

Elżbieta KASPERSKA, Damian SŁOTA

PORÓWNANIE MODELOWANIA SYSTEMÓW GOSPODARCZYCH METODĄ DYNAMIKI SYSTEMOWEJ I METODĄ TRANSFORMATY LAPLACE'A

Streszczenie. Na przykładzie pewnych prostych systemów gospodarczych dokonuje się analizy porównawczej dokładności rozwiązań problemów zarządzania, posługując się metodą Dynamiki Systemowej i rozwiązaniem równań różniczkowych metodą transformaty Laplace'a.

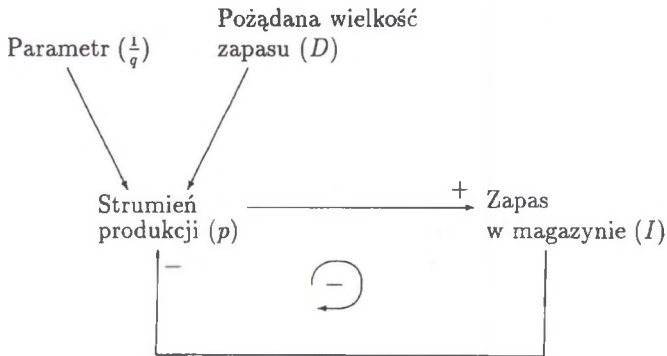
COMPUTER MODELLING OF ECONOMIC SYSTEMS BY SYSTEM DYNAMICS METHOD COMPARE WITH METHOD OF LAPLACE TRANSFORM

Summary. Some simply economic systems are the base for compare the precision of solutions of the management problems making use of method of System Dynamics and method of Laplace Transform.

1. Wprowadzenie do modelowania systemów gospodarczych metodą Dynamiki Systemowej

Dynamika Systemowa (System Dynamics) wyrosła na gruncie prób zastosowania idei sterowania w systemach ze sprzężeniem zwrotnym, znanej i stosowanej w naukach technicznych, w odniesieniu do systemów społeczno-ekonomicznych. Metoda ta skupia uwagę na dynamice systemu, będącej wynikiem oddziaływania otoczenia (tzw. wejścia egzogeniczne) oraz działaniach mechanizmów regulujących pracę systemu, mających postać sprzężeń zwrotnych. Znajduje ona zastosowanie w dużych, nieliniowych systemach, gdzie bada się strukturę reguł podejmowania decyzji, sterujących pracą tych systemów. Koncentruje uwagę na człowieku, na przepływie informacji i decyzji w systemie zarządzania. Ana-

logie i różnice między ściśle matematycznym odwzorowaniem pętli sprzężenia zwrotnego (i jego konsekwencjami w postaci równań różniczkowych) a jego modelowaniem w konwencji Dynamiki Systemowej pokazemy na przykładzie prostego obiektu typu produkcja – magazyn. Rysunek 1 przedstawia pętlę sprzężenia między strumieniem produkcji a zapasem w magazynie. Założona jest pożądana wielkość zapasu (D). Produkcja (p) jest tak regulowana, że stanowi ułamek ($\frac{1}{q}$) różnicy między pożądaną wielkością zapasu (D) a aktualną wielkością zapasu (I).



Rys. 1. Pętla sprzężenia zwrotnego między produkcją i magazynem
Fig. 1. Feedback between production and magazine

Tak więc otrzymujemy następujące zależności:

$$\begin{cases} p = \frac{D - I}{q}, \\ p = I', \end{cases} \quad (1)$$

co daje:

$$qI' + I = D. \quad (2)$$

Przyjmując wartość początkową:

$$I(0) = 0 \quad (3)$$

oraz stosując przekształcenie Laplace'a (patrz [6]) do obu stron równania (2) otrzymujemy:

$$qs\mathcal{L}(I) + \mathcal{L}(I) = \mathcal{L}(D),$$

$$\mathcal{L}(I) = \frac{\mathcal{L}(D)}{1 + qs}. \quad (4)$$

Powyższe równanie rozwiążemy stosując różne charakterystyki wielkości D , a mianowicie:

(a) impuls jednostkowy (delta Diraca); można łatwo wykazać, że transformatą Laplace'a tego impulsu jest funkcja:

$$1(s) = \begin{cases} 1 & \text{dla } s \neq 0, \\ 0 & \text{dla } s = 0, \end{cases}$$

bowiem:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \frac{1}{a} e^{-st} dt = 1,$$

(b) skok o wielkości A ; transformata Laplace'a tej funkcji wynosi $\frac{A}{s}$,

(c) wzrost liniowy $D(t) = t$; transformata Laplace'a w tym przypadku wynosi $\frac{1}{s^2}$.

Tak więc w przypadku (a) z równania (4) otrzymamy:

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\mathcal{L}(D)}{1+qs} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1+qs} \right) = \mathcal{L}^{-1}(1) * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1+qs} \right) = \\ &= \delta(t) * \frac{1}{q} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{q}} \right) = \delta(t) * \frac{1}{q} e^{-\frac{t}{q}} = \frac{1}{q} \int_0^t \delta(t-\tau) e^{-\frac{\tau}{q}} d\tau = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, \\ \frac{1}{q} e^{-\frac{t}{q}} & \text{dla } t > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

W przypadku (b) otrzymamy:

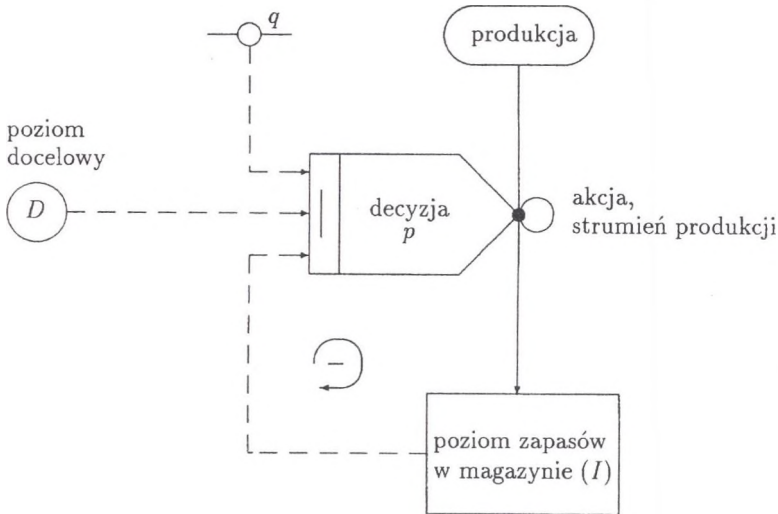
$$\begin{aligned} I(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{A}{s}}{1+qs} \right) = A \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s(1+qs)} \right) = \\ &= \frac{A}{q} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s(s + \frac{1}{q})} \right) = A \left(1 - e^{-\frac{t}{q}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

A w przypadku (c):

$$I(t) = \frac{1}{q} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2(s + \frac{1}{q})} \right) = t - q + q \cdot e^{-\frac{t}{q}}. \quad (7)$$

Równania (5)-(7) przedstawiają charakterystyki wielkości zapasu przy różnych wartościach charakterystyk wielkości pożądanej zapasu (co, jak pokazano na rysunku 1, daje pętlę sprzężenia zwrotnego regulującą strumień produkcji wysyłany do magazynu).

Ten sam problem widziany w konwencji Dynamiki Systemowej (patrz [1, 2, 8]), stosując graficzne symbole Łukaszewicza, przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Pętla sprzężenia zwrotnego między produkcją i magazynem w konwencji Dynamiki Systemowej

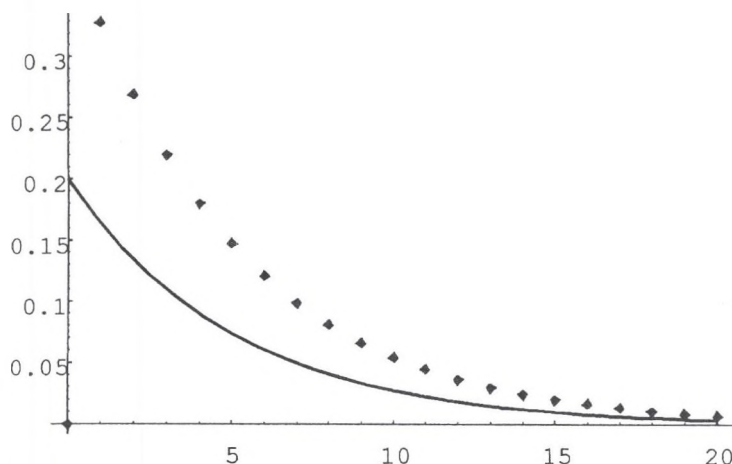
Fig. 2. Feedback between production and magazine by System Dynamics

W konwencji Dynamiki Systemowej (używając skali czasu: $j - k - l$) otrzymamy następujące równania modelu matematycznego:

$$\begin{cases} I.k = I.j + dt * p.jk, \\ p.kl = (D.k - I.k) / q. \end{cases} \quad (8)$$

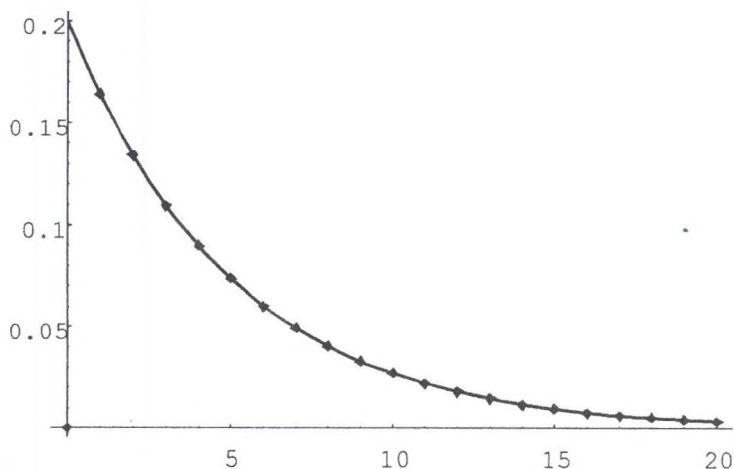
Przyjmujemy wartość początkową poziomowi $I(0) = 0$ jak poprzednio. Przez dt oznaczamy obliczeniowy przyrost czasu, tzw. krok symulacji.

Wykorzystując język symulacyjny **Dynamo** na PC przeprowadzono trzy podstawowe symulacje zachowania się wielkości poziomu $I(t)$ w zależności od wymienionych uprzednio charakterystyk (a)-(c). Rysunki 3-6 przedstawiają charakterystyki $I(t)$ w założonym horyzoncie symulacji 20 h, przy kroku obliczeń $dt = 0.01$ oraz $q = 5$ i $A = 1$. Na rysunkach zaznaczono też przebieg obliczonych (przy użyciu transformaty Laplace'a) dokładnych charakterystyk $I(t)$ w założonych trzech przypadkach. Daje się zauważyć dużą zgodność przebiegu symulacji. Ich porównania dokonamy w rozdziałach następujących dla prostych modeli matematycznych obiektów gospodarczych.



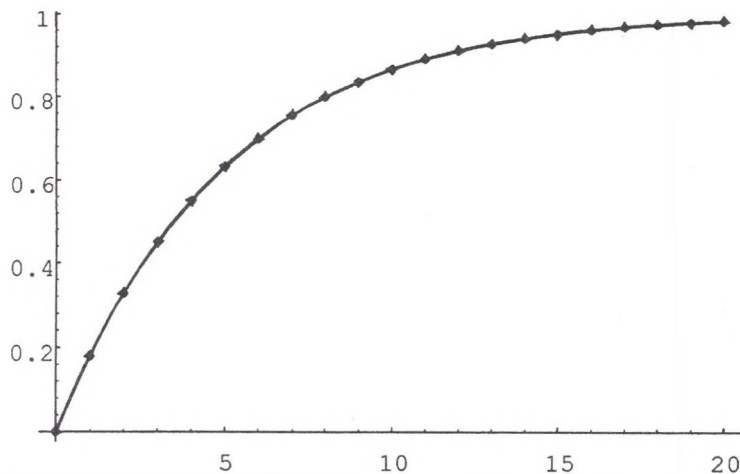
Rys. 3. Dynamika poziomu zapasu w magazynie $I(t)$ w odpowiedzi na impuls jednostkowy D (przypadek (a), linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji przy pierwszym przybliżeniu delty Diraca)

Fig. 3. Dynamics of supply level in magazine $I(t)$ by reaction on unit impulse D (case (a), solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time in the first approximation of Dirac delta function)



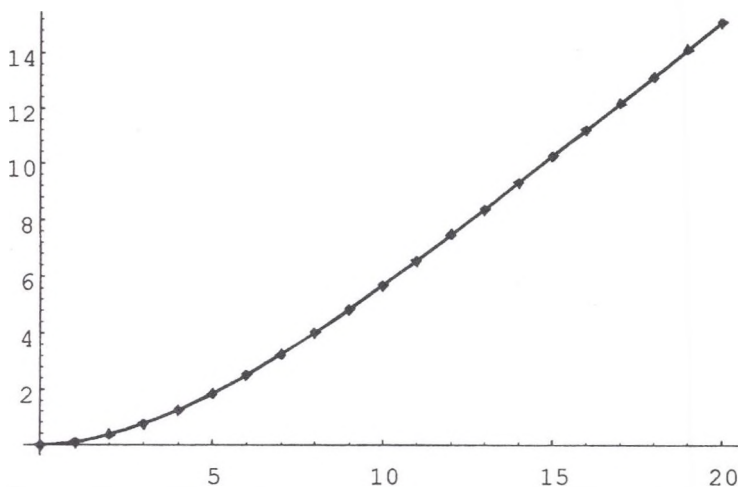
Rys. 4. Dynamika poziomu zapasu w magazynie $I(t)$ w odpowiedzi na impuls jednostkowy D (przypadek (a), linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji przy drugim przybliżeniu delty Diraca)

Fig. 4. Dynamics of supply level in magazine $I(t)$ by reaction on unit impulse D (case (a), solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time in the second approximation of Dirac delta function)



Rys. 5. Dynamika poziomu zapasu w magazynie $I(t)$ w odpowiedzi na skok (przypadek (b), $A = 1$, linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

Fig. 5. Dynamics of supply level in magazine $I(t)$ by reaction on jump (case (b), $A = 1$, solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)

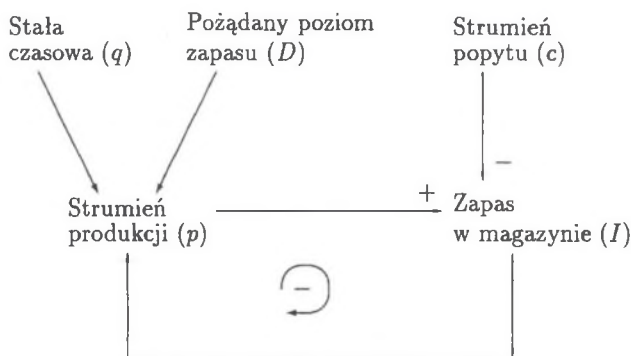


Rys. 6. Dynamika poziomu zapasu w magazynie $I(t)$ w odpowiedzi na wzrost liniowy $D(t) = t$ (przypadek (c), linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

Fig. 6. Dynamics of supply level in magazine $I(t)$ by reaction on line growth $D(t) = t$ (case (c), solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)

2. Opis prostych systemów gospodarczych w konwencji równań różniczkowych. Ich rozwiązanie metodą transformaty Laplace'a

Rozważmy prosty system produkcja-popyt z jednym sprzężeniem zwrotnym ujemnym.



Rys. 7. System produkcja-popyt z jednym sprzężeniem zwrotnym
Fig. 7. Production-demand system with one feedback

Przyjmijmy D jako parametr, $I(0) = D$ i sformułujmy równania:

$$\begin{cases} I' = p - c, \\ p = \frac{D - I}{q}. \end{cases} \quad (9)$$

A więc

$$I' + \frac{I}{q} = \frac{D}{q} - c.$$

Stosując przekształcenie Laplace'a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(I' + \frac{I}{q}\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{D}{q} - c\right), \\ \mathcal{L}(I') + \frac{1}{q}\mathcal{L}(I) &= \frac{1}{q}\mathcal{L}(D) - \mathcal{L}(c), \\ sI(s) - I(0) + \frac{I(s)}{q} &= \frac{1}{q}\frac{D}{s} - c(s). \end{aligned}$$

Ponieważ $I(0) = D$, to mamy:

$$sI(s) - D + \frac{I(s)}{q} = \frac{1}{q} \frac{D}{s} - c(s),$$

$$I(s) \left(s + \frac{1}{q} \right) = D + \frac{1}{qs} D - c(s),$$

$$I(s) = \frac{D}{s + \frac{1}{q}} + \frac{D}{qs \left(s + \frac{1}{q} \right)} - \frac{c(s)}{s + \frac{1}{q}}.$$

Biorąc transformatę odwrotną, otrzymujemy:

$$I(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{D}{s + \frac{1}{q}} + \frac{D}{qs \left(s + \frac{1}{q} \right)} - \frac{c(s)}{s + \frac{1}{q}} \right),$$

$$I(t) = D e^{-\frac{t}{q}} + D \left(1 - e^{-\frac{t}{q}} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{c(s)}{s + \frac{1}{q}} \right),$$

$$I(t) = D - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{c(s)}{s + \frac{1}{q}} \right).$$

Uwzględniając trzy przypadki charakterystyk $c(t)$, otrzymamy:

(a) w przypadku impulsu jednostkowego:

$$I(t) = \begin{cases} D & \text{dla } t = 0, \\ D - e^{-\frac{t}{q}} & \text{dla } t > 0, \end{cases} \quad (10)$$

(b) w przypadku skoku o wielkości A :

$$I(t) = D - qA \left(1 - e^{-\frac{t}{q}} \right) = D - qA + qA e^{-\frac{t}{q}}, \quad (11)$$

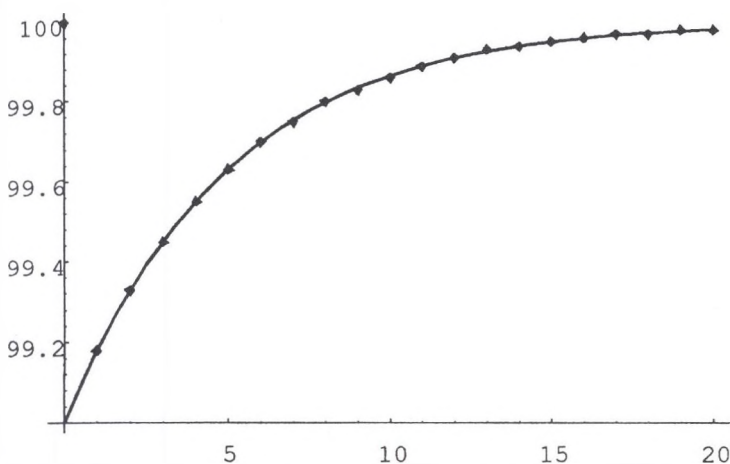
(c) w przypadku przyrostu liniowego $c(t) = t$:

$$I(t) = D - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 \left(s + \frac{1}{q} \right)} \right) = D - q \left(t - q + q e^{-\frac{t}{q}} \right). \quad (12)$$

Rozważany system w konwencji Coyle'a (metoda Dynamiki Systemowej) przyjmie następującą prostą postać:

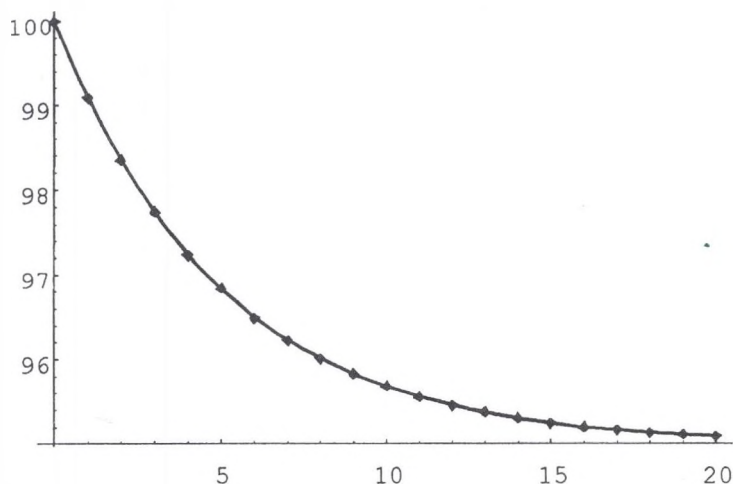
$$\begin{cases} I.k = I.j + dt * (p.jk - c.jk), \\ p.kl = (D - I.k) / q, \end{cases} \quad (13)$$

gdzie: $I(0) = D$, dt - krok symulacji, D - parametr, c - wejście o założonej charakterystyce (trzy przypadki), realizowanej w języku symulacyjnym *Dynamo* przez funkcje standardowe (lub ich kombinacje), co zostanie omówione w rozdziale 3.



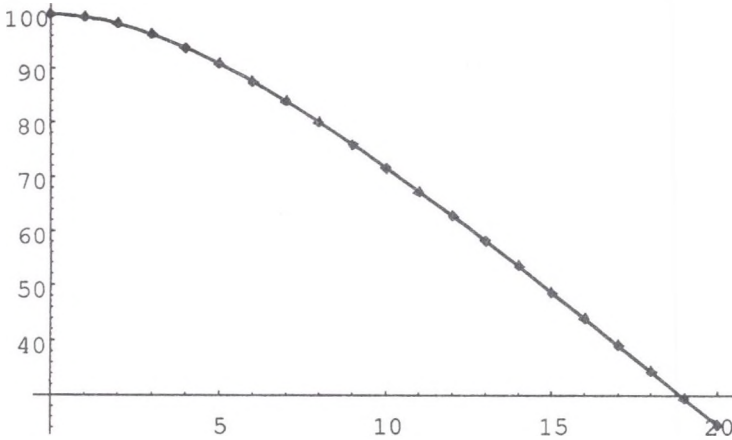
Rys. 8. Dynamika poziomu zapasu $I(t)$, w systemie produkcja-popyt z jednym sprzężeniem zwrotnym, w odpowiedzi na impuls jednostkowy c (przypadek (a), linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

Fig. 8. Dynamics of supply level $I(t)$ in production-demand system with one feedback by reaction on unit impulse c (case (a), solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)



Rys. 9. Dynamika poziomu zapasu $I(t)$, w systemie produkcja-popyt z jednym sprzężeniem zwrotnym, w odpowiedzi na skok jednostkowy (przypadek (b), $A = 1$, linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

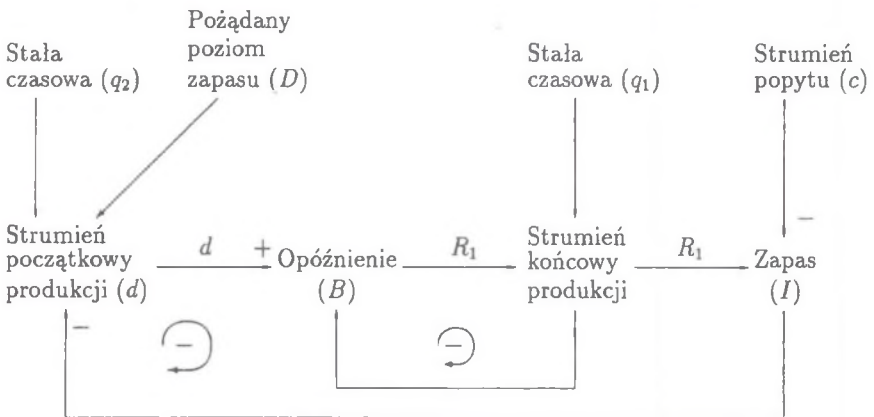
Fig. 9. Dynamics of supply level $I(t)$ in production-demand system with one feedback by reaction on unit jump (case (b), $A = 1$, solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)



Rys. 10. Dynamika poziomu zapasu $I(t)$, w systemie produkcja-popyt z jednym sprzężeniem zwrotnym, w odpowiedzi na wzrost liniowy $c(t) = t$ (przypadek (c), linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

Fig. 10. Dynamics of supply level $I(t)$ in production-demand system with one feedback by reaction on line growth $c(t) = t$ (case (c), solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)

Rozważmy teraz przypadek systemu produkcja-popyt z dwoma sprzężeniami zwrotnymi i dwoma miejscami akumulacji. Zmienna B reprezentuje opóźnienie w procesie produkcji, natomiast I – zapas, który jest regulowany do pożądanej wartości D .



Rys. 11. System produkcja-popyt z dwoma sprzężeniami zwrotnymi

Fig. 11. Production-demand system with two feedback

Odpowiedni model matematyczny systemu przedstawionego na rysunku 11 będzie miał postać:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{B}{q_1}, \\ B' = d - R_1, \\ I' = R_1 - c, \\ d = \frac{D - I}{q_2}. \end{cases} \quad (14)$$

Otrzymujemy stąd:

$$\begin{cases} I' = d - B' - c, \\ R_1' = I'' + c', \\ B' = q_1 R_1' = q_1(I'' + c'). \end{cases}$$

Eliminując B' , mamy:

$$q_1(I'' + c') = d - I' - c.$$

Ponieważ $I = D - q_2 d$, więc mamy:

$$\begin{aligned} I' &= -q_2 d', \\ I'' &= -q_2 d''. \end{aligned}$$

A więc

$$q_1 q_2 d'' + q_2 d' + d = c + q_1 c'.$$

Stosując przekształcenie Laplace'a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1 q_2 d'') + \mathcal{L}(q_2 d') + \mathcal{L}(d) &= \mathcal{L}(c) + \mathcal{L}(q_1 c'), \\ q_1 q_2 [s^2 \mathcal{L}(d) - s d(0) - d'(0)] + q_2 [s \mathcal{L}(d) - d(0)] + \mathcal{L}(d) &= \\ &= \mathcal{L}(c) + q_1 [s \mathcal{L}(c) - c(0)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Przyjmując warunki początkowe $I(0) = D$ i $B(0) = 0$ oraz określając popyt $c(t) = 1$, z układu (14) znajdujemy, że:

$$\begin{cases} d(0) = 0, \\ d'(0) = \frac{1}{q_2}. \end{cases}$$

Wykorzystując to możemy równanie (15) zapisać w postaci:

$$q_1 q_2 s^2 \mathcal{L}(d) - q_1 + q_2 s \mathcal{L}(d) + \mathcal{L}(d) = \mathcal{L}(c) + q_1 s \mathcal{L}(c) - q_1.$$

Skąd dostajemy:

$$\mathcal{L}(d) (q_1 q_2 s^2 + q_2 s + 1) = \mathcal{L}(c) (1 + q_1 s),$$

czyli

$$\mathcal{L}(d) = \frac{\mathcal{L}(c) (1 + q_1 s)}{q_1 q_2 s^2 + q_2 s + 1}.$$

Biorąc transformatę odwrotną, dostajemy:

$$\mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}(d) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\mathcal{L}(c) (1 + q_1 s)}{q_1 q_2 s^2 + q_2 s + 1} \right).$$

Ponieważ dla skoku jednostkowego c jest $\mathcal{L}(c) = \frac{1}{s}$, to mamy:

$$d(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 + q_1 s}{s (q_1 q_2 s^2 + q_2 s + 1)} \right).$$

Przekształcając ostatnie równanie, otrzymujemy:

$$d(t) = \frac{1}{q_1 q_2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 + q_1 s}{s \left(s^2 + \frac{s}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} \right)} \right). \quad (16)$$

Niech p_1 i p_2 będą pierwiastkami równania

$$s^2 + \frac{s}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} = 0,$$

czyli

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{1}{q_1} \pm \sqrt{\frac{1}{q_1^2} - \frac{4}{q_1 q_2}}}{2},$$

a więc

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{q_2 - 4q_1}{q_2}}}{2q_1},$$

dla $q_2 < 4q_1$ pierwiastki będą zespolone, a dla $q_2 \geq 4q_1$ rzeczywiste.

Korzystając z tego możemy równanie (16) zapisać w postaci:

$$d(t) = \frac{1}{q_1 q_2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 + q_1 s}{s(s - p_1)(s - p_2)} \right). \quad (17)$$

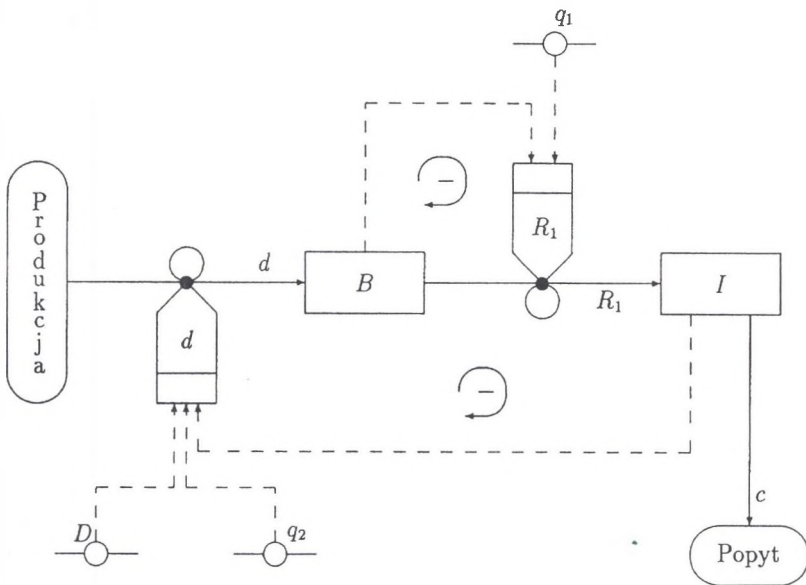
Stąd wykorzystując metodę rozkładu na ułamki proste, otrzymujemy:

$$d(t) = \frac{1}{q_1 q_2} \left(\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{q_1 p_1 + 1}{p_1 (p_1 - p_2)} e^{tp_1} - \frac{q_1 p_2 + 1}{p_2 (p_1 - p_2)} e^{tp_2} \right). \quad (18)$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $p_1 = p_2 = p$, to wtedy $q_2 = 4q_1$, i mamy:

$$d(t) = \frac{1}{4q_1^2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{4q_1^2}{s} - \frac{4q_1^2}{s-p} - \frac{q_1}{(s-p)^2} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-p} - \frac{1}{4q_1} \frac{1}{(s-p)^2} \right) = 1 - e^{pt} - \frac{1}{4q_1} e^{pt} t. \quad (19)$$

W rozdziale trzecim zostaną zaprezentowane wyniki symulacji dla przykładowych q_1, q_2 dla przypadków: dwu pierwiastków zespolonych, dwu pierwiastków rzeczywistych i jednego podwójnego pierwiastka rzeczywistego.



Rys. 12. System z dwoma sprzężeniami zwrotnymi w konwencji Łukaszewicza
 Fig. 12. Two feedback system by Łukaszewicz

Rozważany powyżej system z dwoma sprzężeniami zwrotnymi, w konwencji Dynamiki Systemowej, przyjmie postać graficzną jak na rysunku 12 oraz następującą postać matematyczną:

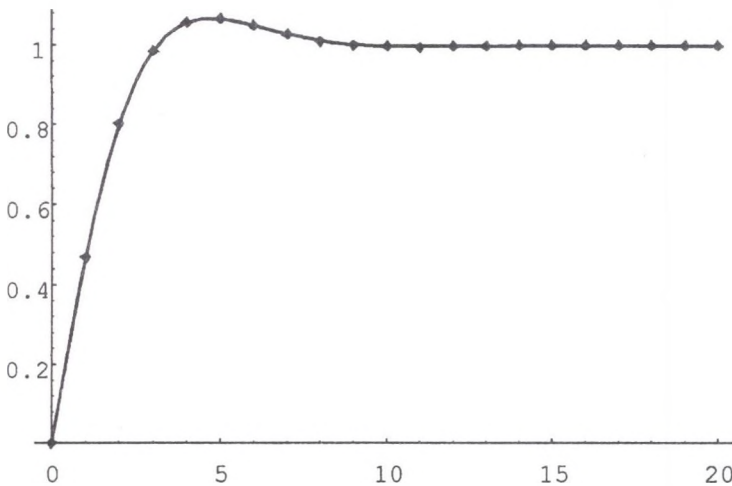
$$\begin{cases} R_{1.kl} = B.k/q_1, \\ I.k = I.j + dt * (R_{1.jk} - c.jk), \\ B.k = B.j + dt * (d.jk - R_{1.jk}), \\ d.kl = (D - I.k)/q_2, \end{cases}$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} I(0) = D, \\ B(0) = 0. \end{cases}$$

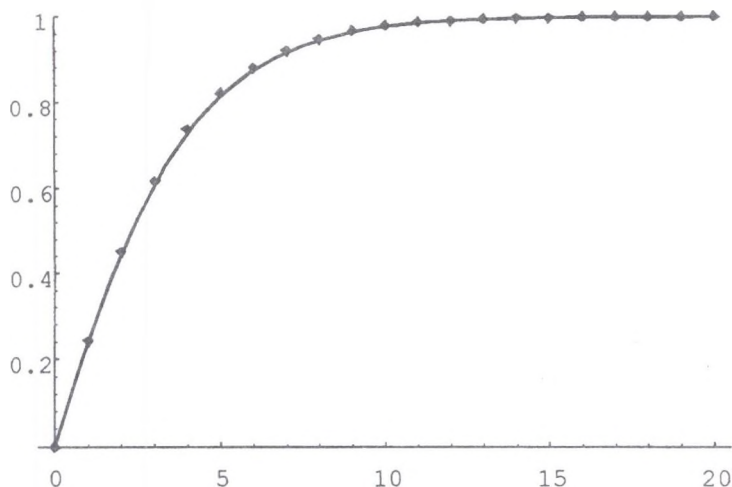
Parametrami modelu są q_1 , q_2 i D . Strumień *c.kl* obrazuje charakterystykę wejściową (skok) realizowaną w języku symulacyjnym *Dynamo* przez funkcję standardową.

Przykładowe wartości parametrów oraz wejścia modelu będą podane w rozdziale trzecim, gdzie omówiona zostanie symulacja zachowań systemu z dwoma sprzężeniami zwrotnymi, przy wykorzystaniu modelu uzyskanego przy użyciu transformaty Laplace'a i modelu w konwencji *Dynamiki Systemowej*.



Rys. 13. Dynamika strumienia produkcji $d(t)$, w systemie produkcja-popyt z dwoma sprzężeniami zwrotnymi, dla $c(t) = 1$, $q_2 = 2$ i $q_1 = 1$ (dwa pierwiastki zespolone, linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

Fig. 13. Dynamics of production rate $d(t)$ in production-demand system with two feedbacks, for $c(t) = 1$, $q_2 = 2$ and $q_1 = 1$ (two complex roots, solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)

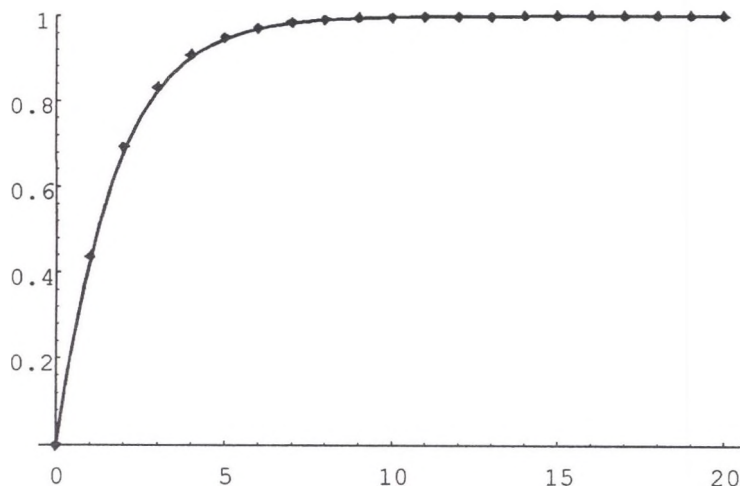


Rys. 14. Dynamika strumienia produkcji $d(t)$, w systemie produkcja-popyt z dwoma sprzężeniami zwrotnymi, dla $c(t) = 1$, $q_2 = 4$ i $q_1 = 1$ (jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty, linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

Fig. 14. Dynamics of production rate $d(t)$ in production-demand system with two feedbacks, for $c(t) = 1$, $q_2 = 4$ and $q_1 = 1$ (one double real root, solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)

3. Symulacja zachowań modelowanych systemów przy użyciu modelu dokładnego i uproszczonego

W literaturze przedmiotu występuje szereg określeń „symulacji komputerowej”. Jedną z popularnych definicji daje Naylor w [9] mówiąc: „symulację zdefiniujemy jako technikę numeryczną służącą do dokonywania eksperymentów na modelach matematycznych, które opisują, przy pomocy komputera, zachowanie złożonego systemu w długim przedziale czasu”. Inni autorzy, m.in. Kochenburger [7], podkreślają, że symulacja dotyczy tylko modeli dynamicznych, czyli takich, które uwzględniają zarówno opóźnienia czasowe, jak i właściwości akumulacyjne systemów. Takie właściwości odwzorowuje właśnie metoda Dynamiki Systemowej. Poziomy, jako jedno z podstawowych elementów modeli dynamicznych, to właśnie miejsca akumulacji czy to dóbr materialnych, czy to ludzi, pieniędzy itd., w zależności od modelowanych obszarów.



Rys. 15. Dynamika strumienia produkcji $d(t)$, w systemie produkcja-popyt z dwoma sprzężeniami zwrotnymi, dla $c(t) = 1$, $q_2 = 2$ i $q_1 = \frac{1}{4}$ (dwa różne pierwiastki rzeczywiste, linia ciągła – charakterystyka dokładna, linia kropkowana – charakterystyka otrzymana w czasie symulacji)

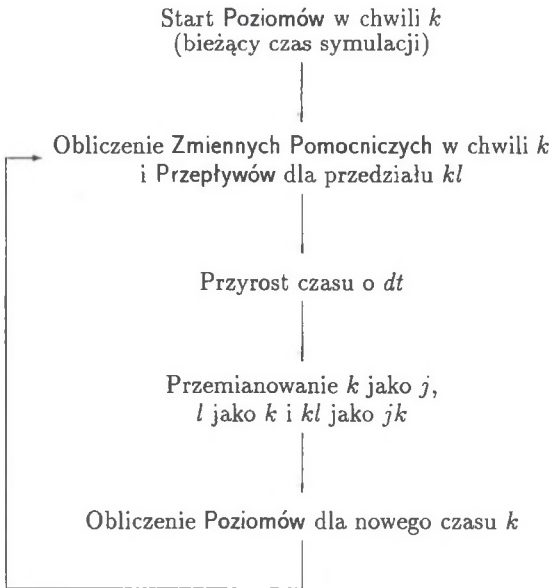
Fig. 15. Dynamics of production rate $d(t)$ in production-demand system with two feedbacks, for $c(t) = 1$, $q_2 = 2$ and $q_1 = \frac{1}{4}$ (two different real roots, solid line – exact characteristic, dot line – characteristic taken in the simulation time)

Symulacja w metodzie Dynamiki Systemowej realizowana jest według schematu przedstawionego na rysunku 16. Schemat ten odtwarza język symulacyjny Dynamo, stworzony dla potrzeb tej metody.

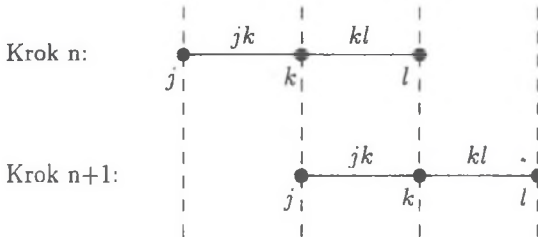
Symulację modelu dokładnego zrealizowano używając pakietu Mathematica, przy pomocy którego wykonano wykresy wcześniej obliczonych rozwiązań dokładnych. Symulację modelu Dynamiki Systemowej oprogramowano w języku Dynamo. Następnie wyniki tej symulacji przeniesiono do programu Mathematica i przedstawiono w celu porównania na wspólnym wykresie z wynikami dokładnymi.

Jako horyzont symulacji w obu modelach przyjęto $h = 20$ dni, a krok symulacji $dt = 0.01$. W modelu pierwszym (z jednym sprzężeniem zwrotnym) wprowadzono, opisanie w rozdziale drugim, trzy zaburzenia w pracy systemu (odzworowujące tendencje popytu $c(t)$), na rysunkach 8–10 przedstawiono wyjściowe charakterystyki zapasu $I(t)$ w tych trzech przypadkach dla modelu dokładnego (linia ciągła) oraz modelu Dynamiki Systemowej (linia kropkowana).

W modelu drugim (z dwoma sprzężeniami zwrotnymi) wprowadzono jak poprzednio charakterystykę popytu $c(t)$, typu skoku o wartości $A = 1$. Założono dodatkowo trzy możliwości relacji między q_1 i q_2 .



Rys. 16. Schemat symulacji w metodzie Dynamiki Systemowej
 Fig. 16. Scheme of simulation by System Dynamics method



Rys. 17. Uprływ czasu symulacji w metodzie Dynamiki Systemowej
 Fig. 17. Time shift in simulation by System Dynamics method

W przypadku pierwszym (rysunek 13) przyjęto $q_2 < 4q_1$, co daje dwa pierwiastki zespolone wielomianu charakterystycznego. Tak więc dla $q_1 = 1$ i $q_2 = 2$ otrzymano:

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Podstawiając otrzymane wartości do równania (18), uzyskamy:

$$d(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}. \quad (20)$$

Charakterystyka ta jest typu oscylacyjnego.

W przypadku drugim (rysunek 14) przyjęto $q_2 = 4q_1$, co daje przy $q_1 = 1$ pierwiastek rzeczywisty (podwójny)

$$p = -\frac{1}{2}.$$

Charakterystyka $d(t)$ ma wtedy postać:

$$d(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}t. \quad (21)$$

W przypadku ostatnim (rysunek 15) przyjęto $q_1 = \frac{1}{4}$ i $q_2 = 2$, co daje dwa pierwiastki rzeczywiste:

$$\begin{aligned} p_1 &= -2 + \sqrt{2}, \\ p_2 &= -2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Charakterystyka $d(t)$ przyjmuje wówczas postać:

$$d(t) = 1 - \frac{1}{8}e^{-(2+\sqrt{2})t} \left((4 + 3\sqrt{2})e^{2\sqrt{2}t} + 4 - 3\sqrt{2} \right). \quad (22)$$

Na rysunkach 13-15 przedstawiono charakterystyki strumienia produkcji w odpowiedzi na skokową zmianę wielkości popytu w trzech opisanych powyżej przypadkach. Otrzymano różne w charakterze typy odpowiedzi, ale zarówno oscylacyjny, jak i wykładnicze dążą do charakterystyki popytu (oscylacyjny z przeregulowaniami – w sposób tłumiony, a przy pierwiastkach rzeczywistych bez tłumienia, przy czym „graniczny”, najbardziej zbliżony do charakterystyki popytu otrzymuje się przy pierwiastku rzeczywistym podwójnym).

Analizę porównawczą wyników symulacji na modelu dokładnym oraz w Dynamice Systemowej wykonamy w rozdziale następnym.

4. Analiza wyników symulacji

Już w rozdziale pierwszym, przy analizie prostego obiektu produkcja-magazyn, można zauważyć dużą zgodność wyników symulacji na modelu dokładnym oraz w konwencji Dynamiki Systemowej. Przyjrzyjmy się rysunkom 3-6, gdzie obie charakterystyki zaznaczono wspólnie. Na rysunkach 3 i 4 zaprezentowano wyniki symulacji dla dwóch przybliżeń delty Diraca. W pierwszej symulacji przybliżoną deltę Diraca określono wzorem:

$$D(t) = \begin{cases} \frac{1}{dt} & \text{dla } t \in \langle 0, dt \rangle, \\ 0 & \text{dla } t > dt, \end{cases}$$

natomiast w drugiej symulacji – wzorem:

$$D(t) = \begin{cases} \frac{1}{dt} & \text{dla } t \in (0, dt), \\ 0 & \text{dla } t \geq dt. \end{cases}$$

Znaczne różnice pierwszych kilku wartości obu symulacji wynikają stąd, że w pierwszym przypadku (rysunek 3) wartości niezerowe funkcji $D(t)$ były wykorzystywane dwukrotnie (dla $t = 0$ i $t = dt$), natomiast w drugim (rysunek 4) tylko raz (dla $t = 0$). Wynika to z istoty symulacji dyskretnej, jaką jest symulacja w metodzie Dynamiki Systemowej, to znaczy po każdym kroku obliczeń czas t jest zwiększany o krok symulacji dt (rysunek 16).

W pozostałych przypadkach można zauważyć bardzo dobre przybliżenie charakterystyk dynamiki poziomu zapasu zarówno przy odpowiedzi na skok, jak i na wzrost liniowy.

Ocenę błędu uzyskiwanego przy symulacji na modelu Dynamiki Systemowej, w stosunku do modelu dokładnego, dokonamy dla przedstawionych w rozdziale drugim modeli:

- produkcja-popyt z jednym sprzężeniem zwrotnym,
- produkcja-popyt z dwoma sprzężeniami zwrotnymi.

Na podstawie charakterystyki wielkości zapasu $I(t)$ w odpowiedzi na zmiany popytu (patrz rysunki 8-10) w modelu pierwszym zbudowano tabelę 1 służącą do oceny błędów wyników uzyskiwanych w trakcie symulacji, w założonym horyzoncie symulacji.

Można zauważyć dużą zgodność wyników symulacji na modelach Dynamiki Systemowej w stosunku do modeli dokładnych, przy czym zgodność ta jest idealna w przypadku odpowiedzi systemu na impuls jednostkowy (przy drugim przybliżeniu opisanym powyżej).

Ocenę błędów dla modelu drugiego z dwoma sprzężeniami zwrotnymi przedstawiono w tabeli 2. Tu również występuje duża zgodność wyników, szczególnie w przypadku pierwiastka podwójnego.

Oceny błędów zawarte w tabelach 1 i 2 potwierdzają, w przypadkach tych prostych systemów, przydatność metody Dynamiki Systemowej i jej dużą dokładność numeryczną.

Tabela 1

Wyniki symulacji systemu produkcja-popyt z jednym sprzężeniem zwrotnym

Czas	(a)		(b)		(c)	
t	$I_{sym}(t)$	$I_{dok}(t)$	$I_{sym}(t)$	$I_{dok}(t)$	$I_{sym}(t)$	$I_{dok}(t)$
0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
1	99.18	99.18	99.09	99.09	99.54	99.53
2	99.33	99.33	98.35	98.35	98.25	98.24
3	99.45	99.45	97.74	97.74	96.29	96.28
4	99.55	99.55	97.24	97.25	93.78	93.77
5	99.63	99.63	96.84	96.84	90.81	90.80
6	99.70	99.70	96.50	96.51	87.48	87.47
7	99.75	99.75	96.23	96.23	83.84	83.84
8	99.80	99.80	96.01	96.01	79.96	79.95
9	99.83	99.83	95.83	95.83	75.87	75.87
10	99.86	99.86	95.68	95.68	71.62	71.62
11	99.89	99.89	95.55	95.55	67.24	67.23
12	99.91	99.91	95.45	95.45	62.74	62.73
13	99.93	99.93	95.37	95.37	58.15	58.14
14	99.94	99.94	95.30	95.30	53.48	53.48
15	99.95	99.95	95.25	95.25	48.76	48.76
16	99.96	99.96	95.20	95.20	43.98	43.98
17	99.97	99.97	95.17	95.17	39.17	39.17
18	99.97	99.97	95.14	95.14	34.32	34.32
19	99.98	99.98	95.11	95.11	29.44	29.44
20	99.98	99.98	95.09	95.09	24.54	24.54
Obliczone błędy						
$\Delta_{\acute{s}re}$	0		$9.52381 \cdot 10^{-4}$		$4.761905 \cdot 10^{-3}$	
Δ_{max}	0		0.01		0.01	
$\delta_{\acute{s}re}$	0		$9.83067 \cdot 10^{-6}$		$5.91648 \cdot 10^{-5}$	
δ_{max}	0		$1.02828 \cdot 10^{-4}$		$1.71999 \cdot 10^{-4}$	
σ	0		$1.4142136 \cdot 10^{-2}$		$5.916484 \cdot 10^{-3}$	

(a) - popyt $c(t)$ zadany deltą Diraca, (b) - popyt $c(t) = 1$, (c) - popyt $c(t) = t$, $I_{sym}(t)$ - wyniki przybliżone, $I_{dok}(t)$ - wyniki dokładne, $\Delta_{\acute{s}re}$ - średni błąd bezwzględny, Δ_{max} - maksymalny błąd bezwzględny, $\delta_{\acute{s}re}$ - średni błąd względny, δ_{max} - maksymalny błąd względny, σ - błąd średniokwadratowy

Tabela 2

Wyniki symulacji systemu produkcja-popyt z dwoma sprzężeniami zwrotnymi

Czas	(a)		(b)		(c)	
t	$d_{sym}(t)$	$d_{dok}(t)$	$d_{sym}(t)$	$d_{dok}(t)$	$d_{sym}(t)$	$d_{dok}(t)$
0	0.0000	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.4684	0.4677	0.24202	0.24184	0.43707	0.42745
2	0.8028	0.8012	0.44864	0.44818	0.69193	0.68076
3	0.9859	0.9842	0.61015	0.60952	0.83154	0.82227
4	1.0575	1.0563	0.73002	0.72933	0.90788	0.90106
5	1.0664	1.0658	0.81596	0.81531	0.94963	0.94492
6	1.0494	1.0493	0.87610	0.87553	0.97246	0.96934
7	1.0281	1.0283	0.91742	0.91696	0.98494	0.98293
8	1.0117	1.0120	0.94542	0.94505	0.99177	0.99050
9	1.0021	1.0023	0.96418	0.96390	0.99549	0.99471
10	0.9979	0.9981	0.97663	0.97642	0.99753	0.99706
11	0.9970	0.9971	0.98483	0.98467	0.99865	0.99836
12	0.9976	0.9976	0.99020	0.99008	0.99926	0.99909
13	0.9985	0.9985	0.99369	0.99361	0.99959	0.99949
14	0.9993	0.9993	0.99595	0.99590	0.99978	0.99972
15	0.9998	0.9998	0.99741	0.99737	0.99988	0.99984
16	1.0001	1.0000	0.99834	0.99832	0.99993	0.99991
17	1.0001	1.0001	0.99896	0.99893	0.99997	0.99995
18	1.0001	1.0001	0.99935	0.99932	0.99997	0.99997
19	1.0001	1.0001	0.99956	0.99957	0.99997	0.99998
20	1.0001	1.0000	0.99975	0.99973	0.99997	0.99999
Obliczone błędy						
$\Delta_{\acute{s}re}$	$3.38095 \cdot 10^{-3}$		$2.40952 \cdot 10^{-4}$		$2.379524 \cdot 10^{-3}$	
Δ_{max}	$1.6 \cdot 10^{-3}$		$6.9 \cdot 10^{-4}$		$1.117 \cdot 10^{-2}$	
$\delta_{\acute{s}re}$	$3.90783 \cdot 10^{-4}$		$3.35803 \cdot 10^{-4}$		$3.390609 \cdot 10^{-3}$	
δ_{max}	$1.1997004 \cdot 10^{-3}$		$1.0336 \cdot 10^{-3}$		$2.2505556 \cdot 10^{-2}$	
σ	$2.826659 \cdot 10^{-3}$		$1.54551 \cdot 10^{-3}$		$1.9705048 \cdot 10^{-2}$	

(a) – dwa pierwiastki zespolone, (b) – pierwiastek podwójny, (c) – dwa pierwiastki rzeczywiste, $d_{sym}(t)$ – wyniki przybliżone, $d_{dok}(t)$ – wyniki dokładne, $\Delta_{\acute{s}re}$ – średni błąd bezwzględny, Δ_{max} – maksymalny błąd bezwzględny, $\delta_{\acute{s}re}$ – średni błąd względny, δ_{max} – maksymalny błąd względny, σ – błąd średniokwadratowy

5. Wnioski

Prezentowane systemy gospodarcze uległy znacznym uproszczeniom, nie spotykanym w systemach rzeczywistych. Opisane zostały na dużym poziomie zagregowania, przy założeniu o liniowości związków zachodzących między wybranymi do opisu zmiennymi modelu. Literatura przedmiotu wskazuje, że uzyskiwanie dokładnych rozwiązań już przy systemach niskiego rzędu (np. z pięcioma zmiennymi stanu — poziomami) nie jest możliwe (patrz [1]). Stąd znaczenie i rola metody Dynamiki Systemowej umożliwiającej modelowanie w sposób przybliżony systemów o wielu poziomach i sprzężeniach zwrotnych.

Doświadczenia własne autorów (patrz [3, 4, 5]) pokazują, że modele rzeczywistych obiektów gospodarczych zawierają mogą kilkadziesiąt powiązanych ze sobą poziomów. Metoda Dynamiki Systemowej pozwala uzyskiwać w takich przypadkach wyniki zadowalające użytkowników (kadre zarządzającą systemem).

Kilkuprocentowy błąd odwzorowania dynamiki zachowania się wybranych zmiennych modelu, budowanego w konwencji Dynamiki Systemowej, w stosunku do odwzorowań dokładnych (transformata Laplace'a) w przypadku prostych systemów jest zadowalający. Może on być jeszcze bardziej zmniejszony przy zastosowaniu nowszego (nieдоступnego dla autorów) kompilatora języka symulacyjnego Dynamo (dokładniejsze procedury całkowania). Natomiast w przypadku dużych, złożonych systemów gospodarczych Dynamika Systemowa pozostaje stosunkowo łatwym i prostym w użyciu narzędziem. Jego zareklamowanie było ubocznym celem niniejszego artykułu.

Literatura

- [1] R. G. Coyle, *Management System Dynamics*, John Wiley & Sons, New York 1977.
- [2] J. W. Forrester, *Industrial Dynamics*, MIT Press, Massachusetts 1961.
- [3] E. Kasperska, *Badania symulacyjne na modelu SYMODREAL (Model Zakłóceń Dostaw i Produkcji Zakładu Przemysłowego)*, w skrypcie Pol. Śl. pt. *Zarządzanie przedsiębiorstwem przemysłowym. Problemy, metody, techniki*, Gliwice 1995, 225-235.
- [4] E. Kasperska, *Symulacja komputerowa dla wspomagania podejmowania decyzji gospodarczych w przedsiębiorstwie przemysłowym o produkcji ciągłej. Nowe kierunki badań*, Kwartalnik PAN „Organizacja i Kierowanie” 2 (1995), 65-70.

- [5] E. Kasperska, *Sztuczna inteligencja w badaniach symulacyjnych dla wspomagania planowania i organizowania w przedsiębiorstwie przemysłowym o produkcji ciągłej*, Materiały Konferencji „Inteligentne systemy wspomagania decyzji w zarządzaniu”, Szczyrk 1994, 231-236.
- [6] E. Kącki, Ł. Siewierski, *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, PWN, Warszawa 1985.
- [7] R. J. Kochenburger, *Modelowanie układów dynamicznych przy użyciu maszyn matematycznych*, WNT, Warszawa 1975.
- [8] R. Łukaszewicz, *Dynamika Systemów Zarządzania*, PWN, Warszawa 1975.
- [9] T. H. Naylor, *Modelowanie cyfrowe systemów ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1975.

*Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice
email: damslota@zeus.polsl.gliwice.pl*

Recenzent: Henryk Sroka

Abstract

Some simple economic systems are the base for comparing the exactness of the solutions of the management problems making use of a method of System Dynamics and a method of Laplace Transform. Chapter one contains basic notions, which are applied to the method of System Dynamics. In Chapter two some economic models, solved by using Laplace Transform, are presented. In Chapter three the simulation of dynamics behaviour of system, using the model of System Dynamics and the method of Laplace Transform, is carried out. The typical disturbance of work of the simple economic models: unit impals, step input, unit ramp are given for simulation. Chapter four contains the comparing analysis of the results of the simulation of models which are constructed by System Dynamics method and by the method of Laplace Transform. The error of simplectness of the first method is estimated.