ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 82 Nr kol. 1360

Danuta JAMA, Aleksander Michał NAWRAT

STABILITY OF SOME ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION'S SYSTEM

Summary. In this paper we fix our attention to research of stability of systems of ordinary differential equations, which have practical applications. Our main result describes domains of asymptotic stability (and of course non-stability) of the system. We used the second Lapunov method, which simplifies the proof. Our main result may found applications to research of stability of the systems with constant cooficients. We give an example of the applications.

STABILNOŚĆ PEWNEGO UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Streszczenie. W pracy skoncentrowaliśmy się na badaniu stabilności układu równań różniczkowych zwyczajnych, który znajduje praktyczne zastosowania w niektórych zagadnieniach związanych z sieciami elektroenergetycznymi. W tym celu udowodniliśmy twierdzenia, które dają nam obszary asymptotycznej stabilności oraz oczywiście niestabilności tego układu. Z celów praktycznych zastosowaliśmy drugą metodę Lapunowa, która znacznie uprościła poniższe dowody. Głównym rezultatem tej pracy jest Twierdzenie 1, które może znaleźć praktyczne zastosowanie przy badaniu stabilności układów równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami. Następnie pokażemy zastosowania powyższych twierdzeń na przykładzie.

Mathematics Subject Classification: 34D20. Key words and phrases: second Lapunov method, stability, asymtotic stability

1. Main result

Theorem 1. *The ordinary differential equation's system:*

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= ax_1^z + bx_2^w, \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= -cx_1^w + dx_2^z, \end{aligned} \tag{1}$$

where: z, w- both odd integers, $z > w$ and $c, b \geqslant 0$ is:
(a) stable if either: $a, d < 0$ or ($d = 0$ and $a < 0$) or ($a = 0$ and $d < 0$),
(b) nonstable if either: $a, d > 0$ or ($d = 0$ and $a > 0$) or ($a = 0$ and $d > 0$).

Proof. If z and w are odd integers:

$$z = 2k - 1 \wedge w = 2n - 1 \text{ where } n, k \in N \text{ and } k > n.$$

Then the condition $z > w$ is satisfied.
In this case our system (1) has a form:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= ax_1^{2k-1} + bx_2^{2n-1}, \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= -cx_1^{2n-1} + dx_2^{2k-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

Take the Lapunov function $V(t, x_1, x_2)$, in the form

$$V(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2n}\left[cx_1^{2n} + bx_2^{2n}\right]. \tag{3}$$

It is easy to see, that this function is positively defined.
Now we count the first derivative from $V(t, x_1, x_2)$, and obtain:

$$\frac{dV}{dt} = cx_1^{2n-1}\frac{dx_1}{dt} + bx_2^{2n-1}\frac{dx_2}{dt} = acx_1^{2[(n+k)-1]} + bdx_2^{2[2n-1]}.$$

From the condition (a), that either $a, d < 0$ or ($d = 0$ and $a < 0$) or ($a = 0$ and $d < 0$) we have, that $\frac{dV}{dt} < 0$ since the Lapunov function $V(t, x_1, x_2)$ is positively defined, by one of the well known theorems from ordinary differential equations (see [2] p.41, [1], [3], [4]) we obtain, that the ordinary differential system is asymtoticaly stable.
From the condition (b), that either $a, d > 0$ or ($d = 0$ and $a > 0$) or ($a = 0$ and $d > 0$) we have $\frac{dV}{dt} > 0$, and by the above reasons the system is nonstable. The proof of Theorem 1 is complete.∎

Theorem 2. *The ordinary differential equation's system:*

$$\begin{aligned}\tfrac{dx_1}{dt} &= ax_1^z + bx_2^w,\\ \tfrac{dx_2}{dt} &= -cx_1^w + dx_2^z,\end{aligned} \tag{4}$$

where: z,w – both even integers, $z > w$ and $c, b \geqslant 0$, $x_1, x_2 > 0$, is:
(a) stable if either: $a, d < 0$ or ($d = 0$ and $a < 0$) or ($a = 0$ and $d < 0$),
(b) nonstable if either: $a, d > 0$ or ($a = 0$ and $d > 0$) or ($d = 0$ and $a > 0$).

Proof. If z and w are even,

$$z = 2k \wedge w = 2n, \text{ where } n, k \in N, \text{ and } k > n,$$

then the condition $z > w$ is satisfied. In this case our system (1) has a form:

$$\begin{aligned}\tfrac{dx_1}{dt} &= ax_1^{2k} + bx_2^{2n},\\ \tfrac{dx_2}{dt} &= -cx_1^{2n} + dx_2^{2k},\end{aligned} \tag{5}$$

We take the Lapunov function $V(t, x_1, x_2)$, in the form:

$$V(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2n+1}\left[cx_1^{2n+1} + bx_2^{2n+1}\right]. \tag{6}$$

This function is positively defined.

The first derivative of $V(t, x_1, x_2)$ is:

$$\frac{dV}{dt} = cx_1^{2n}\frac{dx_1}{dt} + bx_2^{2n}\frac{dx_2}{dt} = acx_1^{2(n+k)} + bdx_2^{2(n+k)}.$$

By the condition (a), we have, that $\frac{dV}{dt} < 0$. Since the Lapunov function $V(t, x_1, x_2)$ is positively defined, by one of well known theorems from ordinary differential equations (see [2] p.41, [1],[3],[4]) we obtain, that the system is assymptoticaly stable.

Similarly by the condition (b), $\frac{dV}{dt} > 0$ and the system is assymptoticaly stable. This complete the proof of Theorem 2.∎

Example 1. Consider the system:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= -7x_1^3 + 2x_2, \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= -x_1 + ex_2^3. \end{aligned} \tag{7}$$

In this case $n = 1$, $k = 2$, $a = -7$, $b = 2$, $d = e$ then the Lapunov function $V(t, x_1, x_2)$ is:

$$V(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + 2x_2^2\right],$$

and is positive defined.

The first derivative of function $V(t, x_1, x_2)$ is:

$$\frac{dV}{dt} = x_1\frac{dx_1}{dt} + 2x_2\frac{dx_2}{dt} = -7x_1^4 + 2ex_2^4.$$

So the system (7) is stable when $e < 0$.∎

References

[1] P. S. Parks, V. Hahn, *Stability theory,* Springer Verlag, 1981.

[2] J. La Salle, S. Lefeschetz, *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej,* PWN, Warszawa 1966.

[3] Л. Е. Ельсгольц, *Качественные методы в математическом анализе,* Москва 1955.

[4] Х. Х. Красовскии, *Некоторые задачи теории устойчивости движения,* ФизМатГиз, Москва 1959.

[5] А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом,* Гостехиздат, Москва 1951.

Recenzent: Janusz Szopa

Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice
e-mail: olek@zeus.polsl.gliwice.pl

Streszczenie

W pracy skoncentrowaliśmy się na badaniu stabilności układu równań różniczkowych zwyczajnych, który znajduje praktyczne zastosowania w niektórych zagadnieniach związanych z sieciami elektroenergetycznymi.

W tym celu udowodniliśmy twierdzenia, które dają nam obszary asymptotycznej stabilności oraz oczywiście niestabilności układu. Dla celów praktycznych zastosowaliśmy drugą metodę Lapunowa, która znacznie uprościła dowody. Głównym rezultatem tej pracy jest Twierdzenie 1, które może znaleźć praktyczne zastosowanie przy badaniu stabilności układów równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami.

Twierdzenie 1. *Układ równań różniczkowych zwyczajnych:*

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= ax_1^z + bx_2^w, \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= -cx_1^w + dx_2^z, \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie: z, w-liczby nieparzyste, $z > w$ i $c, b \geqslant 0$ jest:
a) stabilny, gdy: $a, d < 0$ lub ($a = 0$ i $d < 0$) lub ($d = 0$ i $a < 0$),
b) niestabilny, gdy: $a, d > 0$ lub ($a = 0$ i $d > 0$) lub ($d = 0$ i $a > 0$).

Twierdzenie 2. *Układ równań różniczkowych zwyczajnych:*

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= ax_1^z + bx_2^w, \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= -cx_1^w + dx_2^z, \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie: z, w - liczby parzyste, $z > w$ i $c, b \geqslant 0$ jest:
a) stabilny, gdy: $a, d < 0$ lub ($a = 0$ i $d < 0$) lub ($d = 0$ i $a < 0$),
b) niestabilny, gdy: $a, d > 0$ lub ($a = 0$ i $d > 0$) lub ($d = 0$ i $a > 0$).

Następnie pokazaliśmy zastosowania powyższych twierdzeń na przykładzie.