan układu a $\varphi(x,t)$ jest sterowaniem optymalnym układu, to zagadnienie zostanie sprowadzone do problemu optymalnego sterowania deterministycznego. W celu rozwiązania tego zagadnienia wykorzystamy następujący lemat, będący analogią zasady minimum, w

stosunku do układów opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Dowód tego lematu pomijamy.

Lemat 2: ([25]) (zasada maksimum)

Niech dana jest rodzina form dwuliniowych- ciągłych na przestrzeni Hilberta $\mathcal{V}$.

$$\bigwedge_{t\in[0,T]} \mathcal{P}(t), \quad W(t) \longrightarrow a(\mathcal{P},W) = \langle \mathcal{K}\mathcal{P}(t), W(t)\rangle, \quad \mathcal{K}\mathcal{P}(t) \in \mathcal{V}$$

gdzie

$$\mathcal{P}(t)\varphi = \int_\Omega \mathcal{P}(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\mathcal{K}\mathcal{P}(t) = \left[\mathcal{L} - \varphi(t)\mathcal{C}\right]\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)\left[\mathcal{L}^* - \mathcal{C}^*\varphi(t)\right]$$

$\mathcal{H}, \mathcal{V}$ są przestrzeniami operatorów Hilberta-Schmidta, a $\mathcal{V}^*$ jest przestrzenią sprzężoną do $\mathcal{V}$.

Niech spełnione będą następujące warunki:

1. $\bigwedge_{\mathcal{P},W\in\mathcal{V}}$ funkcja $t \longrightarrow a(\mathcal{P},W)$ jest mierzalna na $[0,T]$

$$|a(\mathcal{P},W)| \leq c\|\mathcal{P}\|_{\mathcal{V}}\|W\|_{\mathcal{V}} \qquad c > 0$$

2. Istnieje taka liczba λ, że

$$\bigwedge_{\mathcal{P}\in\mathcal{V}} \bigwedge_{t\in[0,T]} a(\mathcal{P},\mathcal{P}) + \lambda\|\mathcal{P}\|^2_{\mathcal{H}} > \alpha\|\mathcal{P}\|^2_{\mathcal{V}}$$

gdzie $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}^*$

i zadany jest funkcjonał stanu:

$$I\left[\varphi(x,t)\right] = E\int_\Omega \tilde{\varepsilon}^*(x,t)\tilde{\varepsilon}(x,t)dx = E\langle\tilde{\varepsilon}(t),\tilde{\varepsilon}(t)\rangle_H = tr\mathcal{P}(t)$$

Operator $\mathcal{L}$ w równaniu (4.8) spełnia warunki (1) i (2), a stąd te warunki spełnia także operator $\mathcal{K}$. Załóżmy, że $t \in [0,T]$, przy czym czas T jest ustalony, a koniec trajektorii jest swobodny.

Wprowadzimy tzw. funkcję Hamiltona $\mathcal{H}$ o postaci:

$$\mathcal{H} = \mathrm{tr}\left\{\left[\mathcal{L}-\varphi(t)\mathcal{C}\right]\mathcal{P}(t)\,\vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} + \mathrm{tr}\left\{\mathcal{P}(t)\left[\mathcal{L}^{*}-\mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(t)\right]\vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} +$$
$$+ \mathrm{tr}\left\{\mathcal{G}\otimes K_f\,\vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} + \mathrm{tr}\left\{K_f\otimes\mathcal{G}^{*}\,\mathcal{P}^{*}(t)\right\} -$$
$$- \mathrm{tr}\left\{(\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi)\,\varphi^{*}(t)\,\vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\} - \mathrm{tr}\left\{\varphi(t)(\varphi^{*}K_\eta\otimes\mathcal{G}^{*})\,\vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\right\}. \qquad (5.52)$$

gdzie

$$\mathcal{G}\otimes K_\eta = \int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)\,d\tau d\xi_1$$

$$K_F\otimes\mathcal{G}^{*} = \int_0^t\int_\Omega K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)\mathcal{G}^{*}(x,\xi_1,t,\tau)\,d\tau d\xi_1$$

$$\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi = \int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(x,\xi_1,t,\tau)K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\varphi(\xi_1,\tau)\,d\tau d\xi_1$$

$$\varphi^{*}K_\eta\otimes\mathcal{G} = \int_0^t\int_\Omega \varphi^{*}(\xi_1,\tau)K_\eta(\xi,\xi_1,t,\tau)\mathcal{G}^{*}(x,\xi_1,t,\tau)\,d\tau d\xi_1$$

$\vec{\mathcal{P}}(t)$ jest pewną zmienną pomocniczą (sprzężoną). Warunki konieczne i wystarczające optymalnego sterowania są następujące:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{P}}(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathcal{P}} \\ &\text{czyli} \\ &\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{P}}(t) = -\left[\mathcal{L}-\varphi(t)\mathcal{C}\right]\vec{\mathcal{P}}(t) - \vec{\mathcal{P}}(t)\left[\mathcal{L}^{*}-\mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(t)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (5.53)$$

$$\left.\begin{aligned} &2.\ \frac{d}{dt}\mathcal{P}(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathcal{G}} \\ &\text{czyli} \\ &\frac{d}{dt}\mathcal{P}(t) = \left[\mathcal{L}-\varphi(t)\mathcal{C}\,\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)\left[\mathcal{L}^{*}-\mathcal{C}^{*}\varphi^{*}(t)\right] + \right. \\ &\quad + \mathcal{G}\otimes K_f + K_f\otimes\mathcal{G} - (\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi)\varphi^{*}(t) + \\ &\quad \left. + \varphi(t)(\varphi^{*}K_\eta\otimes\mathcal{G}^{*})\right. \end{aligned}\right\} \qquad (5.54)$$

$$3.\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi}(\varphi-\tilde{\varphi}) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi}\,\delta\varphi = 0, \qquad \delta\varphi = \varphi-\tilde{\varphi}\in\mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ przestrzeń sterowań, a sterowanie optymalne można wyznaczyć z warunku

$$\vec{\mathcal{P}}(t)\mathcal{P}(t)\mathcal{C}^{*} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[(\mathcal{G}\otimes K_f)\,\vec{\mathcal{P}}(t)\right]\right\} - \vec{\mathcal{P}}(t)(\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[(\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi)\right]\right\}\mathrm{tr}\varphi^{*}(t)\mathrm{tr}\,\vec{\mathcal{P}}^{*}(t) + \vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\mathcal{P}(t)\mathcal{C}^{*} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[(K_f\otimes\mathcal{G}^{*})\,\vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\right]\right\} - \vec{\mathcal{P}}^{*}(t)(\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi) - \mathrm{tr}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[\varphi^{*}K_\eta\otimes\mathcal{G}^{*}\right]\mathrm{tr}\,\vec{\mathcal{P}}^{*}(t)\right. = 0 \qquad (5.55)$$

Aby znaleźć optymalne sterowanie $\varphi(t)$, trzeba rozwiązać metodami numerycznymi układ równań (5.46), (5.51), (5.55). Bowiem bezpośrednie wyznaczenie sterowania z formuły (5.55) z uwagi na występujące tam wyrażenia całkowe jest niemożliwe. Biorąc jednak pod uwagę, że pewne człony z małym parametrem ε, w równaniu filtru, mają nieznaczny wpływ na rozwiązanie, funkcję Greena $\mathcal{G}(x,\xi,t;\tau)$ filtru można przedstawić w postaci następującego rozwinięcia:

$$\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau) = \mathcal{G}^{0}(x,\xi,t,\tau) + \varepsilon\,\mathcal{G}^{1}(x,\xi,t,\tau) + \ldots \qquad (5.56)$$

gdzie $\mathcal{G}^{0}(x,\xi,t,\tau)$ jest funkcją Greena równań stanu (4.8). Stąd można przyjąć, że

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}\otimes K_f\right]\right\} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[K_f\otimes\mathcal{G}^{*}\right]\right\} = 0$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[(\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi)\right]\right\} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[\varphi^{*}K_\eta\otimes\mathcal{G}^{*}\right]\right\} = 0 \qquad (5.57)$$

W rezultacie celem uproszczenia obliczeń można przyjąć, że

$$\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)\approx\mathcal{G}^{0}(x,\xi,t,\tau)$$

i

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}\otimes K_f\right]\right\} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[K_f\otimes\mathcal{G}^{*}\right]\right\} = 0$$
$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[(\mathcal{G}\otimes K_\eta\varphi)\right]\right\} = 0, \qquad \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\mathrm{tr}\left[\varphi^{*}K_\eta\otimes\mathcal{G}^{*}\right]\right\} = 0 \qquad (5.58)$$

Wtedy otrzymamy

$$\mathcal{P}(t)\mathcal{C}^{*} - (\mathcal{G}^{o}K_{\eta}\otimes\varphi) = 0 \tag{5.59}$$

lub w rozwiniętej postaci:

$$\mathcal{P}(x,\xi,t)\mathcal{C}^{*} - \int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\mathcal{G}^{o}(x,\xi,t,\tau)K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\varphi(\xi_{1},\tau)d\xi_{1}d\tau = 0 \tag{5.60}$$

Po rozpisaniu powyższego macierzowego równania całkowego do postaci skalarnej otrzymamy układ równań (5.29).

5.3. Wyznaczanie estymaty drgań układów o stałych rozłożonych

Zgodnie z przedstawioną w poprzednim rozdziale teorią, aby wyznaczyć estymatę drgań, należy rozwiązać układy równań (5.26) (5.29) i (5.30). Rozwiązanie to ulegnie znacznemu uproszczeniu, jeśli założy się stacjonarność rozwiązań układów równań (5.29) i (5.30), co jest słuszne dla bardzo dużych czasów, czyli gdy $t\to\infty$. Podobnie jak i w poprzednich rozdziałach, tak i w tym nasze rozważania ograniczymy do tego przypadku. Równania (5.29) i (5.30) przyjmą wtedy postać:

$$\left.\begin{aligned}
P_{11}(x,\xi) &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{11}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{1}(\xi_{1}) + G^{o}_{12}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{2}(\xi_{1})\right]K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau\\
P_{21}(x,\xi) &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{21}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{1}(\xi_{1}) + G^{o}_{22}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{2}(\xi_{1})\right]K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau
\end{aligned}\right\} \tag{5.61}$$

i

$$\begin{aligned}
&P_{11}(x,\xi) + P_{21}(x,\xi) - \varepsilon\bar{\varphi}_{1}(x)\left[P_{11}(x,\xi) + P_{21}(x,\xi)\right] +\\
&+\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{11}(x,\xi_{1},t,\tau) + G^{o}_{12}(x,\xi_{1},t,\tau)\right]K_{f}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau -\\
&-2\varepsilon\bar{\varphi}_{1}(x)\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{11}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{1}(\xi_{1}) + G^{o}_{12}(x,\xi_{1},t,\tau)\varphi_{2}(\xi_{1})\right]K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_{22}(x,\xi) - 2nP_{11}(x,\xi) - \tilde{\ell}_{x}P_{21}(x,\xi) - P_{21}(x,\xi) + \varepsilon\left[\bar{\varphi}_{1}(x) - \bar{\varphi}_{2}(x)\right] +\\
&+\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{21}(x,\xi_{1},t,\tau) + G^{o}_{22}(x,\xi_{1},t,\tau)\right]K_{f}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau -\\
&-\varepsilon\bar{\varphi}_{1}(x)\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{22}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{1}(\xi_{1}) +\right.\\
&\left.+G^{o}_{12}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{2}(\xi_{1})\right]K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau -\\
&-\varepsilon\bar{\varphi}_{2}(x)\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{11}(x,\xi_{1},t,\tau)\varphi_{1}(\xi_{1}) +\right.\\
&\left.+G^{o}_{12}(x,\xi_{1},t,\tau)\varphi_{2}(\xi_{1})\right]K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau = 0\\
&-\tilde{\ell}_{x}P_{21}(x,\xi) - \tilde{\ell}_{\xi}P_{21}(x,\xi) - 4nP_{22}(x,\xi) - \varepsilon\bar{\varphi}_{2}(x)\left[P_{21}(x,\xi) + P_{22}(x,\xi)\right] +\\
&+\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{12}(x,\xi_{1},t,\tau) + G^{o}_{22}(x,\xi_{1},t,\tau)\right]K_{f}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau -\\
&-\varepsilon^{2}\bar{\varphi}_{1}(x)\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{22}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{1}(\xi_{1}) + G^{o}_{21}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{2}(\xi_{1})\right]K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau -\\
&-\varepsilon^{2}\bar{\varphi}_{2}(x)\int_{0}^{t}\iint_{\Omega}\left[G^{o}_{21}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{1}(\xi_{1}) + G^{o}_{22}(x,\xi_{1},t,\tau)\bar{\varphi}_{2}(\xi_{1})\right]K_{\eta}(\xi,\xi_{1},t,\tau)\,d\xi_{1}d\tau = 0
\end{aligned} \tag{5.62}$$

- przy warunkach brzegowych:

$$\left.\begin{aligned}
\bigwedge_{0\le j\le n-1} B_{j}P_{11}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} &= 0\\
\bigwedge_{0\le j\le n-1} B_{j}P_{21}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} &= 0\\
\bigwedge_{0\le j\le n-1} B_{j}P_{22}(x,\xi)\Big|_{\partial\Omega} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

Ze względu na to, że analiza filtrowania zakłóceń przeprowadzana będzie przy bardzo dużych czasach, gdy $t\to\infty$, założono, że sterowania $\varphi_{1}(x,t)$ i $\varphi_{2}(x,t)$ występujące w wyrażeniach całkowych w równaniach (5.61) i (5.62) mają charakter stacjonarny i oznaczono $\bar{\varphi}_{1}(x)$ i $\bar{\varphi}_{2}(x)$.

Układ równań (5.61) i (5.62) rozwiążemy stosując metodę Ritza-Galerkina i metodę perturbacji. W tym celu sterowania $\bar{\varphi}_1(x)$ i $\bar{\varphi}_2(x)$ oraz operatory kowariancji $P_{11}(x,\xi)$, $P_{21}(x,\xi)$ i $P_{22}(x,\xi)$ zapiszemy w postaci kombinacji liniowych:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m V_m(x)\\ \bar{\varphi}_2(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\beta_m V_m(x)\end{aligned}\right\} \tag{5.64}$$

i

$$\left.\begin{aligned}P_{11}(x,\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m V_m(x)V_m(\xi)\\ P_{21}(x,\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m V_m(x)V_m(\xi)\\ P_{22}(x,\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m V_m(x)V_m(\xi)\end{aligned}\right\} \tag{5.65}$$

gdzie $V_m(x)$, $V_m(\xi)$ są funkcjami własnymi zagadnienia granicznego (4.4). Niech

$$K_f(x,\xi,t,\tau) = K_\eta(x,\xi,t,\tau)$$

i

$$\lim_{t\to\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[G_{11}(x,\xi_1,t,\tau)+G_{12}(x,\xi_1,t,\tau)K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau\right. =$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m^1+A_m^2)V_m(x)V_m(\xi) \tag{5.66}$$

$$\lim_{t\to\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[G_{12}(x,\xi_1,t,\tau)+G_{22}(x,\xi_1,t,\tau)\right]K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau =$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m^2+B_m^2)V_m(x)V_m(\xi) \tag{5.67}$$

$$\lim_{t\to\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[G_{22}(x,\xi_1,t,\tau)+G_{21}(x,\xi_1,t,\tau)\right]K_f(\xi,\xi_1,t,\tau)d\xi_1 d\tau =$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(B_m^1+B_m^2)V_m(x)V_m(\xi) \tag{5.68}$$

Nieznane współczynniki α_m, β_m i a_m, b_m, c_m wyznaczane będę z następujących układów równań:

$$\left.\begin{aligned}a_m &= A_m^1\alpha_m + A_m^2\beta_m\\ b_m &= B_m^1\alpha_m + B_m^2\beta_m\end{aligned}\right\} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}
&a_m + b_m - \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}S_{mpq}\alpha_p(a_q+b_q) + A_m^1 + A_m^2 -\\
&-2\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}S_{mpq}\beta_p(A_q^1\alpha_q + A_q^2\beta_q) = 0\\
&c_m - 2na_m - \omega_m^2 b_m - \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}b_p S_{mpq}(\alpha_q\beta_q) + B_m^1 + B_m^2 -\\
&-\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}S_{mpq}\alpha_p(A_q^2\beta_q + B_q^2\alpha_q) -\\
&-\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}S_{mpq}\beta_p(A_q^1\alpha_q + A_q^2\beta_q) = 0\\
&-2\omega_m^2 b_m - 2nc_m - \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}S_{mpq}\beta_p(b_q+c_q) + A_m^2 + B_m^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.70}$$

gdzie

$$S_{mpq} = \int_\Omega V_m(x)V_p(x)V_q(x)dx$$

$$\omega_m^2 = \int_\Omega \tilde{L}_x V_m(x)V_m(x)dx$$

W równaniach tych pominięto te człony, przy których występował mały parametr ε z kwadratową potęgą. Układ równań (5.70) rozwiążemy stosując metodę perturbacji. W tym celu współczynniki $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ i $\{c_m\}$ przedstawimy w postaci rozwinięć wg małego parametru ε:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= a_m^0 + \varepsilon a_m^1 + \dots \\ b_m &= b_m^0 + \varepsilon b_m^1 + \dots \\ c_m &= c_m + \varepsilon c_m^1 + \dots \end{aligned}\right\} \tag{5.71}$$

Podstawiając te rozwinięcia do równań (5.70) i porównując stronami wyrazy przy tych samych potęgach małego parametru ε, otrzymamy następujące układy rekurencyjnych równań, z których wyznaczone mogą być współczynniki $\{a_m^0\}$, $\{b_m^0\}$, $\{c_m^0\}$, $\{a_m^1\}$, $\{b_m^1\}$, $\{c_m^1\}$ ...

$$\left.\begin{aligned} & a_m^0 + b_m^0 + A_m^1 + A_m^2 = 0 \\ & c_m^0 - 2na_m^0 - \omega_m^2 b_m + A_m^1 + B_m^2 = 0 \\ & -2\omega_m^2 b_m^0 - 4nc_m^0 + B_m^1 + B_m^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.72}$$

$$\left.\begin{aligned} & a_m^1 + b_m^1 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\alpha_p(a_q^0 + b_q^0) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\alpha_p(A_q^1\alpha_q + A_q^2\beta_q) \\ & c_m^1 - 2na_m^1 - \omega_m^2 b_m^1 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}b_p^0(\alpha_q - \beta_q) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\alpha_p(A_q^2\beta_q + B_q^2\alpha_q) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\beta_q(A_q^1\alpha_q + A_q^2\beta_q) - \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} & - 2\omega_m^2 b_m^1 - 4nc_m^1 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\beta_q(b_q^0 + c_q^0) \end{aligned}\right\} \tag{5.72}$$

itd.

gdzie współczynniki α_m i β_m wyrażały się w funkcji współczynników a_m i b_m za pomocą wzorów:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{a_m B_m^2 - b_m A_m^2}{A_m^1 B_m^2 - A_m^2 B_m^1}\,\varepsilon \\ \beta_m &= \frac{b_m A_m^1 - a_m B_m^1}{A_m^1 B_m^2 - A_m^2 B_m^1}\,\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{5.73}$$

Po rozwiązaniu układów (5.61) i (5.62) uzyskamy poszukiwane sterowania $\bar{\varphi}_1(x)$ i $\bar{\varphi}_2(x)$, które zadane będą w postaci kombinacji liniowych (5.64). Sterowania te podstawimy do równań filtru (5.26).

Rozwiązanie równań filtru (5.26) można łatwo poszukiwać metodą perturbacji. Wtedy

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_1(x,t) &= y_1(x,t) + \varepsilon\,\bar{y}_1(x,t) \\ \tilde{y}_2(x,t) &= y_2(x,t) + \varepsilon\,\bar{y}_2(x,t) \end{aligned}\right\} \tag{5.74}$$

gdzie $y_1(x,t)$, $y_2(x,t)$ i $\bar{y}_1(x,t)$, $\bar{y}_2(x,t)$ wyznacza się z następującego układu równań:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,y_1(x,t) &= y_2(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\,y_2(x,t) &= -\tilde{L}y_1(x,t) - 2ny_2(x,t) \end{aligned}\right\} \tag{5.75}$$

i

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,\bar{y}_1(x,t) &= \bar{y}_2(x,t) + \varepsilon\,\bar{\varphi}_1(x)\left[z(x,t) - \bar{y}_1(x,t)\right] \\ \frac{\partial}{\partial t}\,\bar{y}_2(x,t) &= -\tilde{L}\bar{y}_1(x,t) + \varepsilon\,\bar{\varphi}_2(x)\left[z(x,t) - y_1(x,t)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.76}$$

Biorąc pod uwagę, że $y_1(x,t) = u(x,t) = 0$, mamy, że $y_2(x,t) = 0$ i $z(x,t) = \eta(x,t,\vartheta)$.

Stąd

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\,\bar{y}_1(x,t) &= \bar{y}_2(x,t) + \varepsilon\,\bar{\varphi}_1(x)\eta(x,t,\vartheta)\\ \frac{\partial}{\partial t}\,\bar{y}_2(x,t) &= -\tilde{L}\bar{y}_1(x,t) + \varepsilon\,\bar{\varphi}_2(x)\eta(x,t,\vartheta)\end{aligned}\right\} \tag{5.77}$$

i

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_1(x,t) &= \varepsilon\,\bar{y}_1(x,t)\\ \bar{y}_2(x,t) &= \varepsilon\,\bar{y}_2(x,t)\end{aligned}\right\} \tag{5.78}$$

Do rozwiązania układu równań (5.77) zastosujemy metodę Ritza-Galerkina. W tym celu rozwiązanie $\bar{y}_1(x,t)$ i $\bar{y}_2(x,t)$ przedstawimy w postaci kombinacji liniowych:

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_1(x,t) &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m(t)V_m(x)\\ \bar{y}_2(x,t) &= \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t)V_m(x)\end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

gdzie $V_m(x)$ są funkcjami własnymi zagadnienia granicznego. Nieznane funkcje $d_m(t)$ i $g_m(t)$ wyznaczane będą z następujących układów równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d}{dt}\,d_m(t) = g_m(t) + \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p R_{pm}(t,\vartheta) \tag{5.80}$$

$$\frac{d}{dt}\,g_m(t) = -\omega_m^2 g_m(t) + \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\beta_p R_{pm}(t,\vartheta) \tag{5.81}$$

gdzie

$$R_{pm}(t,\vartheta) = \int_{\Omega}\eta(x,t,\vartheta)V_p(x)V_m(x)dx$$

Jeśli układ równań (5.80) zróżniczkujemy po czasie, to otrzymamy:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,d_m(t) = \frac{d}{dt}\,g_m(t) + \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p\frac{d}{dt}\,R_{pm}(t,\vartheta) \tag{5.82}$$

lub

$$\frac{d}{dt}\,g_m(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,d_m(t) - \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p\frac{d}{dt}\,R_{pm}(t,\vartheta) \tag{5.83}$$

Różniczkując po czasie równanie (5.81) i wstawiając w nie wyrażenie (5.83), otrzymamy układ równań:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,d_m(t) + 2n\frac{d}{dt}\,d_m(t) + \omega_m^2 d_m(t) =$$

$$= \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}(2n\alpha_p+\beta_p)R_{pm}(t,\vartheta) + \varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p\frac{d}{dt}\,R_{pm}(t,\vartheta) \tag{5.84}$$

Stąd

$$d_m(t) = \varepsilon\int_0^t\frac{1}{p_m}\,e^{-n(t-\tau)}\sin p_m(t-\tau)\sum_{p=0}^{\infty}\Big[(2n\alpha_p+\beta_p)R_{pm}(\tau,\vartheta) + \alpha_p\frac{d}{d\tau}\,R_{pm}(\tau,\vartheta)\Big]d\tau \tag{5.85}$$

gdzie

$$p_m = \sqrt{\omega_m^2 - n^2}$$

6. OPTYMALNE FILTROWANIE ZAKŁÓCEŃ LOSOWYCH WYSTEPUJĄCYCH W OGRANICZONYM OBSZARZE

6.1. Sformułowanie problemu

W zagadnieniach estymacji, czyli oszacowania parametrów stanu układów dynamicznych w obecności zakłóceń losowych bardzo często istnieją duże trudności wyznaczania charakterystyk statystycznych tych zakłóceń. Zastosowanie metod klasycznej teorii filtrowania w sensie Kalmana staje się wtedy trudne lub wręcz niemożliwe. Dość łatwo natomiast oszacować obszar, w którym te zakłócenia występują. Informacje te mogą być wykorzystane do konstrukcji tzw. minimaksowego filtru, który pozwala oszacować estymatę optymalną w sensie średniokwadratowym, interpretowaną jako zbiór trajektorii w pewnym ograniczonym obszarze. Obszar ten zwany jest obszarem informacyjnym. Szersze omówienie teorii minimaksowego filtrowania można znaleźć w podstawowych pracach Schweppego ([34]) i Kurżańskiego ([18]). W prezentowanym rozdziale teoria ta została zastosowana do badania drgań układów o stałych rozłożonych opisanych przez pewną klasę równań różniczkowych cząstkowych w obecności zakłóceń losowych. Zastosowaniem teorii minimaksowego filtrowania do układów o stałych rozłożonych zajmowali się K. Lee ([24]) i A.J. Hapałow ([11]). W pracach swoich analizowali oni układy opisane przez równania paraboliczne typu przewodnictwa cieplnego z pierwszą pochodną względem czasu. W przypadku zastosowania minimaksowego filtru do badania drgań układów o stałych rozłożonych, np. prętów, płyt i powłok zachodzi konieczność rozpatrywania równań różniczkowych cząstkowych z drugą pochodną względem czasu t. Przypadek ten został przeanalizowany w niniejszym rozdziale. W modelu filtru minimaksowego nie występują takie pojęcia, jak wartość "najbardziej prawdopodobne" lub "najbardziej wierygodna", lecz zawsze z całą pewnością wiadomo, że wartość prawdziwa leży gdzieś w obrębie jakiegoś zbioru. Tę przynależność wartości do pewnego zbioru wypukłego wygodnie jest opisywać za pomocą nierówności uzyskiwanych za pomocą tzw. funkcjonałów podpierających zbiory.

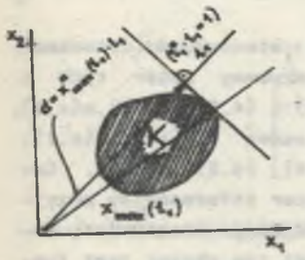
Definicja 19: ([18], [34]). Niech K jest niepustym zbiorem w lokalnie wypukłej przestrzeni topologicznej X. Funkcjonałem podpierającym K nazywamy odwzorowanie

$$\rho((\cdot)|K): Y \longrightarrow R^1,$$

gdzie $Y = X^*$ jest lokalnie wypukłą przestrzenią topologiczną, takie że

$$\rho(l/K) = \sup\left\{ <x,l> \middle| x \in K \subseteq X \right\}, \quad l \in Y.$$

Powyższą relację można zinterpretować geometrycznie.



Niech wektor x będzie elementem zbioru K. Funkcjonał podpierający $\rho(l/K)$ w myśl definicji będzie miał postać:

$$\left.\begin{array}{l} \rho(l/K) = \sup\limits_{x \in K}\{x^* l\} \\ l^* l = 1 \end{array}\right\}$$

* - oznaczać będzie transpozycję wektora.

Przyjmijmy ustalone l, powiedzmy $l = l_1$. Wprowadźmy hiperpłaszczyznę określoną przez wektor normalny l_1 o długości $l_1^* l_1 = 1$ i znajdującą się w odległości $d = (l_1/K)$ od początku układu współrzędnych. d jest oczywiście najmniejszą odległością punktu hiperpłaszczyzny od początku układu współrzędnych.

Wektor $x_{max}(l_1)$ jest takim wektorem ze zbioru K, którego rzut na kierunek wyznaczony wektorem l_1 jest największy. Zatem hiperpłaszczyzna dotyka brzegu zbioru K w punkcie $x_{max}(l_1)$ i dlatego nazywa się hiperpłaszczyzną podpierającą. Tak więc, gdy zmienia się kierunek wektora l, hiperpłaszczyzny podpierające "ślizgają się" po brzegu zbioru K. Wykorzystując pojęcie funkcjonału podpierającego można wypukły i domknięty zbiór K opisać w postaci nierówności. Niech K jest wypukłym, domkniętym zbiorem w X. Wtedy dla elementu $x_1 \in X$ fakt przynależności $x_1 \in K$ okazuje się równoważny istnieniu nierówności:

$$<x_1, l> \leq \rho(l/K) \quad \text{dla dowolnego} \quad l \in Y \qquad (6.1)$$

W przypadku filtru minimaksowego estymata optymalna jest zdefiniowana jako pewien zbiór trajektorii należących do pewnego ograniczonego obszaru zwanego obszarem informacyjnym. Obszar ten będzie opisywany właśnie za pomocą funkcjonałów podpierających.

Założymy, że układy dynamiczne o stałych rozłożonych są opisane przez takie same równania różniczkowe cząstkowe wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi (patrz § 4, równania (4.1), (4.4), (4.8), (4.2), (4.3)).

Założymy dalej, że obserwacje stanu układu prowadzona jest w obecności zakłóceń losowych $\eta(x,t)$, czyli:

$$z(x,t) = u(x,t) + \eta(x,t) \qquad (6.2$$

lub macierzowo

$$\mathcal{Y}(x,t) = \mathcal{C}\, y(x,t) + s(x,t) \qquad (6.3)$$

gdzie

$$\vec{\varphi}(x,t) = \begin{bmatrix} z(x,t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s(x,t) = \begin{bmatrix} \eta(x,t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definicja 20: Obszarem informacyjnym $X(\tau,z(\cdot))$ stanu układu dynamicznego, związanym z obserwowanym sygnałem $z(x,\tau)$, nazywamy zbiór tych i tylko tych stanów układu (4.1), (4.4), (4.7), (4.8) i (4.2), (4.3), $u(x,\tau)$, dla każdego z których znajdują się takie funkcje losowe $f(x,t)$ i $\eta(x,t)$, że spełnione będą relacje (4.1), (4.4), (4.7), (4.8), (4.2) i (4.3). Celem uproszczenia analizy numerycznej problemu, obszar informacyjny przyjmuje się z góry w postaci pewnej elipsoidy, zawierającej rzeczywisty obszar informacyjny. Środkiem elipsoidy ograniczającej ten obszar jest funkcja $\vec{v}(\cdot) \in X(\tau,z(\cdot))$, a sama elipsoida jest estymatą, która stanowi więc pewien zbiór trajektorii. Jest to wtedy estymata minimaksowa, gdyż minimalizuje maksymalny błąd między zbiorem trajektorii w elipsoidzie a zbiorem trajektorii stanowiących rzeczywistą estymatę $\vec{\varphi}(\cdot)$. Jakkolwiek w rzeczywistości estymata jest zbiorem trajektorii, to jednak często interpretuje się ją jako trajektorię przechodzącą przez środki elipsoid.

Definicja 21: Estymatą (oszacowaniem) $\vec{v}(x,\tau)$ zmiennej stanu $u(x,\tau)$ nazywamy funkcję, które spełnia kryterium:

$$\bigwedge_{w(\cdot),p(\cdot)\in X(\tau,z(\cdot))} \delta = \max_{w} \|w(\cdot) - \vec{v}(\tau,(\cdot))\|_{L^2(\Omega)} = \min_{p(\cdot)} \max_{w(\cdot)} \|w(\cdot)-p(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.4}$$

Obszar informacyjny $X(\tau,z(\cdot))$ jest w tym przypadku elipsoidą, której środek opisywany jest przez estymatę $\vec{v}(\tau,(\cdot)) = \vec{v}_1(\tau,(\cdot))$. Modele filtru minimaksowego pozwalają otrzymać estymatę, która w istocie rzeczy jest zbiorem. Żadnej konkretnej trajektorii leżącej w tym zbiorze nie można z większym niż dla innej trajektorii prawdopodobieństwem uważać ze szukaną estymatę. Stosowanie zbiorów elipsoidalnych mało uwypukla fakt, że estymata ma postać zbioru, gdyż środki elipsoid tworzą naturalną trajektorię i dla prostoty rozważań środki te $\vec{v}(\cdot)$ nazywa się zwykle estymatą.

Załóżmy obecnie, że pola losowe $f(x,t)$ i $\eta(x,t)$ są zupełnie niezidentyfikowane i tylko jest znany obszar ich dopuszczalnych wartości, określony przez nierówność:

$$\int_0^{\tau}\left[f(x,t)q(x,\xi,t)f(\xi,t) + k^2\eta(x,t)r(x,\xi,t)\eta(\xi,t)\right]dt \le \mu(x,\xi,\tau) \le \vec{\mu} \qquad x,\xi \in \Omega \subset R^n, \quad t \in R_+^1 \tag{6.5}$$

lub w postaci macierzowej

$$\int_0^{\tau}\left[q^*(x,t)Q(x,\xi,t)q(\xi,t) + k^2 s^*(x,t)R(x,\xi,t)s(\xi,t)\right]dt \le \mu^2(x,\xi,\tau) \le \vec{\mu} \tag{6.6}$$

gdzie k, $\vec{\mu}$ pewne stałe dodatnie, a macierze

$$Q(x,\xi,t) = \begin{bmatrix} q(x,\xi,t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R(x,\xi,t) = \begin{bmatrix} r(x,\xi,t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.2. Model optymalnego minimaksowego filtru

Model optymalnego minimaksowego filtru sformułujemy w postaci następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 4

1. Optymalne oszacowanie (estymata) $\vec{v}(x,\tau) = \vec{v}_1(x,\tau)$ rozwiązania równanie (4.4) wraz z warunkami brzegowymi (4.2) i początkowymi (4.3), w przypadku gdy pola losowe $f(x,t)$ i $\eta(x,t)$ są zupełnie niezidentyfikowane i tylko znany jest obszar ich dopuszczalnych wartości określony przez nierówność:

$$\int_0^{\tau}\left[f(x,t)q(x,\xi,t)f(\xi,t) + k^2\eta(x,t)r(x,\xi,t)\eta(\xi,t)\right]dt \le \mu(x,\xi,\tau) \le \vec{\mu},$$

przy czym obserwacja rozwiązania równania stanu (4.4) zachodzi w obecności zakłóceń losowych $\eta(x,t)$ w całym obszarze Ω, czyli

$$z(x,\tau) = u(x,\tau) + \eta(x,\tau),$$

jest opisane przez równania filtru o postaci:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{v}_1(x,\tau) &= \vec{v}_2(x,\tau) + k^2\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{11}(x,\xi_1,\tau)}{r(\xi_1,\xi_2,\tau)}\left[z(\xi_2,\tau) - \vec{v}_1(\xi_2,\tau)\right]d\xi_1 d\xi_2 \\ \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{v}_2(x,\tau) &= -\vec{L}\vec{v}_1(x,\tau) - 2n\vec{v}_2(x,\tau) + \\ &\quad + k^2\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{P_{21}(x,\xi_1,\tau)}{r(\xi_1,\xi_2,\tau)}\left[z(\xi_2,\tau) - \vec{v}_1(\xi_2,\tau)\right]d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

wraz z warunkami brzegowymi:

$$\bigwedge_{1\leq j\leq m} B_j \hat{y}_1(x,\tau)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \bigwedge_{1\leq j\leq m} B_j \hat{y}_2(x,\tau)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.8}$$

i warunkami początkowymi:

$$\hat{y}_1(x,0) = \hat{y}_2(x,0) = 0 \tag{6.9}$$

przy czym

$$\hat{u}(x,\tau) = \hat{y}_1(x,\tau).$$

2. Nieznane operatory $P_{ik}(x,\xi,\tau)$, $i,k = 1,2$ występujące w równaniach filtru można wyznaczyć z następującego układu równań różniczkowo-całkowych:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau} P_{11}(x,\xi,\tau) = 2P_{21}(x,\xi,\tau) - k^2\int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{11}(x,\xi_1,\tau)P_{11}(\xi,\xi_2,\tau)}{r(\xi_1,\xi_2,\tau)}\,d\xi_1 d\xi_2\\
&\frac{\partial}{\partial\tau} P_{21}(x,\xi,\tau) = P_{22}(x,\xi,\tau) - \tilde{L}_x P_{11}(x,\xi,\tau) - 2nP_{21}(x,\xi,\tau) -\\
&\qquad - k^2\int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{11}(x,\xi_1,\tau)P_{21}(\xi,\xi_2,\tau)}{r(\xi_1,\xi_2,\tau)}\,d\xi_1 d\xi_2\\
&\frac{\partial}{\partial\tau} P_{22}(x,\xi,\tau) = -\tilde{L}_x P_{21}(x,\xi,\tau) - \tilde{L}_\xi P_{21}(x,\xi,\tau) - 2nP_{22}(x,\xi,\tau) -\\
&\qquad - k^2\int_\Omega\int_\Omega \frac{P_{21}(x,\xi_1,\tau)P_{21}(\xi,\xi_2,\tau)}{r(\xi_1,\xi_2,\tau)}\,d\xi_1 d\xi_2 + \frac{q(x,\xi,\tau)}{a_0^2}
\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

wraz z warunkami brzegowymi:

$$\bigwedge_{1\leq j\leq m}\left\{\begin{aligned}
&B_j P_{11}(x,\xi,\tau)\Big|_{\partial\Omega} = 0\\
&B_j P_{21}(x,\xi,\tau)\Big|_{\partial\Omega} = 0\\
&B_j P_{22}(x,\xi,\tau)\Big|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}\right. \tag{6.9}$$

i warunkami początkowymi:

$$P_{11}(x,\xi,0) = P_{21}(x,\xi,0) = P_{22}(x,\xi,0) = 0 \tag{6.10}$$

W naszych rozważaniach przyjmujemy, że obszar informacyjny $X(\tau,z(\cdot))$ jest elipsoidą, której środek stanowi optymalne oszacowanie w sensie średniokwadratowym zmiennej stanu $\hat{y}_1(x,t)$, czyli jest estymatą.
Długość największej półosi tej elipsoidy wyraża się wzorem:

$$\lambda_1(x,\xi,\tau) = \sqrt{\left[\mu(x,\xi,\tau) - h^2(x,\xi,\tau)\right]}\,\vartheta_1, \tag{6.11}$$

gdzie ϑ_1 jest maksymalną wartością własną dodatnio określonej macierzy $\left\{P_{ik}(x,\xi,\tau)\right\}$, a $h^2(x,\xi,\tau)$ jest funkcją spełniającą równanie:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} h^2(x,\xi,\tau) = k^2\left[z(\xi,\tau) - \hat{y}_1(\xi,\tau)\right] r(x,\xi,\tau)\left[z(x,\tau) - \hat{y}_1(x,\tau)\right] \tag{6.12}$$

Jeśli $\mu(x,\xi,\tau) = h^2(x,\xi,\tau)$, to wtedy elipsoida redukuje się do punktu $\hat{y}_1(x,\tau)$.

D o w ó d

Zastosujemy znaną procedurę, którą opisano szczegółowo w pracy [18]. Najpierw znajdziemy w przestrzeni Hilberta $H = L^2(\Omega)$ opis obszaru informacyjnego $x(\tau,z(\cdot))$ w terminach funkcjonałów podpierających, a dalej wychodząc z warunku (4.8) wyznaczymy estymatę $\hat{y}(x,\tau)$ układu równań (4.8). Rozwiązanie równania (4.8) ma postać:

$$y(x,\tau) = \int_0^\tau\int_\Omega \psi(x,\xi,t,\tau)g(\xi,t)\,d\xi\,dt, \tag{6.13}$$

gdzie $\psi(x,\xi,t,\tau)$ jest funkcją Greena równania (4.8). Niech

$$Q = ((0,\tau);H), \qquad H = L^2(\Omega)$$

Przepiszemy równanie (4.8) i powyższe rozwiązanie w postaci operatorowej:

$$y(\tau,\cdot) = Tg(x,\tau), \qquad T: L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q)$$

$$\psi(\tau,\cdot) = T_0 g(x,\tau) + s(\cdot), \qquad T_0: L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q)$$

Łatwo zauważyć, że operatory T i T_0 są liniowe i ciągłe. Wprowadzimy oznaczenia: $T_1 = T \times O$, $T_2 = T_0 \times I$ (I - operator identycznościowy, O - operator zerowy na $L^2(Q)$, $w(\cdot) = \left\{g(\cdot), s(\cdot)\right\}$). Wtedy ograniczenia całkowe (6.6) można zapisać w postaci

$$w(\cdot) \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

Z definicji zbioru informacyjnego $X(\tau,\vartheta(\cdot))$ wynika, że element $y(\tau,\cdot) \in X(\tau,\vartheta(\cdot))$, gdy spełniony jest układ następujących równań operatorowych:

$$y(\tau,\cdot) = T_1 w(\cdot), \quad \vartheta(\cdot) = T_2 w(\cdot), \quad w(\cdot) \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega))$$

lub też zgodnie z twierdzeniem 3.1 z ([18]) dla dowolnych $l \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in L^2((0,T);\, L^2(\Omega))$ spełniona jest nierówność:

$$\min\left\{ <T_1^+ l(\cdot) + T_2^+ \lambda(\cdot),\, w(\cdot)> \,\middle|\, w(\cdot) \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega)) \right\} - $$

$$-<\lambda(\cdot),\, \vartheta(\cdot)> \leqslant l(\cdot),\, y(\tau,\cdot)> \qquad (6.14)$$

$<(\cdot),\,(\cdot)>$ oznacza iloczyn skalarny w odpowiednich przestrzeniach Hilberta, a znak + - oznacza operator lub funkcjonał sprzężony. Stąd na podstawie (6.14) (patrz [18], § 13) otrzymamy następującę relację na funkcjonał podpierający obszar informacyjny $X(\tau,\vartheta(\cdot))$:

$$\rho(l(\cdot)\,|\,X(\tau,\vartheta(\cdot))) = \inf\left\{ \int_0^\tau <\vartheta(t),\, \lambda(t)>_H \, dt + \right.$$

$$+ \mu\left[e^2(\tau,\tau) - 2\int_0^\tau <\lambda(t),\, f(t,\tau)>_H \, dt + \right.$$

$$+ \int_0^\tau\int_0^\tau <K(t,\tau_1)\lambda(\tau_1),\, \lambda(t)>_H \, dt d\tau_1 + $$

$$\left.\left. + \frac{1}{k^2}\int_0^\tau <R^{-1}(t)\lambda(t),\, \lambda(t)>_H \, dt \right]^{1/2} \right\} \qquad (6.15)$$

gdzie

$$e^2(\tau,\tau) = \int_\Omega\int_\Omega\int_\Omega \left[\left[\mathcal{G}(\xi,\xi_1,t,\tau)l(\xi)\right]^* Q^{-1}(x,\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)l(\xi_r)\right] d\xi_1 d\xi dx$$

$$<\vartheta(t),\, \lambda(t)>_H = \int_\Omega\int_\Omega \lambda^*(\xi,t)\vartheta(x,t)\,dx\,d\xi$$

$$<\mathcal{H}(t),\, f(\tau,t)>_H = \int_\Omega\int_\Omega\int_\Omega \left\{\left[\left[\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)l(\xi)\right]^* Q^{-1}(x,\xi,\tau)\right. \times$$

$$\left. \times\, \mathcal{G}(\xi,\xi_1,t,\tau)l(\xi_1)\right\}^* \lambda(x,t)\,d\xi_1 d\xi dx$$

$$<K(t,\tau_1)\lambda(\tau_1),\, \lambda(t)>_H =$$

$$= \int_\Omega\int_\Omega\int_\Omega \lambda^*(\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t,\tau)Q^{-1}(x,\xi_1,t)\,\mathcal{G}^*(\xi,\xi_1,t,\tau)\lambda(x,t)\,d\xi_1 d\xi dx$$

$$<R^{-1}(t)\lambda(t),\, \lambda(t)>_H = \int_\Omega\int_\Omega \lambda^*(\xi,t)R^{-1}(x,\xi,\tau)\lambda(x,\tau)\,d\xi dx$$

Rozważymy bardziej szczegółowo macierz $K(t,\tau)$. Uwzględniając relacje (4.4), (6.13), można pokazać, że macierz ta jest symetryczna względem t,τ, nieujemnie określona i ciągła względem zbioru zmiennych w obszarze $[0,\tau] \times [0,\tau]$ dla dowolnego dodatniego τ.

Oznaczmy

$$<h_1(\cdot),\, h_2(\cdot)>_K = \int_0^\tau\int_0^\tau <K(t,\tau)h_2(\tau),\, h_1(\tau)>_H dt d\tau +$$

$$+ \frac{1}{k^2}\int_0^\tau <R^{-1}(t)h_2(t),\, h_1(t)>_H \, dt$$

dla każdego $h_1(t), h_2(t) \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega))$.

Macierz $K(t,\tau)$ jest nieujemnym jądrem następującego układu równań całkowych Fredholma II rodzaju, które jak wiadomo mają jednoznaczne rozwiązanie w $L^2(0,T;\, L^2(\Omega))$: ([23])

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\tau K(t,\tau)d(\tau,\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{k^2}R^{-1}(t)d(\tau,t) = f(\tau,t) \\ &\int_0^\tau K(t,\tau)\vartheta^+(\tau,\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{k^2}R^{-1}(t)\vartheta^+(\tau,t) = \vartheta^+(t) \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

Argument τ w funkcjach $d(\tau,t), \vartheta^+(\tau,t)$ pokazuje, że rozwiązania równań (6.16) rozpatruje się na odcinku $[0,\tau]$. Zapiszemy teraz prawę stronę relacji (6.15) w postaci:

$$\rho(l(\cdot)\,|\,X(\tau,\vartheta(\cdot))) = \inf_{\lambda(t)\in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \left\{ <\lambda(\cdot),\, \vartheta^+(\tau,\cdot)>_K + \right.$$

$$\left. + \mu\left[<\lambda(\cdot) - d(\tau,\cdot),\, \lambda(\cdot) - d(\tau,\,\cdot)>_K + \varkappa^2(\tau)\right]^{1/2} \right\}$$

$$\varkappa^2(\tau) = e^2(\tau) - <d(\tau,\cdot),\, d(\tau,\cdot)>_K \qquad (6.17)$$

gdzie $\varkappa^2(\tau) \geqslant 0$, co wynika z budowy wyrażenia pod pierwiastkiem w (6.15), które określono dla dowolnej funkcji $\lambda(t)$ z $L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Wyliczając dolną granicę w (6.15) (patrz [18], § 13) ostatecznie otrzymamy:

$$\rho\left(l(\cdot)\middle| X(\tau,\vartheta(\cdot))\right) = \varkappa(\tau)\left[\mu^2 - \langle \vartheta^+(\tau,\cdot), \vartheta^+(\tau,\cdot)\rangle_K\right]^{1/2} + \langle \vartheta^+(\tau,\cdot), d(\tau,\cdot)\rangle_K$$

Przyjmiemy oznaczenia

$$h^2(\tau) = \langle \vartheta^+(\tau,\cdot), \vartheta^+(\tau,\cdot)\rangle_K = \int_0^\tau \langle \vartheta(t), \vartheta(t)\rangle_H \, dt$$

$$p(x,\xi,t) = \iint_{0\Omega}^{\tau} g^*(x,\xi_1,t,\tau) Q(\xi,\xi_1,t) g(\xi,\xi_1,t,\tau) d\xi_1 dt - \int_0^\tau \langle f(\tau,t), d(\tau,t)\rangle_H \, dt \qquad (6.18)$$

$$\bar{v}(x,\tau) = \int_0^{\tilde{\tau}} \langle f(\tilde{\tau},t), \vartheta^*(\tilde{\tau},t)\rangle dt = \int_0^{\tilde{\tau}} \langle d(\tilde{\tau},t), \vartheta^*(t)\rangle dt = \langle \vartheta^+(\tilde{\tau},\cdot), d(\tilde{\tau},\cdot)\rangle_K$$

Wtedy z formuły (6.17) wynika, że

$$\rho\left(l(\cdot)\middle| X(\tau,\vartheta(\cdot))\right) = \left\{\iint_{\Omega\Omega} l^*(x) p(x,\xi,\tau) l(\xi) dx d\xi\right\}^{1/2} \times \left[\left(\mu^2 - h^2(\tau)\right)\right]^{1/2} + \int_\Omega l(x)\, \bar{v}(x,\tau) dx$$

Wiadomo, że ([33]) zbiór z funkcjonałem podpierającym stanowi elipsoidę ze środkiem w punkcie $\bar{v}(x,\tau)$.

Wyprowadzimy obecnie równania dynamiki obszaru informacyjnego $x(\tau,\vartheta(\cdot))$, a konkretnie równania dynamiki dla funkcji $p(x,\xi,\tau)$, $\bar{v}(x,\tau)$ i $h^2(x,\xi,\tau)$ określających ewolucję obszaru $X(\tau,\vartheta(\cdot))$. W tym celu dokonamy szeregu przekształceń, których słuszność wykażemy dalej.

Wprowadzimy pomocniczą funkcję $B(x,\xi,\tau)$ wg wzoru:

$$B(x,\xi,\tau) = \langle d(\cdot,x,\tau), d(\cdot,\xi,\tau)\rangle_K \qquad (6.19)$$

Dalej, różniczkując funkcję $B(x,\xi,\tau)$ względem τ i biorąc pod uwagę (6.14) i (6.19), a także równości:

$$f(\tau,t,x) = \iint_{\Omega\Omega} g^*(x,\xi,t,\tau) Q^{-1}(x,\xi,t) g(\xi,\xi_1,t,\tau) d\xi d\xi_1$$

$$f(\tau,t) = \int_\Omega l(x,\tau) f(x,t,\tau) dx$$

$$d(\tau,t) = \int_\Omega l(x,\tau) d(x,t,\tau) dx$$

$$\int_0^\tau K(t,\tau) d(x,t,\tau) = \iint_{0\Omega}^{\tau} f(t,x,\xi) \mathcal{C}^* d(x,t,\tau) d\xi dt = \int_\Omega B(x,\xi,\tau) d\xi$$

dla funkcji $B(x,\xi,\tau)$ otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} B(x,\xi,\tau) = \mathcal{A}_x B(x,\xi,\tau) + B(x,\xi,\tau)\mathcal{A}_\xi^* + k^2 \iint_{\Omega\Omega} \left[f(\tau,\tau,\xi_1) - \mathcal{C}B(x,\xi_1,\tau)\right]^* R(\xi_1,\xi_2,\tau) \times \left[f(\tau,\tau,\xi_2) - \mathcal{C}B(\xi,\xi_2,\tau)\right] d\xi_1 d\xi_2 \qquad (6.20)$$

Ze wzoru (6.18) mamy, że

$$p(x,\xi,\tau) = \int_0^\tau \int_0^\tau g^*(x,\xi_1,t,\tau) Q^{-1}(x,\xi,t) g(\xi,\xi_1,t,\tau) d\xi_1 dt - B(x,\xi,\tau) \qquad (6.21)$$

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial\tau} p(x,\xi,\tau) = \mathcal{A}_x p(x,\xi,\tau) + p(x,\xi,\tau)\mathcal{A}_\xi^* - k^2 \iint_{\Omega\Omega} p(x,\xi_1,\tau)\mathcal{C}^* R^{-1}(\xi_1,\xi_2,\tau)\mathcal{C}\, p(\xi,\xi_2,\tau) d\xi_1 d\xi_2 + Q(x,\xi,\tau) \qquad (6.22)$$

Analogicznie można wyprowadzić równania dla funkcji $\bar{v}(x,\tau)$ i $h^2(x,\xi,\tau)$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \bar{v}(x,\tau) = \mathcal{A}_x \bar{v}(x,\tau) + k^2 \iint_{\Omega\Omega} p(x,\xi_1,\tau)\mathcal{C}^* R^{-1}(\xi_1,\xi_2,\tau) \times \left[\vartheta(\xi_2,\tau) - \mathcal{C}\bar{v}(\xi_2,\tau)\right] d\xi_1 d\xi_2 \qquad (6.23)$$

1

$$\frac{\partial}{\partial\tau} h^2(x,\xi,\tau) = k^2\left[\vartheta(x,\tau) - \mathcal{C}\,\bar{v}(x,\tau)\right]^* R(x,\xi,\tau)\left[\vartheta(\xi,\tau) - \mathcal{C}\,\bar{v}(\xi,\tau)\right] \qquad (6.24)$$

Równania te po rozpisaniu do postaci skalarnej przyjmują postać układu podanego w tezie. Mają one postać analogiczną do równań filtru w przypadku działania zakłóceń o charakterze "białych szumów", jednak interpretacja wyników uzyskanych przez ich rozwiązanie jest zupełnie inna, niż to miało miejsce w tamtym przypadku. Obecnie estymata nie jest jakąś jedną optymalną w sensie średniokwadratowym trajektorią, tylko jest trajektorią przechodzącą przez środki elipsoid zawierających zbiór optymalnych trajektorii. Parametry tej elipsoidy, a konkretnie maksymalną jej półoś, można wyznaczyć rozwiązując dodatkowe rownanie (6.24) i wykorzystując wzór (6.11).

6.3. Wyznaczanie estymaty i obszaru jej występowania

Estymata, jak już powiedziano, jest w tym przypadku zbiorem trajektorii należących do pewnej elipsoidy. Środek tej elipsoidy $\bar{v}_1(x,t) = \bar{u}(x,t)$ opisują równania (6.7). Ponieważ mają one postać identyczną jak w przypadku filtru sformułowanego dla orzypadku zakłóceń losowych o charakterze "białych szumów" (patrz § 4), więc rozwiązania tych równań otrzymane w § 4.3 dla przypadków stacjonarnych (równania (6.8) są stacjonarne) pozostają słuszne i w przypadku modelu filtru minimaksowego. Trajektoria będąca rozwiązaniem równań filtru (6.7) określa zmiany położenia środka elipsoidy zawierającej estymatę. Parametry tej elipsoidy, a konkretnie jej maksymalna półoś, może być wyznaczona ze wzoru:

$$l_1(x,\xi,t) = \sqrt{\left[\mu(x,\xi,t) - h^2(x,\xi,t)\right]\lambda_1}$$

Funkcję $h^2(x,\xi,\tau)$ można wyznaczyć całkując równanie, czyli:

$$h^2(x,\xi,\tau) = k^2\int_0^{\tau}\left[z(\xi,t) - \bar{v}_1(\xi,t)\right] r(x,\xi,t)\left[z(x,t) - \bar{v}_1(x,t)\right] dt \qquad (6.25)$$

a maksymalna wartość własną λ_1 operatora $\mathcal{P}(x,\xi,\tau)$ z relacji $\lambda_1(\tau) = \max\lambda(\tau)$ przy czym wartości λ wyznacza się z wyznacznika

$$\det\left\| \mathcal{P}v_1, v_1 > -\lambda \right\| = 0,$$

gdzie

$$< \mathcal{P}v_1, v_1 > = \iint_{\Omega\Omega} v_1^*(x,\xi)\mathcal{P}(x,\xi,\tau)v_1(x,\xi)dxd\xi$$

a $v_1(x,\xi)$ jest pierwszym wektorem własnym zagadnienia brzegowego opisanego układem równań (4.8).

W przypadku niestacjonarności równań (6.8), przy rozwiązywaniu ich trzeba posłużyć się metodami numerycznymi (np. metodą różnic skończonych). Najwygodniej najpierw zdyskretyzować zagadnienie metodą Ritza-Galerkina i sprowadzić je do układu równań różniczkowych zwyczajnych, a następnie zamienić na układ równań różnicowych, uzyskując wtedy dyskretny w czasie wariant filtru. W pewnych przypadkach można skorzystać także z metody perturbacji (patrz § 4.3).

Reasumując, rozwiązania uzyskane dla minimaksowego filtru są analogiczne jak dla klasycznego filtru w przypadku zakłóceń "białymi szumami", jednak ich interpretacja jest zupełnie inna. W przypadku bowiem filtru minimaksowego wszystkie trajektorie zawarte w optymalnej elipsoidzie są w pewnym stopniu optymalnymi estymatami stanu układu dynamicznego. Estymata jest więc wtedy zbiorem (elipsoidą) trajektorii, a nie jedną trajektorią.

7. ZASTOSOWANIE TEORII. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

7.1. Estymacja drgań prętów

Rozpatrzymy obecnie zastosowanie zaprezentowanej w poprzednich rozdziałach teorii do badania drgań konkretnych układów o stałych rozłożonych, jakimi są pręty. Najpierw badać będziemy drgania poprzeczne prętów o stałej grubości, opisanych równaniem (patrz § 2.1):

$$\rho F \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + 2n\rho F \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,t) = f(t,\gamma) \tag{7.1}$$

- przy warunkach brzegowych opisujących swobodne podparcie brzegów pręta:

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{x=0} &= u\Big|_{x=l} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\Big|_{x=0} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

- i zerowych warunkach początkowych:

$$u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \tag{7.3}$$

Założymy, że na układ działają tylko zakłócenia losowe o charakterze "białych szumów", posiadające następujące charakterystyki:

$$\left.\begin{aligned} &E\left[f(t,\gamma)\right] = 0, \quad E\left[\eta(t,\gamma)\right] = 0 \\ &E\left[f(t,\gamma) f(\tau,\gamma)\right] = q_o \delta_D(t-\tau) \\ &E\left[\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,\gamma)\frac{\partial}{\partial \tau}\eta(\tau,\gamma)\right] = r_o \delta_D(t-\tau) \\ &E\left[f(t,\gamma)\frac{\partial}{\partial \tau}\eta(\tau,\gamma)\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

gdzie q_o i r_o są pewnymi stałymi dodatnimi, charakteryzującymi poziom zakłóceń losowych.

Tak więc rozwiązanie dokładne równania stanu (7.1) (tzn. rozwiązanie, w przypadku gdy nie ma zakłóceń losowych w układzie) jest zerowe. Przeanalizujemy obecnie zachowanie się estymaty w stosunku do tego rozwiązania w

funkcji poziomu zakłóceń losowych. Równania opisujące optymalny filtr mają w tym przypadku postać (patrz § 4.2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{y}_1(x,t) &= \tilde{y}_2(x,t) + \int_0^l\int_0^l \frac{P_{11}(x,\xi_1,t)}{r_o}\left[\frac{\partial}{\partial t} z(\xi_2,t) - \tilde{y}_1(\xi_2,t)\right] d\xi_1 d\xi_2 \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{y}_2(x,t) &= -\frac{EI}{\rho F}\frac{\partial^4}{\partial x^4} y_1(x,t) - 2n y_2(x,t) + \\ &+ \int_0^l\int_0^l \frac{P_{21}(x,\xi_1,t)}{r_o}\left[\frac{\partial}{\partial t} z(\xi_2,t) - \tilde{y}_1(\xi_2,t)\right] d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

- przy warunkach brzegowych:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{y}_1\Big|_{x=0} = \tilde{y}_1\Big|_{x=l} = 0 \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}_1(x,t)\Big|_{x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}_1(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \\ &\tilde{y}_2\Big|_{x=0} = \tilde{y}_2\Big|_{x=l} = 0 \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}_2(x,t)\Big|_{x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}_2(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

i początkowych

$$\tilde{y}_1(x,0) = \tilde{y}_2(x,0) = 0 \tag{7.6}$$

a nieliniowe równania różniczkowo-całkowe typu Riccati, z których wyznacza się nieznane operatory $P_{ik}(x,\xi,t)$, $i,k = 1,2$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_{11}(x,\xi,t) &= 2P_{21}(x,\xi,t) - \int_0^{l}\int_0^{l} \frac{P_{11}(x,\xi_1,t)P_{11}(\xi,\xi_2,t)}{r_o} d\xi_1 d\xi_2 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{21}(x,\xi,t) &= P_{22}(x,\xi,t) - \frac{EI}{\rho F}\frac{\partial^4}{\partial x^4} P_{11}(x,\xi,t) - 2nP_{21}(x,\xi,t) - \\
&\quad - \int_0^{l}\int_0^{l} \frac{P_{11}(x,\xi_1,t)P_{21}(\xi,\xi_2,t)}{r_o} d\xi_1 d\xi_2 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{22}(x,\xi,t) &= -\frac{EI}{\rho F}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} P_{21}(x,\xi,t) + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} P_{21}(x,\xi,t)\right] - 4nP_{22}(x,\xi,t) - \\
&\quad - \int_0^{l}\int_0^{l} \frac{P_{21}(x,\xi_1,t)P_{21}(\xi,\xi_2,t)}{r_o} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{q_o}{\rho^2 F^2}
\end{aligned}\right\} \quad (7.7)$$

- wraz z warunkami brzegowymi

$$\left.\begin{aligned}
P_{11}(x,\xi,t)\Big|_{x=0} &= P_{11}(x,\xi,t)\Big|_{x=l} = 0 \\
P_{21}(x,\xi,t)\Big|_{x=0} &= P_{21}(x,\xi,t)\Big|_{x=l} = 0 \\
P_{22}(x,\xi,t)\Big|_{x=0} &= P_{22}(x,\xi,t)\Big|_{x=l} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (7.8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{11}(x,\xi,t)\Big|_{x=0} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{11}(x,\xi,t)\Big|_{x=l} = 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{21}(x,\xi,t)\Big|_{x=0} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{21}(x,\xi,t)\Big|_{x=l} = 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{22}(x,\xi,t)\Big|_{x=0} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{22}(x,\xi,t)\Big|_{x=l} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (7.9)$$

- i warunkami początkowymi

$$P_{11}(x,\xi,0) = P_{21}(x,\xi,0) = P_{22}(x,\xi,0) = 0 \quad (7.10)$$

W przypadku gdy estymację drgań pręta prowadzi się przy dużych czasach t, $(t\to\infty)$, można się posłużyć stacjonarnymi nieliniowymi równaniami różniczkowo-całkowymi typu Riccati:

$$2P_{12}(x,\xi) - \int_0^{l}\int_0^{l} \frac{P_{11}(x,\xi_1)P_{11}(\xi,\xi_2)}{r_o} d\xi_1 d\xi_2 = 0$$

$$P_{22}(x,\xi) - \frac{EI}{\rho F}\frac{\partial^4}{\partial x^4} P_{11}(x,\xi) - 2nP_{21}(x,\xi) - \int_0^{l}\int_0^{l} \frac{P_{11}(x,\xi_1)P_{21}(\xi,\xi_2)}{r_o} d\xi_1 d\xi_2 = 0$$

$$- \frac{EI}{\rho F}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} P_{21}(x,\xi) + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} P_{21}(x,\xi)\right] - 4nP_{22}(x,\xi) -$$

$$- \int_0^{l}\int_0^{l} \frac{P_{21}(x,\xi_1)P_{21}(\xi,\xi_2)}{r_o} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{q_o}{\rho^2 F^2} = 0 \quad (7.11)$$

Tylko ten przypadek będzie w dalszym ciągu tego rozdziału analizowany. Rozwiązania stacjonarnych nieliniowych równań Riccati poszukiwać będziemy metodą Ritza-Galerkina i w tym celu przedstawimy rozwiązania w postaci kombinacji liniowych:

$$P_{11}(x,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi\xi}{l}$$

$$P_{21}(x,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi\xi}{l} \quad (7.12)$$

$$P_{22}(x,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi\xi}{l}$$

Funkcje $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l}\right\}$ są unormowanymi funkcjami własnymi zagadnienia granicznego (7.1-7.3).
Nieznane współczynniki $\{a_m\}$ (patrz § 4.3) są rozwiązaniami dodatnimi i rzeczywistymi układu równań algebraicznych

$$\frac{q_o}{\rho^2 F^2} - 4n(\omega_m^2+2n)a_m - \omega_m^2 \frac{1}{r_o} a_m^2 - 2n\frac{1}{r_o^2} a_m^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{r_o^3} a_m^4 = 0, \quad (7.13)$$

a współczynniki $\{b_m\}$ i $\{c_m\}$ wyznacza się z relacji:

$$b_m = \frac{1}{2}\frac{1}{r_o} a_m^2 \quad (7.14)$$

$$c_m = (\omega_m^2 + 2n)a_m + \frac{1}{2}\frac{1}{r_o}a_m^3 \qquad (7.15)$$

gdzie

$$\omega_m^2 = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\varrho F}.$$

W przypadku gdy poziom zakłóceń losowych obserwacji jest wysoki i współczynnik r_o przyjmuje duże wartości, można odrzucić te wyrazy w równaniach (7.13), w których występują współczynniki $\{a_m\}$ z trzecią i czwartą potęgą. Wtedy bowiem te wyrazy przyjmują bardzo małe wartości, bliskie zeru.

Układ równań (7.13) przekształci się wtedy w układ równań algebraicznych kwadratowych, których rzeczywiste i dodatnie rozwiązania wyrażają się wzorem:

$$a_m = \frac{-2n(\omega_m^2+2n) + \sqrt{4n^2(\omega_m^2+2n)^2 + \frac{q_o}{r_o}\frac{\omega_m^2}{\varrho^2F^2}}}{\frac{\omega_m^2}{r_o}} \qquad (7.17)$$

Podstawiając powyższe rozwiązania do relacji (7.14) i (7.15) określone zostaną również współczynniki $\{b_m\}$ i $\{c_m\}$.

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia estymaty $\tilde{u}(x,t)$. Równanie obserwacji stanu ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} z(x,t) = u(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\eta(t,\varphi), \quad x \in R^{-1}, \quad t \in R_+^1 \qquad (7.18)$$

Załóżmy dla ułatwienia dalszych rozważań taki szczególny przypadek losowy, że na układ nie działa żadne zakłócenie losowe $f(t,\varphi)$. Wtedy

$$u(x,t) = y_1(x,t) = 0$$

Stąd w tym przypadku

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t,\varphi) = \frac{\partial}{\partial t}\eta(t,\varphi)$$

Ponieważ $\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,\varphi)$ jest procesem stochastycznym o charakterze "białego szumu", najwygodniej, w celu uproszczenia obliczeń, aproksymować go za pomocą procesu stochastycznego szerokopasmowego. Łatwo zauważyć, że funkcja korelacji

$$E\left[\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,\varphi)\frac{\partial}{\partial \tau}\eta(\tau,\varphi)\right] = r_o\delta_D(t-\tau)$$

stanowi graniczne przejście funkcji korelacji:

$$K_\eta(t,\tau) = r_o\alpha e^{-\alpha|t-\tau|} \qquad (7.19)$$

gdy $\alpha \to \infty$

Stąd szerokopasmowe procesy stochastyczne o funkcji korelacji $K_\eta(t,\tau)$ mogą w granicznym przejściu stanowić aproksymację "białego szumu". W tym przypadku

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,\varphi) = \lim_{\alpha\to\infty}\alpha s(\varphi)e^{-\alpha t}, \qquad (7.20)$$

czyli zbiór jego realizacji stanowić będą eksponenty względem czasu t o bardzo dużych wykładnikach α. I taką też aproksymację "białego szumu" przyjmiemy w dalszych naszych rozważaniach. Po podstawieniu realizacji procesu stochastycznego $\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,\varphi)$ danej wzorem (7.20) do wyrażeń (4.83) i (4.84) (patrz § 4.3) i wykonaniu odpowiednich całkowań, otrzymamy ostatecznie następujące końcowe wzory na estymatę:

$$\tilde{y}_1(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{A_m^1\left[\frac{e^{(n_m-\alpha)t}\left[(n_m-\alpha)\cos\varepsilon_m t+\varepsilon_m\sin\varepsilon_m t\right]}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2} - \frac{(n_m-\alpha)}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2}\right]\times\right.$$

$$\times e^{-n_m t}\cos\varepsilon_m t - B_m^1\left[\frac{e^{(n_m-\alpha)t}\left[(n_m-\alpha)\sin\varepsilon_m t + \varepsilon_m\cos\varepsilon_m t\right]}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2} - \frac{n}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2}\right]\times$$

$$\left.\times e^{-n_m t}\sin\varepsilon_m t\right\}\sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (7.21)$$

$$\tilde{y}_2(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{A_m^2\left[\frac{e^{(n_m-\alpha)t}\left[(n_m-\alpha)\cos\varepsilon_m t + \varepsilon_m\sin\varepsilon_m t\right]}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2} - \frac{(n_m-\alpha)}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2}\right]\times\right.$$

$$\times e^{-n_m t}\cos\varepsilon_m t - B_m^2\left[\frac{e^{(n_m-\alpha)t}\left[(n_m-\alpha)\sin\varepsilon_m t + \varepsilon_m\cos\varepsilon_m t\right]}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2} - \frac{\varepsilon_m}{(n_m-\alpha)^2+\varepsilon_m^2}\right]\times$$

$$\left.\times e^{-n_m t}\sin\varepsilon_m t\right\}\sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (7.22)$$

gdzie

$$\alpha_m = a_m \frac{1}{r_o}, \qquad \beta_m = b_m \frac{1}{r_o}$$

$$n_m = \frac{1}{2}(\alpha_m + 2n)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}\left[4(\omega_m^2 + \beta_m + 2n\alpha_m) - (\alpha_m + 2n)^2\right]^{1/2}$$

$$A_m^1 = \frac{2\left\{2\varepsilon_m^2\beta_m + \alpha_m\left[\alpha_m + 2(n-n_m)\right]\left[2\beta_m + \omega_m^2 - n_m\beta_m\right]\right\}}{4n_m^2 + (\varepsilon_m + \alpha_m + 2n)^2}$$

$$B_m^1 = \frac{2\left\{2\alpha_m(2\beta_m + \omega_m^2 - n_m\beta_m) - \alpha_m\beta_m(\alpha_m + 2(n-n_m))\right\}}{4n_m^2 + (\varepsilon_m + \alpha_m + 2n)^2}$$

$$A_m^2 = \frac{2\left\{2\varepsilon_m^2\alpha_m + \left[2(n-n_m) - \alpha_m\right]\left[\beta_m + (2n-n_m)\alpha_m\right]\right\}}{4n_m^2 + (\varepsilon_m + \alpha_m + 2n)^2}$$

$$B_m^2 = \frac{2\left\{2\alpha_m n + \alpha_m^2 + 2\beta_m\right\}}{4n_m^2 + (\varepsilon_m + \alpha_m + 2n)^2}$$

Przyjmijmy następujące wartości cyfrowe parametrów:

$$\rho = 7800 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

$$l = 1 \ [m]$$

$$R = 0.01 \ [m]$$

$$n = 0.5 \left[\frac{1}{s}\right]$$

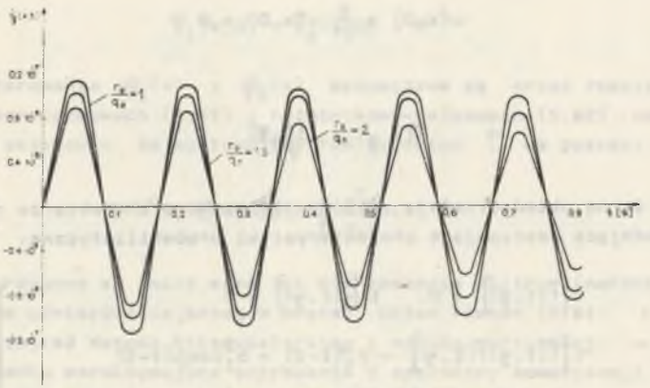
$$q = 1000$$

$$r_o = 1000,\ 1500,\ 2000$$

$$I = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$F = \pi R^2$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \left[\frac{MN}{m^2}\right]$$



Rys. 3

Na rys. 3 przedstawiono przebiegi w czasie estymaty drgań tego pręta przy różnych poziomach zakłóceń obserwacji r_o, a stałym poziomie zakłóceń układu. Estymata ma postać zanikających wraz z czasem oscylacji dążących przy $t \to \infty$ do zera. Amplituda tych oscylacji jest tym większa, im mniejszy jest poziom zakłóceń r_o.

Uzyskane wyniki mogą być również zinterpretowane na gruncie teorii minimaksowej estymacji opisanej w § 6. Przyjmując w równaniach (6.7), (6.8) $k = 1$ i zapisując obszar występowania zakłóceń losowych w postaci nierówności całkowej:

$$\int_0^{\tau}\left[f(t)q_o\, f(t) + \eta(t) r_o\, \eta(t)\right]dt \leq \mu \qquad (7.23)$$

można zinterpretować uzyskane rozwiązanie $\tilde{u}(x,t) = \tilde{v}_1(x,t)$ jako środek pewnej elipsoidy ograniczającej zbiór optymalnych trajektorii stanowiących estymatę.

Przejdziemy obecnie do analizy estymacji drgań prętów, w przypadku gdy zakłócenia losowe nie mają charakteru "białych szumów" i znane są ich charakterystyki probabilistyczne (funkcje korelacyjne). Jako przykład rozważymy drgania wzdłużne pręta o stałej grubości opisane równaniem

$$\frac{\partial^2}{\partial t}\, u(x,t) + 2n \frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) = \tilde{f}(t,x) \qquad (7.24)$$

przy warunkach brzegowych opisujących sztywne utwierdzenie brzegów pręta

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \qquad (7.25)$$

i zerowych warunkach początkowych

$$u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \tag{7.26}$$

gdzie

$$\tilde{f}(t,y) = \frac{f(t,y)}{\rho F}.$$

Założymy, że na układ działają zakłócenia losowe o charakterze perindycznym, posiadające następujące charakterystyki probabilistyczne:

$$\left.\begin{aligned} &E\left[\tilde{f}(t,y)\right] = 0, \quad E\left[\eta(t,y)\right] = 0 \\ &E\left[\tilde{f}(t,y)\tilde{f}(\tau,y)\right] = K_{\tilde{f}}(t-\tau) = \sigma_1^2 \cos\beta(t-\tau) \\ &E\left[\eta(t,y)\eta(\tau,y)\right] = K_{\eta}(t-\tau) = \frac{1}{\varepsilon}\sigma_2^2 \cos\beta(t-\tau) \\ &E\left[\tilde{f}(t,y)\eta(\tau,y)\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.27}$$

gdzie σ_1, σ_2, β są znanymi parametrami funkcji korelacyjnych, a ε małym parametrem. Analizę przeprowadzimy przy bardzo dużych czasach, gdy $t \to \infty$ i sterowania φ_1, φ_2 występujące w optymalnym filtrze będą miały charakter stacjonarny (patrz § 5.3, relacje (5.26), (5.29) i (5.30)). Równania filtru dla tego przypadku będą miały postać:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}_1(x,t) = \tilde{v}_2(x,t) + \varepsilon\bar{\varphi}_1(x)\left[z(x,t) - \tilde{v}_1(x,t)\right] \\ &\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}_2(x,t) = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{v}_1(x,t) - 2n\tilde{v}_2(x,t) + \varepsilon\bar{\varphi}_2(x)\left[z(x,t) - \tilde{v}_1(x,t)\right] \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

gdzie

$$\tilde{u}(x,t) = \tilde{v}_1(x,t)$$

- wraz z warunkami brzegowymi

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{v}_1\Big|_{x=0} = \tilde{v}_1\Big|_{x=} = 0 \\ &\tilde{v}_2\Big|_{x=0} = \tilde{v}_2\Big|_{x=} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

- i zerowymi warunkami początkowymi:

$$\tilde{v}_1(x,0) = \tilde{v}_2(x,0) = 0 \tag{7.30}$$

Nieznane sterowania $\bar{\varphi}_1(x)$ i $\bar{\varphi}_2(x)$ wyznaczone są przez rozwiązanie układów równań całkowych (5.61) i różniczkowo-całkowych (5.62) podanych w § 5.3 przy założeniu, że występujący tam operator $\tilde{L}$ ma postać:

$$\tilde{L}(\cdot) \stackrel{df}{=} -\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot)$$

a warunki brzegowe są takie same jak dla równania filtru (warunki opisujące sztywne utwierdzenie brzegów pręta). Układ równań (5.61) i (5.62) rozwiązany został metodą Ritza-Galerkina i metodą perturbacji w § 5.3. W tym przypadku aproksymujące sterowania i operatory kowariancji kombinacje liniowe (5.64) i (5.65), (patrz § 5.3) mają postać:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varphi}_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l} \\ &\bar{\varphi}_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l} \end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_{11}(x,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l}\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi\xi}{l} \\ &P_{21}(x,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l}\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi\xi}{l} \\ &P_{22}(x,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi x}{l}\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{m\pi\xi}{l} \end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

a nieznane współczynniki $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ i $\{c_m\}$ mają postać rozwinięć:

$$\left.\begin{aligned} &a_m = a_m^0 + \varepsilon a_m^1 + \ldots \\ &b_m = b_m^0 + \varepsilon b_m^1 + \ldots \\ &c_m = c_m^0 + \varepsilon c_m^1 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7.33}$$

gdzie

$$a_m^o = -\frac{1}{\Delta_m}\left[(A_m^1+A_m^2)(4\omega_m^2 n+2\omega_m^2) + 4n(A_m^1+B_m^2) - (B_m^1+B_m^2)\right]$$

$$b_m^o = -\frac{1}{\Delta_m}\left[8n - 4n(A_m^1 + B_m^2)\right]$$

$$c_m^o = -\frac{1}{\Delta_m}\left[2\omega_m^2(A_m^1+B_m^2) - \omega_m^2(B_m^1+B_m^2) - 2n(B_m^1+B_m^2) - 4n\omega_m^2(A_m^1+A_m^2)\right]$$

$$a_m^1 = \frac{1}{\Delta_m}\left[F_m^1(4\omega_m^2 n + 2\omega_m^2) + 4nF_m^2 + F_m^3\right]$$

$$b_m^1 = \frac{1}{\Delta_m}\left[8n^2 - 4nF_m^1\right]$$

$$c_m^1 = \frac{1}{\Delta_m}\, 2\omega_m^2 F_m^2 - (\omega_m^2 + 2n)F_m^3 - 4n\omega_m^2 F_m^1$$

przy czym:

$$p_m = \sqrt{\omega_m^2 - n^2}$$

$$A_m^1 = -\frac{n}{2}\left[\frac{1}{n^2 + (p_m+\beta)^2} + \frac{1}{n^2 + (p_m-\beta)^2}\right]\delta_1^2$$

$$A_m^2 = -\left[\frac{p_m+}{n^2 + (p_m+\beta)^2} + \frac{p_m-\beta}{n^2 + (p_m-\beta)^2}\right]\delta_2^2$$

$$B_m^1 = \left\{\frac{n^2}{2}\,\frac{1}{n^2 + (p_m+\beta)^2} + \frac{1}{n^2 + (p_m-\beta)^2} + \right.$$

$$\left. + p_m\,\frac{p_m+}{n^2 + (p_m+\beta)^2} + \frac{p_m-}{n^2 + (p_m-\beta)}\right\}\delta_1^2$$

$$B_m^2 = \left\{\frac{n}{p_m}\left[\frac{p_m+\beta}{n^2 + (p_m+\beta)^2} + \frac{p_m-\beta}{n^2 + (p_m-\beta)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + (n+1)\frac{n^2}{2}\,\frac{1}{n^2 + (p_m+\beta)^2} + \frac{1}{n^2 + (p_m-\beta)^2}\right]\right\}\delta_1^2$$

$$\Delta_m = 2\omega_m^2(2n+1) + 8n$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{a_m B_m^2 - b_m A_m^2}{A_m^1 B_m^2 - A_m^2 B_m^1}\;\varepsilon \\ \beta_m &= \frac{b_m A_m^1 - a_m B_m^1}{A_m^1 B_m^2 - A_m^2 B_m^1}\;\varepsilon\end{aligned}\right\} \qquad (7.34)$$

$$F_1^m = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\alpha_p(a_q^o + b_q^o) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\alpha_p(A_q^1\alpha_q + A_q^2\beta_q)$$

$$F_2^m = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}b_p^o(\alpha_q - \beta_q) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\alpha_p(A_q^2\beta_q + \beta_q^2\alpha_q) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\beta_p(A_q^1\beta_q + A_q^2\alpha_q)$$

$$F_3^m = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} S_{mpq}\beta_p(b_q^o + c_q^o)$$

Dla $m \neq p \neq q$, $S_{mpq} = \frac{16}{\pi_L^2}\left[\frac{1}{m+p+q} - \left(\frac{1}{m-p+q} + \frac{1}{p+q-m} + \frac{1}{m+q-p}\right)\right]$

a dla $m = p$ lub $p = q$, lub $m = q$

$$S_{mpq} = \frac{16}{\pi_L^2}\left[\frac{1}{m+p+q}\right]$$

Podstawiając wyliczone na podstawie formuł (7.34) współczynniki $\{\alpha_m\}$ i $\{\beta_m\}$ dla wzorów (5.79) i (5.83) w § 5.3 oraz biorąc pod uwagę, że

$$R_{pm}(t,\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{gdy,} \quad l \neq m \\ \frac{2}{m\pi_l}\,\eta(t,\varphi) & \text{gdy,} \quad l = m \end{cases}$$

a $\eta(t,\varphi) = a(\varphi)\cos\beta t$

po wykonaniu odpowiednich całkowań we wzorze (5.85) uzyskamy następujący końcowy wzór na estymatę:

$$\tilde{y}_1(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{m\pi L^2} \left\{ \frac{2n\beta(2n\alpha_m + \beta_m)}{\left[(\omega_m^2-\beta^2)^2 - 4n^2\beta^2\right]\sqrt{\omega_m^2 - n^2}} \cos\beta t + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_m\beta(\omega_m^2 - \beta^2)}{\left[(\omega_m^2+\beta^2)^2 - 4n^2\beta^2\right]\sqrt{\omega_m^2 - n^2}} \sin\beta t \right\} \sin\frac{m\pi x}{L} \qquad (7.35)$$

Z formuły (7.35) widać, że estymata jest w tym przypadku funkcją harmoniczną, której amplituda jest uzależniona od poziomu zakłóceń działających na układ.

Przyjmijmy następujące wartości cyfrowe parametrów:

$$\rho = 7800 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

$$L = 1 \ [m]$$

$$R = 0{,}01 \ [m]$$

$$n = 0{,}5 \left[\frac{1}{s}\right]$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$\tilde{E} = 2 \cdot 10^5 \ \frac{MN}{m^2}$$

$$I = \pi R^2$$

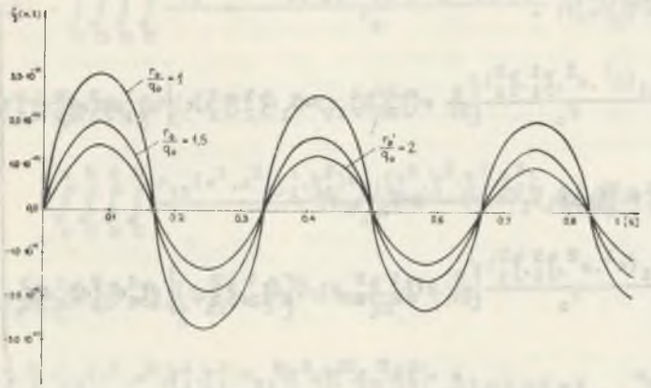
$$\beta = 10, 15, 20$$

Na rys. 4 przedstawiono przebiegi w czasie estymaty drgań tego pręta, przy różnych poziomach zakłóceń obserwacji, a stałym poziomie zakłóceń działających na układ. Estymata ma charakter nie zanikających oscylacji, których amplituda jest tym większa, im większy jest poziom zakłóceń obserwacji i im większa jest ich częstość.

7.2. Estymacja drgań płyt

Estymację drgań płyt w obecności zakłóceń losowych można wyznaczyć w sposób analogiczny jak dla przypadku drgań prętów, rozpatrzonego w rozdziale poprzednim.

Zakładając, że zakłócenia mają taki sam charakter jak dla przypadku drgań prętów, można łatwo zmodyfikować pewne wzory i relacje znane już w § 7.1, a służące do wyznaczenia estymaty. Modyfikacje te przedstawimy w



Rys. 4

niniejszym rozdziale. Drgania poprzeczne płyty o stałej grubości opisuje równanie (patrz § 2.1)

$$\rho \cdot h \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + 2\rho h\eta \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + D\Delta\Delta u(x,t) = f(x,t,\gamma), \qquad (7.36)$$

gdzie

$$x = (x^1, x^2) \in \Omega \subset R.$$

Założymy, że warunki brzegowe opisują swobodne podparcie brzegów płyty, czyli:

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} u + \vartheta_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (7.37)$$

a warunki początkowe są zerowe:

$$u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \qquad (7.38)$$

Parametry r_0 i q_0 związane z intensywnością zakłóceń przyjmiemy, podobnie jak poprzednio jako pewne stałe dodatnie. Kształt płyty dla uproszczenia przyjmiemy jako prostokątny o wymiarach $(0,a) \times (0,b)$.

Równania opisujące optymalny filtr mają w tym przypadku postać:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}_1(x,t) = \bar{v}_2(x,t) + \\
&+\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{11}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2)}{r_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}z(\xi_2^1,\xi_2^2,t)-\bar{v}_1(\xi_2^1,\xi_2^2,t)\right]d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_2^1 d\xi_2^2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}_2(x,t) = -\frac{D}{\rho h}\Delta\Delta_x\bar{v}_1(x,t) - 2n\bar{v}_2(x,t) + \\
&+\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{21}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2)}{r_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}z(\xi_2^1,\xi_2^2,t)-\bar{v}_1(\xi_2^1,\xi_2^2,t)\right]d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_2^1 d\xi_2^2
\end{aligned}\right\} \quad (7.39)$$

$$x = (x^1,x^2) \in R^2$$

przy czym warunki brzegowe pozostają takie same jak dla równania stanu, warunki początkowe są zerowe, a nieliniowe równania różniczkowo-całkowe typu Riccati, z których wyznacza się nieznane operatory $P_{ik}(x,\xi,t)$ mają postać:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_{11}(x,\xi,t) = 2P_{21}(x,\xi,t) - \\
&-\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{11}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2,t)P_{11}(\xi^1,\xi^2,\xi_2^1,\xi_2^2,t)}{r_0}d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_2^1 d\xi_2^2 \\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{21}(x,\xi,t) = P_{22}(x,\xi,t) - \frac{D}{\rho h}\Delta\Delta P_{11}(x,\xi,t) - 2nP_{21}(x,\xi,t) - \\
&-\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{11}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2,t)P_{21}(\xi^1,\xi^2,\xi_2^1,\xi_2^2,t)}{r_0}d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_2^1 d\xi_2^2 \qquad (7.40) \\
&\frac{\partial}{\partial t}P_{22}(x,\xi,t) = -\frac{D}{\rho h}\left[\Delta\Delta_x P_{21}(x,\xi,t) + \Delta\Delta_\xi P_{21}(x,\xi,t)\right] - 4nP_{22}(x,\xi,t) - \\
&-\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{21}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2,t)P_{21}(\xi^1,\xi^2,\xi_2^1,\xi_2^2,t)}{r_0}d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_2^1 d\xi_2^2 + \frac{q_0}{\rho^2 h^2}
\end{aligned}$$

Warunki brzegowe i początkowe dla równań różniczkowo-całkowych Riccati (7.40) są analogiczne jak dla równań filtru. Dla dużych czasów $t(t\to\infty)$ równania Riccati przekształcają się do postaci stacjonarnej:

$$\begin{aligned}
&2P_{21}(x,\xi) - \int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{11}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2)P_{11}(\xi^1,\xi^2,\xi_2^1,\xi_2^2)}{r_0}d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_1^2 d\xi_2^2 = 0 \\
&P_{22}(x,\xi) - \frac{D}{\rho n}\Delta\Delta_{x,\xi}P_{11}(x,\xi) - 2nP_{21}(x,\xi) - \\
&\qquad -\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{11}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2)P_{21}(\xi^1,\xi^2,\xi_2^1,\xi_2^2)}{r_0}d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_1^2 d\xi_2^2 = 0 \\
&-\frac{D}{\rho n}\left[\Delta\Delta_x P_{21}(x,\xi) + \Delta\Delta_\xi P_{21}(x,\xi)\right] - 4nP_{22}(x,\xi) - \\
&-\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b \frac{P_{21}(x^1,x^2,\xi_1^1,\xi_1^2)P_{21}(\xi^1,\xi^2,\xi_2^1,\xi_2^2)}{r_0}d\xi_1^1 d\xi_1^2 d\xi_1^2 d\xi_2^2 + \frac{q_0}{\rho^2 h^2} = 0
\end{aligned} \quad (7.41)$$

Rozwiązanie stacjonarnych równań różniczkowo-całkowych Riccati, podobnie jak § 7.1 mają postać kombinacji liniowych:

$$\begin{aligned}
P_{11}(x^1,x^2,\xi^1,\xi^2) &= \sum_{l+m=2}^{\infty} a_{lm}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi x^1}{a}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi x^2}{b}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi\xi^1}{a}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi\xi^2}{b} \\
P_{21}(x^1,x^2,\xi^1,\xi^2) &= \sum_{l+m=2}^{\infty} b_{lm}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi x^1}{a}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi x^2}{b}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi\xi^1}{a}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi\xi^2}{b} \\
P_{22}(x^1,x^2,\xi^1,\xi^2) &= \sum_{l+m=2}^{\infty} c_{lm}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi x^1}{a}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi x^2}{b}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi\xi^1}{a}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi\xi^2}{b}
\end{aligned} \quad (7.42)$$

przy czym nieznane współczynniki $\{a_{lm}\}$, $\{b_{lm}\}$ i $\{c_{lm}\}$ wyznacza się z następujących relacji:

$$\begin{aligned}
a_{lm} &= \frac{-2n(\omega_{lm}^2+2n) + \sqrt{4n^2(\omega_{lm}^2+2n)^2 + \frac{q_0}{r_0}\frac{\omega_{lm}^2}{\rho^2 h^2}}}{\frac{\omega l^2}{r_0}} \\
b_{lm} &= \frac{1}{2}r_0 a_{lm}^2 \qquad (7.43) \\
c_{lm} &= (\omega_{lm}^2+2n)a_{lm} + \frac{1}{2}\frac{1}{r_c^2}a_{lm}^3
\end{aligned}$$

$$\omega_{lm}^2 = \frac{P}{\rho h}\,\pi^2\sqrt{\left[\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right]^2} \tag{7.44}$$

Wzory te obowiązują oczywiście, podobnie jak w § 7.1 dla przypadku, gdy poziom zakłóceń losowych obserwacji jest wysoki w stosunku do zakłóceń działających na układ i współczynnik r_o przyjmuje duże wartości. Formuły aproksymujące optymalną estymatę wyprowadzone w § 7.1 (patrz wzór (7.21), (7.22)) przekształcę się w tym przypadku do postaci:

$$\tilde{v}_1(x^1,x^2,t) =$$

$$= -\sum_{l+m=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{ab}}\left\{A_{lm}^1\left[e^{(n_{lm}-\alpha_{lm})t}\,\frac{\left[(n_{lm}-\alpha_{lm})\cos\varepsilon_{lm}t+\varepsilon_{lm}\sin\varepsilon_{lm}t\right]}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}-\frac{(n_{lm}-\alpha_{lm})}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}\right]\times\right.$$

$$\times\, e^{-n_{lm}t}\cos\varepsilon_{lm}t -$$

$$-B_{lm}^1\left[e^{(n_{lm}-\alpha_{lm})t}\,\frac{\left[(n_{lm}-\alpha_{lm})\sin\varepsilon_{lm}t+\varepsilon_{lm}\cos\varepsilon_{lm}t\right]}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}-\frac{\varepsilon_{lm}}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}\right]\times$$

$$\left.\times\, e^{-n_{lm}t}\sin\varepsilon_{lm}t\right\}\sin\frac{l\pi x^1}{a}\sin\frac{m\pi x^2}{b} \tag{7.45}$$

$$\tilde{v}_2(x^1,x^2,t) =$$

$$= -\sum_{l+m=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{ab}}\left\{A_{lm}^2\left[e^{(n_{lm}-\alpha_{lm})t}\,\frac{\left[(n_{lm}-\alpha_{lm})\cos\varepsilon_{lm}t+\varepsilon_{lm}\sin\varepsilon_{lm}t\right]}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}-\frac{(n_{lm}-\alpha_{lm})}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}\right]\times\right.$$

$$\times\, e^{-n_{lm}t}\cos\varepsilon_{lm}t -$$

$$-B_{lm}^2\left[e^{(n_{lm}-\alpha_{lm})t}\,\frac{\left[(n_{lm}-\alpha_{lm})\sin\varepsilon_{lm}t+\varepsilon_{lm}\cos\varepsilon_{lm}t\right]}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}-\frac{\varepsilon_{lm}}{(n_{lm}-\alpha_{lm})^2+\varepsilon_{lm}^2}\right]\times$$

$$\left.\times\, e^{-n_{lm}t}\sin\varepsilon_{lm}t\right\}\sin\frac{l\pi x^1}{a}\sin\frac{m\pi x^2}{b} \tag{7.46}$$

gdzie

$$\alpha_{lm} = a_{lm}\frac{1}{r_o},\qquad \beta_{lm} = b_{lm}\frac{1}{r_o}$$

$$n_{lm} = \frac{1}{2}(\alpha_{lm}+2n)$$

$$\varepsilon_{lm} = \frac{1}{2}\left[4(\omega_{lm}^2+\beta_{lm}+2n\alpha_{lm})-(\alpha_{lm}+2n)^2\right]^{1/2}$$

$$A_{lm}^1 = \frac{2\left\{2\varepsilon_{lm}^2\beta_{lm}+\alpha_{lm}\left[\alpha_{lm}+2(n-n_{lm})\right]\left[2\beta_{lm}+\omega_{lm}^2-n_{lm}\beta_{lm}\right]\right\}}{4n_{lm}^2+(\varepsilon_{lm}+\alpha_{lm}+2n)^2}$$

$$B_{lm}^1 = \frac{2\left\{2\alpha_{lm}(2\beta_{lm}+\omega_{lm}^2-n_{lm}\beta_{lm})-\alpha_{lm}\beta_{lm}(\alpha_{lm}+2(n-n_{lm}))\right\}}{4n_{lm}^2+(\varepsilon_{lm}+\alpha_{lm}+2n)^2}$$

$$A_{lm}^2 = \frac{2\left\{2\varepsilon_{lm}^2\alpha_{lm}+\left[2(n-n_{lm})-\alpha_{lm}\right]\left[\beta_{lm}+(2n-n_{lm})\alpha_{lm}\right]\right\}}{4n_{lm}^2+(\varepsilon_{lm}+\alpha_{lm}+2n)^2}$$

$$B_{lm}^2 = \frac{2\left\{2\alpha_{lm}n+\alpha_{lm}^2+2\beta_{lm}\right\}}{4n_{lm}^2+(\varepsilon_{lm}+\alpha_{lm}+2n)^2}$$

Przyjmując następujące wartości cyfrowe parametrów:

$$\rho = 7800\ \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

$$h = 0{,}01\ [m]$$

$$\tilde{E} = 2\cdot 10^5\ \left[\frac{MN}{m^2}\right]$$

$$n = 0{,}5\ \left[\frac{1}{s}\right]$$

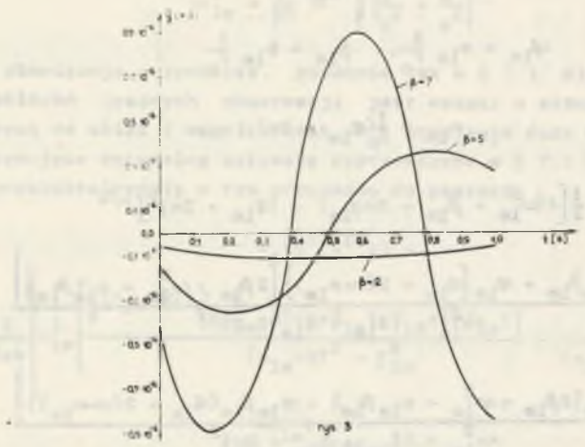
$$q_o = 1000$$

$$r_o = 1000,\ 1500,\ 2000$$

$$a = 1\ [m]$$

$$b = 1\ [m]$$

$$\nu_o = 0{,}3$$



Rys. 5

Na rys. 5 przedstawiono przebiegi w czasie estymaty drgań płyty przy różnych poziomach zakłóceń obserwacji r_o i stałym poziomie zakłóceń układu. Uzyskane wyniki należy jednak interpretować w różny sposób w zależności od tego jaki model filtru został zastosowany. W przypadku filtru klasycznego (zakłócenia typu "biały szum") uzyskana trajektoria jest estymatą, natomiast w przypadku filtru minimaksowego trajektoria ta jest środkiem elipsoidy będącej optymalną estymatą. Do aproksymacji rozwiązania problemu optymalnego filtrowania, w niniejszej pracy stosowano metodę Ritza-Galerkina, w której aproksymujące funkcje bazowe stanowiły funkcje własne rozpatrywanego zagadnienia granicznego. W rozpatrywanym przykładzie, gdy płyta miała kształt prostokątny i warunki brzegowe opisywały swobodne podparcie, funkcje takie łatwo było dobrać.

W przypadku gdy kształt płyty i warunki brzegowe są złożone, dobór takich funkcji może być utrudniony. Stosując jednak tzw. teorię R-funkcji ściśle związanych z funkcjami logicznymi ([31]), ([32]) można skonstruować funkcje własne dla płyt o dowolnym kształcie i złożonych warunkach brzegowych. Sposób konstrukcji takich funkcji został przedstawiony w dodatku 1, załączonym na końcu niniejszej pracy. Wykorzystując teorię podaną w § 5 w podobny sposób można też wyprowadzić wzory i formuły na estymatę drgań płyt, w przypadku gdy działające zakłócenia losowe nie są "białymi szumami" i znane są ich charakterystyki probabilistyczne. Wzory te nie będą tu rozważane, gdyż są podobne do tych, jakie wyprowadzono dla przypadku drgań wzdłużnych pręta w § 7.1.

8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

Badania drgań konstrukcji interpretowanych jako układy dynamiczne o stałych rozłożonych, w obecności zakłóceń losowych, mają bardzo istotne znaczenie z punktu zastosowań w technice. Mogą bowiem dostarczyć wielu cennych informacji dotyczących identyfikacji rzeczywistych zjawisk zachodzących w konstrukcjach. Stosując metody optymalnej estymacji (metody optymalnego filtrowania), można uwzględnić i oszacować wpływ zjawisk losowych jak i zakłóceń w czasie pomiarów, przy czym uwzględnienie tych zjawisk jest niezbędne w celu optymalnego zaprojektowania tych konstrukcji. Metody optymalnej estymacji w takim ujęciu jak w niniejszej pracy nie były dotychczas zbyt szeroko stosowane do badania drgań układów dynamicznych o stałych rozłożonych ([4]).

W prezentowanej pracy zastosowano trzy modele optymalnych filtrów do badania drgań układów dynamicznych o stałych rozłożonych, takich jak pręty i płyty. Pierwszy model (klasyczny) stanowi filtr rekursywny w sensie Kalmana i obowiązuje dla przypadku, gdy zakłócenia losowe mają charakter "białych szumów". Drugi model, który jest oryginalnie opracowany przez autora, stanowi zmodyfikowany filtr rekursywny obowiązujący dla przypadku, gdy zakłócenia losowe nie są "białymi szumami" i posiadają znane charakterystyki probabilistyczne. Trzeci model stanowi tzw. filtr minimaksowy, który nie wymaga znajomości charakterystyk probabilistycznych zakłóceń, a tylko znajomości obszaru ich występowania. Otrzymana estymata jest wtedy pewnym obszarem mającym kształt elipsoidy.

Model pierwszy, a więc filtr klasyczny i model minimaksowy są do siebie bardzo podobne. Rozwiązania równań opisujących oba filtry choć są podobne, to mają jednak bardzo różną interpretację fizyczną (patrz § 6). W niniejszej pracy estymatę dla obu tych modeli otrzymano dla przypadku stacjonarności nieliniowych równań różniczkowo-całkowych typu Riccati, co jest słuszne dla bardzo dużych czasów $t \to \infty$. Przy tych samych założeniach o stacjonarności operatorów kowariancji błędu filtrowania otrzymano także estymatę dla modelu filtru, w którym zakłócenia losowe nie są "białymi szumami" (patrz § 5).

Uzyskane rozwiązania pozwoliły stwierdzić, że sterowania równaniem filtru związane z operatorami kowariancji błędu filtrowania pojawiają się nie tylko w członach stanowiących wymuszenie, ale także i w członach reprezentujących tłumienie (równania (4.20), (5.26).

Tak więc istotnym zagadnieniem jest opracowanie efektywnych metod numerycznych estymacji drgań liniowych układów o stałych rozłożonych w przy-

padku niestacjonarnych operatorów kowariancji błędu filtrowania. Inne dalsze badania nad zastosowaniem teorii optymalnej estymacji drgań układów dynamicznych o stałych rozłożonych wiążą się z rozwojem następujących kierunków badań:

1. Sformułowania modeli optymalnych filtrów dla badania drgań parametrycznych liniowych układów dynamicznych o stałych rozłożonych.
2. Sformułowania modeli optymalnych filtrów dla badania drgań nieliniowych układów dynamicznych o stałych rozłożonych ze szczególnym uwzględnieniem drgań samowzbudnych (flutter).
3. Sformułowania modeli optymalnych filtrów dla badania zagadnień falowych w ośrodkach ciągłych.
4. Wykorzystanie metod teorii optymalnej estymacji do optymalizacji obserwacji drgań układów dynamicznych o stałych rozłożonych.
5. Wykorzystanie metod teorii optymalnej estymacji do stabilizacji drgań stochastycznych układów dynamicznych o stałych rozłożonych.

DODATEK

Zastosowanie metody R-funkcji do badania drgań układów o stałych rozłożonych, o złożonym kształcie

Estymacja drgań konstrukcji o złożonym kształcie, a w szczególności układów płytowych przy zastosowaniu rozwiązań uzyskanych w niniejszej pracy wymaga znajomości funkcji własnych problemu. Funkcje te można otrzymać wykorzystując tzw. teorię R-funkcji. Funkcje te wprowadzone po raz pierwszy przez W.L. Rwaczewa ([31], [32]) są ściśle związane z algebrą funkcji logicznych. W niniejszym dodatku przedstawimy sposób konstrukcji funkcji własnych dla dwuwymiarowych obszarów metodą R-funkcji.

Definicja 21: R-funkcję $y = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nazywamy funkcję, której odpowiada pewna funkcja boole'owska $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$, taka że spełniona jest relacja:

$$S_2\left[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = F\left[S_2(x_1), S_2(x_2), \ldots, S_2(x_n)\right] \qquad (D.1.1)$$

gdzie

$$S_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x < 0 \\ 1, & \text{jeśli } x \geq 0 \end{cases}$$

Stosując R-funkcje można za pomocę prostych operacji uzyskać równanie konturu obszaru o złożonej geometrii, których równania konturu są znane. Wynika to z następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 5 ([31], [32])

Jeśli $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest pewną funkcją booleowską, a $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ - odpowiednia R-funkcja, a funkcje ciągłe $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ określają elementarne obszary Ω_i, $i = 1,2,\ldots$, z których składa się rozważany obszar zamknięty Ω, określony równaniem przełączającym:

$$F\left[S_2(\varphi_1), S_2(\varphi_2) \ldots S_2(\varphi_n)\right] = 1 \qquad (D.1.2)$$

to obszar ten może być określony nierównością

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \geq 0. \qquad (D.1.3)$$

Wykorzystując to twierdzenie można zapisać w postaci równania brzegu obszaru Ω o dowolnej konfiguracji. Obszar ten uzyskujemy przez operacje mnogościowe na wyjściowych obszarach o prostej geometrii i znanych równaniach konturu. Operacjom mnogościowym nad obszarami będą odpowiadać odpowiednie operacje logiczne R-funkcji opisującej kontur tego obszaru. Najczęściej używane R-funkcje odpowiadające różnym operacjom logicznym mają postać:

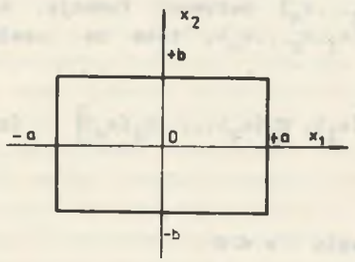
$$\varphi_1 \wedge_\alpha \varphi_2 = \frac{1}{1+\alpha}\left(\varphi_1 + \varphi_2 - \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\alpha\varphi_1\varphi_2}\right)$$

$$\varphi_1 \vee_\alpha \varphi_2 = \frac{1}{1+\alpha}\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\alpha\varphi_1\varphi_2}\right) \qquad (D.1.4)$$

$$\neg\varphi_1 = -\varphi_1$$

$$-1 < \alpha \leqslant 1$$

Przykład: Zapisać równanie brzegu prostokąta o bokach (-a,a) i (-b,b)



$$\varphi_1 = (a^2 - x_1^2) \geqslant 0$$

$$\varphi_2 = (b^2 - x_2^2) \geqslant 0$$

Równanie konturu ma postać:

$$\omega(x_1,x_2) = \varphi_1 + \varphi_2 - \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \qquad (D.1.5)$$

Otrzymane metodą R-funkcji równanie konturu $\omega(x_1,x_2) = 0$ powinno być znormalizowane do I rzędu, czyli spełniać warunki:

$$\omega\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 1 \qquad (D.1.6)$$

Nowe, znormalizowane równanie konturu $\omega_1(x_1,x_2)$ można otrzymać ze wzoru:

$$\omega_1 \stackrel{df}{=} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + |\mathrm{grad}\omega|^2}} = 0 \qquad (D.1.7)$$

Do dalszych rozważań potrzebne nam pewne operatory będące przedłużeniem operatorów różniczkowania względem normalnej $\vec{n}$ i stycznej $\vec{\tau}$, a mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} D^k(\cdot) &= \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^k(\cdot) \\ D_\tau^k(\cdot) &= \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^k(\cdot) \end{aligned}\right\} \qquad (D.1.8)$$

Niech $u(x,t)$ jest rozwiązaniem dwuwymiarowego zagadnienia granicznego (4.1-4.3). Wykorzystując znajomość równania konturu $\omega(x_1,x_2)$ można wyznaczyć funkcje bazowe w pewnej przestrzeni Hilberta, które zawsze będą spełniać warunki brzegowe w obszarze o złożonej geometrii. Można to uczynić, rozwijając poszukiwane rozwiązanie u w uogólniony szereg Taylora dookoła konturu obszaru $\partial\Omega$. Szereg ten ma postać:

$$u(x,t) = u_0^*(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}u_k^*(x,t)\omega^k(x) \qquad x = (x^1,x^2) \in \Omega \subset R^2 \qquad (D.1.9)$$

gdzie

$$u_k^*(x,t) = \frac{\partial^k}{\partial\vec{n}^k}u^*(x,t)$$

$$u^*(x,t) = u\left(x_1 - \omega\frac{\partial\omega}{\partial x_1},\ x_2 - \omega\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\,t\right)$$

jest tzw. normalizantą rozwiązania u względem równania konturu ω.

Ograniczając się w rozwinięciu (D.1.9) do dwu lub najwyżej trzech pierwszych wyrazów i podstawiając do warunków brzegowych, po pewnych przekształceniach, można otrzymać tzw. strukturę rozwiązania, która zawsze spełnia warunki brzegowe i może być przedłużona w głąb obszaru Ω w ten sposób, że stanie się rozwiązaniem rozpatrywanego zagadnienia granicznego ([31], [32]). Za pomocą struktury rozwiązania ([31], [32]) można otrzymać funkcje bazowe spełniające zadane warunki brzegowe w obszarze o złożonym kształcie. Na przykład dla typowych warunków brzegowych drgań płyt będą one postaci:

1. Dla sztywnego utwierdzenia całego brzegu:

$$V_{1m} = \omega^2\varphi_{1m} \qquad (D.1.10)$$

2. Dla swobodnego podparcia całego brzegu

$$V_{lm} = \omega\psi_{lm} - \frac{1}{2}\omega^2\psi_{lm}\left[D_2\omega + \vartheta_o D_2^{\tau}\omega\right] - \omega^2 D_1\psi_{lm} \qquad (D.1.11)$$

3. Dla mieszanych warunków brzegowych opisujących brzeg częściowo sztywno utwierdzony (równanie konturu ω_1) a częściowo swobodny (równanie konturu ω_2)

$$V_{lm} = \omega_1^2\left\{\psi_{lm} - \omega_2^2 A_{lm} - \frac{\omega_2^3}{6(\omega_1^2+\omega_2^3)}\left[D_3(\omega_1^2\psi_{lm} + 6\left[\omega_1^2(D_1A_{lm} + A_{lm}D_2\omega_2) + A_{lm}D_1(\omega_1^2)\right] + (2-\vartheta_o)\left[D_1D_2^{\tau}(\omega_1^2\psi_{lm}) + 2\omega_1^2A_{lm}D_2^{\tau}\omega_2\right]\right]\right\} \qquad (D.1.12)$$

$$A_{lm} = \frac{1}{2(\omega_1^2+\omega_2^2)}\left[D_2(\omega_1^2\psi_{lm}) + \vartheta_o D_2^{\tau}(\omega_1^2\psi_{lm})\right]$$

przy czym $\psi_{lm}(x_1,x_2) = T_L(x_1)\,T_m(x_2)$, T_L, T_m - wielomiany Czebyszewa.

Funkcje bazowe można przekształcić w ortonormalne funkcje własne zagadnienia granicznego (4.1-4.3). W tym celu metodą Ritza-Galerkina należy wyznaczyć ciąg wartości własnych $\{\lambda_{lm}\}$, operatora L, rozwiązując wyznacznik:

$$\det\left|\langle LV_{lm}, V_{kj}\rangle - \lambda\langle V_{lm}, V_{kj}\rangle\right| = 0 \qquad (D.1.13)$$

Następnie należy tak przekształcić w sposób liniowy funkcje bazowe $\{V_{lm}\}$ aby były ortogonalne wg iloczynu skalarnego:

$$\{V_{lm}, V_{kj}\} = \langle LV_{lm}, V_{kj}\rangle - \lambda_{lm}\langle V_{lm}, V_{kj}\rangle \qquad (D.1.14)$$

tzn. aby były funkcjami własnymi.

Nowe unormowane funkcje własne $\tilde{V}_{lm}$ powinny spełniać równanie

$$L\tilde{V}_{lm} = \lambda_{lm}\tilde{V}_{lm} \qquad (D.1.15)$$

Niech ortogonalne funkcje własne mają postać:

$$\tilde{V}_{lm} = \sum_{k+j=0}^{\infty} c_{kj}^{lm} V_{kj} \qquad (D.1.16)$$

Stałe c_{kj}^{lm} wyznaczyć można metodą Ritza-Galerkina, rozwiązując układy równań

$$\sum_{k+j=0}^{\infty} c_{kj}^{lm}\langle LV_{kj}, V_{pq}\rangle = \lambda_{lm}\sum_{k+j=0}^{\infty} c_{kj}^{lm}\langle V_{kj}, V_{pq}\rangle \qquad (D.1.17)$$

czyli wyliczając wektory własne $\{c_{kj}^{lm}\}$ układu Ritza-Galerkina (D.1.17) dla każdej wartości własnej $\{\lambda_{lm}\}$ Nowe, ortogonalne funkcje własne $\tilde{V}_{lm}$ należy unormować, czyli

$$\tilde{V}_{lm} = \sum_{k+j=0}^{\infty} \frac{c_{kj}^{lm}}{\sum_{k+j=0}^{\infty}\sum_{p+q=0}^{\infty} c_{kj}^{lm}c_{pq}^{lm}\langle V_{kj}, V_{pq}\rangle} V_{kj} \qquad (D.1.18)$$

Są to funkcje własne spełniające zadane warunki brzegowe dla obszaru o złożonym kształcie.

DODATEK 2

Aspekt eksperymentalny metod teorii estymacji. Identyfikacja zakłóceń losowych ([2])

Przy stosowaniu modelu optymalnego filtru przedstawionego w § 5 konieczna jest znajomość charakterystyk probabilistycznych zakłóceń losowych, a konkretnie funkcji korelacyjnych tych zakłóceń. Identyfikacja parametrów funkcji korelacyjnych związanych z tymi zakłóceniami jest bardzo istotnym problemem. Aby dokonać takiej identyfikacji, należy przeanalizować pewne ich własności, które mogą wywierać wpływ na proces ich analizy oraz interpretację wyników. Do najważniejszych cech charakterystycznych są zaliczane:

a) stacjonarność,
b) występowanie składowych okresowych,
c) normalność rozkładu.

Badanie stacjonarności zakłóceń można przeprowadzić za pomocą testu nieparametrycznego (testu zgodności). Występowanie składowych okresowych można interpretować badając czy występuję oscylacje wykresu funkcji korelacji. Natomiast normalność procesów stochastycznych reprezentujących zakłócenie można weryfikować przez porównanie gęstości prawdopodobieństwa tych procesów z gęstością rozkładu normalnego, np. za pomocą testu χ^2. Analizę zakłóceń losowych najłatwiej przeprowadzić za pomocą elektronicznej techniki obliczeniowej, wykorzystując do tego celu maszyny cyfrowe, analogowe lub hybrydowe. Pozwalają one na podstawie dyskretnych wartości próbek szybko obliczać wartości średnich i funkcji korelacyjnych. Przy obliczaniu funkcji korelacyjnych można stosować dwie metody:

1. Konwencjonalną - estymującę funkcję korelacji za pomocą bezpośrednich obliczeń średniej iloczynów w zbiorze próbek wartości sygnału.

2. Pośrednią - polegającą na obliczeniu gęstości widmowej za pomocą bezpośredniej szybkiej transformacji Fouriera, a następnie obliczenie odwrotnej transformaty Fouriera wykorzystują ścisły związek pomiędzy gęstością widmową a funkcją korelacyjną.

Otrzymane dyskretne wartości funkcji korelacyjnej w następnym etapie aproksymuje się funkcjami ciągłymi.

W formułach opisujących te funkcje występują pewne stałe parametry, które dobierane są w taki sposób, aby dyskretne wartości eksperymentalne były możliwie dokładnie aproksymowane przez aproksymującą funkcję korelacyjną formułę analityczną. Aproksymację tekę można przeprowadzić np. metodą najmniejszych kwadratów.

LITERATURA

1. L.G. Bażenow, P.S. Knopow - O zadaczach filtracji i prognoza dla słuczajnych poliej, udowletworiajuszczych stochasticzeskim differencjalnym uprawnieniom. Techniczeskaja Kibernetika, No 6, 1974.
2. J.S. Bendat, A.G. Piersol - Random data analysis and measurement procedures. New York, Wiley, Intersience, 1971.
3. A. Bensoussan - Filtrage optimal des systemes lineaires. Dunod, Paris 1971.
4. C.W. Costa Da Silva - Optimal estimation of the response of internally damped beams to random loads in the presence of measurement noise. Journal of Sound and Vibration, Vol. 47, No 4, pp. 485-493, 1976.
5. R. Curtain, P. Falb - Ito's lemma in infinite dimension. Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 31, s. 434-448, 1971.
6. R. Curtain, P. Falb - Stochastic differential equation in Hilbert space. Journal of Differential Equations, Vol. 10, 1971.
7. R. Curtain, A. Ichikawa, E. Ryan - Optimal location of sensors for filtering for distributed systems. Control Theory Report, No 50, University of Warwick, 1976.
8. R. Curtain, A. Ichikawa - Optimal location of sensors for filtering for distributed parameter systems. Proceedings of the IFIP Working Conference, Rome 1976.
9. F.L. Czernousko, W.B. Kołmanowski - Optimalnoje uprawlenie pri słuczajnych wozmuszczeniach. Nauka, Moskwa 1978.
10. H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias - Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen. Akademie Verleg, Berlin 1974.
11. A.J. Hapałow - Zadacza minimaksnoj średniekwadraticznoj filtracji dla paraboliczeskoj sistiemy. Prikładnaja matiematika i mechanika, tom 42, 1978.
12. D. Hilbert, R. Courant - Methods of mathematical physics. Vol.1, Vol. 2, Intersecience Publishers New York 1953.
13. A.J. Jegorow - Optimalnoje uprawlenie tiepłowymi i diffuzjonnymi procesami. Nauka, Moskwa 1978.
14. K. Joschida - Functional analysis. Springer Verlag, Göttingen 1965.
15. R.E. Kalman - A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering, ASME. Vol. 82, ss. 35-45, 1960.
16. R.E. Kalman, R.S. Bucy - New results in linear filtering and prediction theory. Journal of Basic Engineering, ASME. Vol. 83, ss. 95-107, 1961.
17. S. Kaliski (ed.) - Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
18. A.B. Kurżański - Uprawlenie i nabljudienie w usłowiach nieopriedielonnosti. Nauka, Moskwa 1977.
19. H.J. Kushner - On the optimal control of a system governed by a linear parabolic equation with white noise inputs. SIAM Journal on Control, Vol. 6, No 4, 1968, ss. 569-614.
20. H.J. Kushner - Filtering for linear distributed parameter systems. SIAM Journal on Control, Vol. 8, No 3, 1970, ss. 346-359.

21. P.S. Knopow - O zadaczach filtracji i prognoza dla słuczajnych funkcji. Kibernetika, No 6, 1972.

22. L.W. Kantorowicz, W.I. Kryłow - Pribliżennyje mietody wyższewo analiza. Fizmatgiz, Moskwa 1962.

23. L.W. Kantorowicz, A.P. Akiłow - Funkcjonalnyj analiz. Nauka, Moskwa 1977.

24. K. Lee - Modelling and estimation of distributed sysems with uncertain parameters. Proceedings of the IFIP Working Conference, Roma 1976.

25. J.L. Lions, E. Magenes - Problemes aux limites non homogenes applications. Vol. I, II, III, Dunod, Paris 1968.

26. J.L. Lions - Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. Dunod, Paris 1968.

27. K.A. Łurie - Optimalnoje uprawlenie w zadaczach matiematiczeskoj fiziki. Nauka, Moskwa 1975.

28. R. Marcus - Parabolic Ito equations. Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 198, 1974.

29. J.S. Meditch - Least - squares filtering and smoothing for linear distributed parameter systems. Automatica, Vol. 7, 1971.

30. S.G. Michlin - Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1972.

31. V.L. Rwaczew, L.V. Kurpa, N.G. Sklepus, L.A. Uczisziwili - Mietod R-funkcji w zadaczach ob izgibie i kolebaniach plastin złożnoj formy, Naukowa Dumka, Kiew 1973.

32. V.L. Rwaczew - Mietody algebry logiki w matiematiczeskoj fizikie. Naukowa Dumka, Kiew 1974.

33. R.T. Rockafellar - Convex analysis. Princeton University, 1970.

34. F. Schweppe - Układy dynamiczne w warunkach losowych. WNT, Warszawa 1978.

35. J.H. Seinfeld, M. Koda - Numerical implementation of distributed parameter filters with application to problemsin air pollution. Proceedings of the IFIP Working Conference, Roma 1976 ("Distributed Paremeter Systems - Modelling and Identification").

36. T.K. Sirazetdinow - Optimizacja sistem z rozpriedielannymi parametrami, Nauka, Moskwa 1977.

37. R. Solecki, J. Szymkiewicz - Układy pretowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne. Arkady, Warszawa 1964.

38. S.G. Tzafestas, J.M. Nichtingale - Optimal filtering, smoothing and prediction in linear distributed parameter systems. Proceedings of IEE, Vol. 115, No 8, ss. 1207-1212, 1968.

39. S.G. Tzafestas, J.M. Nichtingale - Concerning optimal filtering theory of linear distributed paremeter systems. Proceedings of IEE, Vol. 115, No 11, ss. 1737-1742, 1968.

40. S.G. Tzafestas - Boundary and volume filtering of linear distributed parameter systems. Elektronics letters, Vol. 5, No 9, ss. 199 - 200. 1969.

41. S.G. Tzafestas, J.M. Nichtingale - Maximum - likelihood approach to the optimal filtering of distributed parameter systems, Proceedings of IEE, Vol. 116, No 6, ss. 1085-1093, 1969.

42. S.G. Tzafestas - Bayesian approach to distributed - parameter filtering and smoothing. International Journal of Control, Vol. 15, No 2, ss. 273-195, 1972.

43. S.G. Tzafestas - On optimum distributed - parameter filtering and fixed-interval smoothing for coloured noise. IEEE Transaction on Automatic Control. Vol. AC-17, No 4, ss. 448-458, 1972.

44. S.G. Tzafestas - Fokker - Planck equation approach to nonlinear distributed parameter filtering. IFAK Conference, Budapeszt 1974.

45. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger - Theory of plates and shells. Mc Graw - Hill, New York 1959.

46. A. Waberski - Vibration statistics thin plates with complex form. AIAA Journal, Vol. 16, No 8 (August) ss. 788-794, 1978.

47. A. Waberski - Drgania stochastyczne płyt o złożonym kształcie, sztywno utwierdzonych na brzegu. Rozprawy Inzynierskie, tom 26, No 2, 1978.

48. A. Waberski - A note on the analysis of non - stationary random vibrations of plates of complex form. Journal of Sound and Vibration, Vol. 70, No 3 pp. 453-457, 1980.

49. A. Waberski - Application of theory of optimal filtering to boundary problems of dynamics of plates. Journal of Technical Physics, vol.21, No 1, 1980.

50. E. Wong - Stochastic processes in information and dynamical systems. Mc Graw-Hill 1971.

METODY TEORII OPTYMALNEJ ESTYMACJI W ZAGADNIENIACH DRGAŃ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono zastosowanie metod optymalnej estymacji do badania drgań układów dynamicznych o stałych rozłożonych w obecności zakłóceń losowych działających tak na układ jak i w przyrządach pomiarowych. Zastosowano w tym celu trzy modele optymalnych filtrów do badania drgań układów dynamicznych o stałych rozłożonych takich jak pręty i płyty. Pierwszy model (klasyczny) stanowi filtr rekursywny w sensie Kalmena i obowiązuje dla przypadku gdy zakłócenia losowe mają charakter "białych szumów". Drugi model, który jest oryginalnie opracowany przez autora stanowi zmodyfikowany filtr rekursywny obowiązujący dla przypadku, gdy zakłócenia losowe nie są "białymi szumami" i posiadają znane charakterystyki probabilistyczne. Trzeci model stanowi tzw. filtr minimaksowy, który nie wymaga znajomości charakterystyk probabilistycznych zakłóceń, a tylko znajomości obszaru ich występowania, który na ogół jest elipsoidą.

Rozważano podstawowe problemy występujące przy stosowaniu tych modeli z naświetleniem ich wad i zalet. Podano przykłady estymacji drgań w przypadku szeregu szczególnych przypadków jak drgania prętów i płyt.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ В ПРОБЛЕМАХ О КОЛЕБАНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Р е з ю м е

Настоящая работа указывает область применения методов оптимальной оценки для исследования колебаний динамических систем с параметрами распределения при наличии случайных помех, действующих как на системы так и в измерительных приборах. Для этой цели были применены три модели оптимальных фильтров для исследования колебаний динамических систем с параметрами распределения, таких как стержни и плиты. Первая модель (классическая) является по Кальману рекурсивным фильтром и действует тогда, когда случайные помехи принимают вид "белых шумов". Вторая модель - которая впервые была разработана автором - это модифицированный рекурсивный фильтр, действующий тогда, когда случайные помехи не являются "белыми шумами" и обладают известными вероятносиными характеристиками (свойствами теории вероятности). Третья модель - это, так называемый, минимаксный фильтр, который не требует знания вероятностных свойств помех, требует лишь знания области их присутствия, которая чаще всего является эллипсоидом.

Были рассмотрены основные проблемы выступающие в случае применения этих моделей с одновременным указанием их недостатков и преимуществ. Даны примеры оценки колебаний для рада особых случаев, например колебания стержней и плит.

METHODS OD OPTIMAL ESTIMATION THEORY IN PROBLEMS
OF DYNAMIC SYSTEMS VIBRATIONS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

S u m m a r y

The dissertation presents the application of optimal estimation methods in investigating of dynamic systems vibrations with parameters distributed in the presence of random interference acting on both the system and measuring instruments. Three methods of optimal filters were used to investigate dynamic systems vibrations with distributed parameters such as rods and plates. The first model (the classical one) is a recursive filter in the sense of Kalman and is obligatory for the case when random interference has the charakter of "white noise". The second model, which is originally worked out by the author, is a modified recursive filter which is obligatory for the case when random interference is not "white noise" and when it has known probabilistic characteristic curve. The third model is the so-called mini-max filter which does not demand the knowledge of characteristic curve of probabilistic interference but only the knowledge of area of their occurence, which is generally an ellipsoid.

Fundamental problems which occurred while applying these models were considered explicating the models' shortcomings and advantages. Example of vibrations estimation in many particular cases such as rods and plates were presented.

91
KT

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3359 | 82/40

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Raciborz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.