

Elżbieta KASPERSKA, Damian SŁOTA

PORÓWNANIE MODELOWANIA OPÓŹNIEŃ ORAZ PEWNEGO SYSTEMU ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM DODATNIM METODĄ DYNAMIKI SYSTEMOWEJ I METODAMI DOKŁADNYMI

Streszczenie. Na przykładzie opóźnień pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu dokonuje się porównania sposobów modelowania elementów opóźniających metodą Dynamiki Systemowej oraz metodami dokładnymi. Przedstawia się również pewien prosty przykład systemu ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim. Przeprowadza się dyskusję, kiedy system ten wzrasta, a kiedy upada.

COMPUTER MODELLING OF DELAYS AND SOME SYSTEM WITH POSITIVE FEEDBACK BY SYSTEM DYNAMICS METHOD COMPARE WITH PRECISE METHOD

Summary. The first, second and third order delays are the base for compare the way of modeling the delay elements by System Dynamics method and some mathematically precise method. Some example with positive feedback is presented. The discussion about conditions of growing and decaying of this system is demonstrated.

1. Wstęp

Artykuł nawiązuje do poprzedniej pracy autorów [6], w której na przykładzie pewnych prostych systemów gospodarczych dokonano analizy porównawczej dokładności rozwiązań problemów zarządzania posługując się metodą Dynamiki Systemowej i metodą transformaty Laplace'a. Jednym z podstawowych elementów, odwzorowujących system dynamiczny w metodzie Dynamiki Systemowej, jest opóźnienie (delay). W literaturze przedmiotu nie podaje się ściśle matematycznych charakterystyk podstawowych opóźnień

(pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu) spotykanych w systemach gospodarczych oraz nie dokonuje się ich porównań z charakterystykami otrzymanymi w metodzie Dynamiki Systemowej. Niektórzy autorzy (np. [9]) wspominają jedynie, że mają one charakter „wykładniczy”, co dla matematyka jest pojęciem dość szerokim.

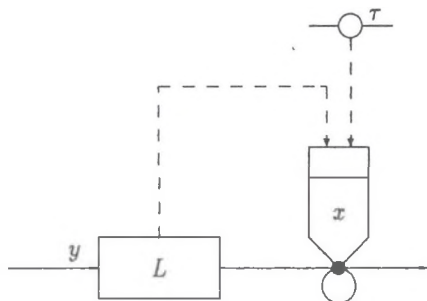
W tej pracy podjęto zatem próbę otrzymania dokładnych charakterystyk opóźnień pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu przy zastosowaniu, na wejściu do tych elementów, impulsu jednostkowego.

W pracy dokonuje się również porównania modelowania pewnego systemu ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim, metodą dokładną (rozwiązanie równania różniczkowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach) i metodą Forrestera (Dynamiki Systemowej). Przeprowadza się również dyskusję: kiedy system wzrasta (wykładniczo), a kiedy upada lub jest w stagnacji, w zależności od relacji pewnych parametrów modelu (systemu).

2. Opóźnienie pierwszego rzędu

Układ równań opisujący opóźnienie pierwszego rzędu wygląda następująco:

$$\begin{cases} \dot{L} = y - x, \\ x = \frac{L}{\tau}. \end{cases}$$



Rys. 1. Opóźnienie pierwszego rzędu

Fig. 1. The first level delay

Przekształcając powyższy układ mamy:

$$y = \dot{L} + x = \tau \dot{x} + x.$$

Otrzymaliśmy więc równanie różniczkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach:

$$\tau \dot{x} + x = y.$$

Stosując transformatę Laplace'a przy warunkach początkowych

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau s \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(y), \\ \mathcal{L}(x) &= \frac{\mathcal{L}(y)}{\tau s + 1}. \end{aligned}$$

Niech $y(t)$ będzie skokiem jednostkowym, czyli $\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}$, wówczas:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{1}{\tau s(s + \frac{1}{\tau})}.$$

Stąd

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\tau s(s + \frac{1}{\tau})} \right) = \frac{1}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau})} \right).$$

Korzystając z rozkładu na ułamki proste możemy zapisać:

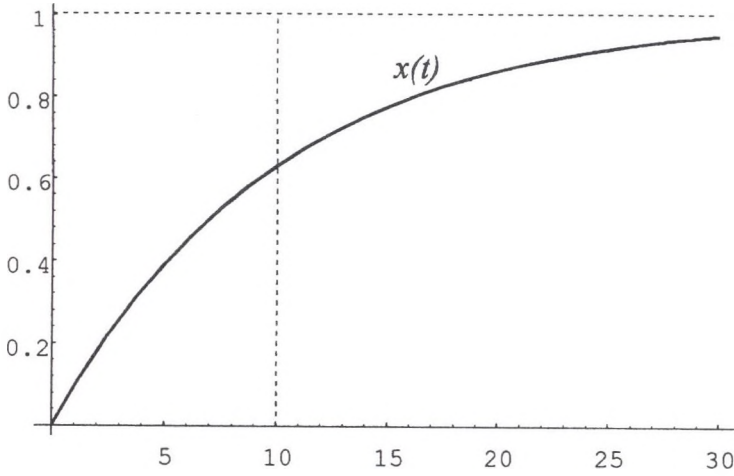
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\tau \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) - \tau \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \right) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned}$$

Wykres powyższego rozwiązania przedstawiono na rysunku 2.

W metodzie Dynamiki Systemowej element opóźniający pierwszego rzędu opisujemy, używając konwencji Coyle'a, następująco:

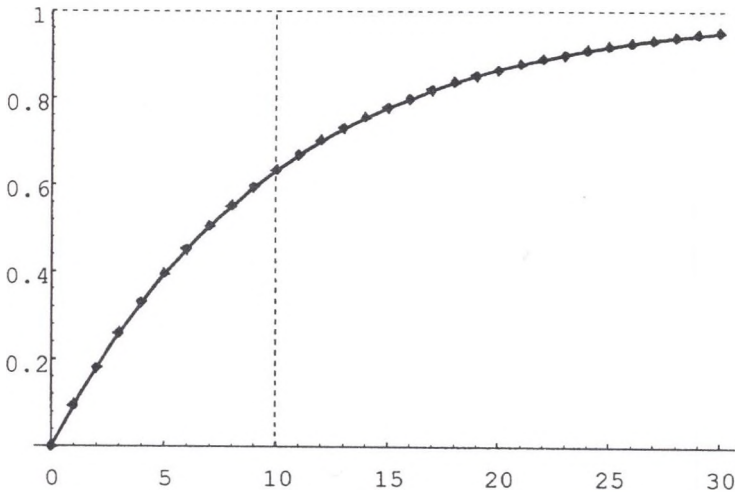
$$\begin{cases} L.k = L.j + dt * (y.jk - x.jk), \\ x.kl = L.k/\tau. \end{cases}$$

Na rysunku 3 przedstawiono wyniki symulacji w języku Dynamo (któremu poświęcamy uwagę osobno, w innym rozdziale) dla przykładowego $\tau = 10$ dni.



Rys. 2. Wyjście z elementu opóźniającego pierwszego rzędu przy skoku jednostkowym na wejściu (metoda dokładna)

Fig. 2. Output from the first level delay in unit jump on the input (exact method)



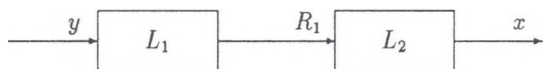
Rys. 3. Wyjście z elementu opóźniającego pierwszego rzędu przy skoku jednostkowym na wejściu (linia kropkowana – metoda Dynamiki Systemowej, linia ciągła – metoda dokładna)

Fig. 3. Output from the first level delay in unit jump on the input (dot line – System Dynamics method, solid line – exact method)

3. Opóźnienie drugiego rzędu

Opóźnienie drugiego rzędu (schematycznie przedstawione na rysunku 4) możemy opisać następującym układem równań:

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = y - R_1, \\ \dot{L}_2 = R_1 - x, \\ R_1 = \frac{L_1}{\tau/2}, \\ x = \frac{L_2}{\tau/2}. \end{cases}$$



Rys. 4. Opóźnienie drugiego rzędu

Fig. 4. The second level delay

Przekształcając powyższe równania dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned} y &= \dot{L}_1 + \dot{L}_2 + x, \\ y &= \dot{R}_1 \frac{\tau}{2} + \dot{x} \frac{\tau}{2} + x, \\ y &= \left(\ddot{L}_2 + \dot{x} \right) \frac{\tau}{2} + \dot{x} \frac{\tau}{2} + x, \\ y &= \left(\ddot{x} \frac{\tau}{2} + \dot{x} \right) \frac{\tau}{2} + \dot{x} \frac{\tau}{2} + x, \\ y &= \ddot{x} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \tau \dot{x} + x. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$\begin{aligned} \ddot{x} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \tau \dot{x} + x &= y, \\ \ddot{x} + \frac{4}{\tau} \dot{x} + \frac{4}{\tau^2} x &= \frac{4y}{\tau^2}. \end{aligned}$$

W przypadku skoku jednostkowego ($y(t)$) równanie przyjmie postać:

$$\ddot{x} + \frac{4}{\tau} \dot{x} + \frac{4}{\tau^2} x = \frac{4}{\tau^2}.$$

Wielomian charakterystyczny równania jednorodnego ma postać:

$$\lambda^2 + \frac{4}{\tau}\lambda + \frac{4}{\tau^2} = 0,$$

$$\left(\lambda + \frac{2}{\tau}\right)^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{2}{\tau},$$

czyli rozwiązanie ogólne naszego równania niejednorodnego jest postaci:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{2t}{\tau}} + C_2 t e^{-\frac{2t}{\tau}} + x_{sz}(t),$$

gdzie $x_{sz}(t)$ jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego np. $x_{sz}(t) = 1$. Mamy wówczas:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{2t}{\tau}} + C_2 t e^{-\frac{2t}{\tau}} + 1.$$

Stale C_1 i C_2 wyznaczone z warunków początkowych:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

przyjmują następujące wartości:

$$\begin{aligned} C_1 &= -1, \\ C_2 &= -\frac{2}{\tau}. \end{aligned}$$

Ostatecznie rozwiązanie naszego równania przy zadanych warunkach początkowych ma postać:

$$x(t) = -e^{-\frac{2t}{\tau}} - \frac{2}{\tau} t e^{-\frac{2t}{\tau}} + 1.$$

Na rysunku 5 przedstawiono przykładowe wyjście z opóźniacza drugiego rzędu dla $\tau = 10$ dni.

Charakterystykę wyjścia $x(t)$ z opóźniacza drugiego rzędu, otrzymaną z rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu, porównamy z charakterystyką otrzymaną przy użyciu metody Dynamiki Systemowej.

3.1. Opóźnienie drugiego rzędu wg Forreстера

W konwencji Coyle'a równania poziomów i strumieni mają następującą postać:

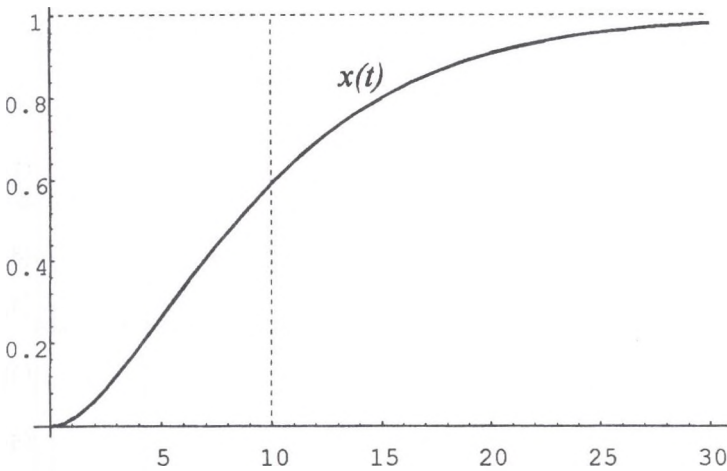
$$L_1.k = L_1.j + dt * (y.jk - R_1.jk),$$

$$L_2.k = L_2.j + dt * (R_1.jk - x.jk),$$

$$R_1.kl = L_1.k / (\tau/2),$$

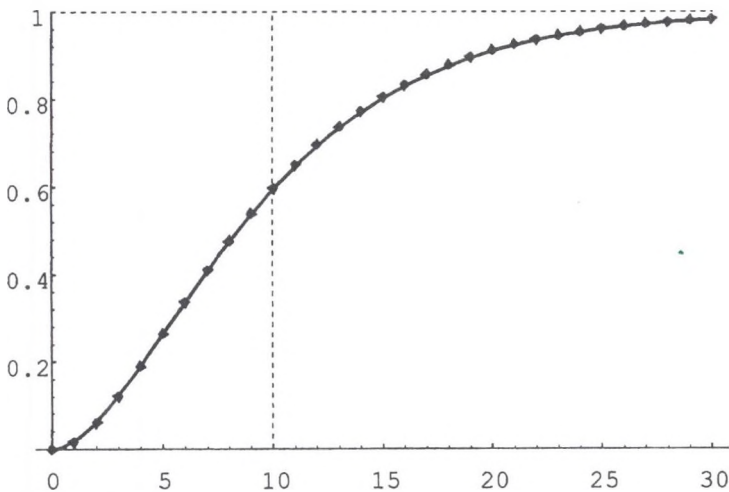
$$x.kl = L_2.k / (\tau/2).$$

Na rysunku 6 przedstawiono przykładowe wyjście $x(t)$ z opóźniacza drugiego rzędu dla $\tau = 10$ dni.



Rys. 5. Wyjście z elementu opóźniającego drugiego rzędu przy skoku jednostkowym na wejściu (metoda dokładna)

Fig. 5. Output from the second level delay in unit jump on the input (exact method)



Rys. 6. Wyjście z elementu opóźniającego drugiego rzędu przy skoku jednostkowym na wejściu (linia kropkowana - metoda Dynamiki Systemowej, linia ciągła - metoda dokładna)

Fig. 6. Output from the second level delay in unit jump on the input (dot line - System Dynamics method, solid line - exact method)

4. Opóźnienie trzeciego rzędu

Opóźnienie trzeciego rzędu, którego schemat przedstawiono na rysunku 7, można opisać następującym układem równań:

$$\dot{L}_1 = y - R_1, \quad (1)$$

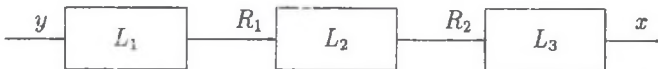
$$\dot{L}_2 = R_1 - R_2, \quad (2)$$

$$\dot{L}_3 = R_2 - x, \quad (3)$$

$$R_1 = \frac{L_1}{\frac{\tau}{3}}, \quad (4)$$

$$R_2 = \frac{L_2}{\frac{\tau}{3}}, \quad (5)$$

$$x = \frac{L_3}{\frac{\tau}{3}}. \quad (6)$$



Rys. 7. Opóźnienie trzeciego rzędu

Fig. 7. The third level delay

Z równań (1)-(3) otrzymujemy:

$$y = \dot{L}_1 + \dot{L}_2 + \dot{L}_3 + x.$$

Natomiast z równań (4)-(6) mamy:

$$y = \dot{R}_1 \frac{\tau}{3} + \dot{R}_2 \frac{\tau}{3} + \dot{x} \frac{\tau}{3} + x.$$

Podstawiając równania (2) i (3), otrzymujemy:

$$y = (\ddot{L}_2 + \dot{R}_2) \frac{\tau}{3} + (\ddot{L}_3 + \dot{x}) \frac{\tau}{3} + \dot{x} \frac{\tau}{3} + x.$$

Wykorzystując równania (3), (5) i (6) dostajemy:

$$y = \left(\ddot{R}_2 \frac{\tau}{3} + \ddot{L}_3 + \dot{x} \right) \frac{\tau}{3} + \left(\ddot{x} \frac{\tau}{3} + \dot{x} \right) \frac{\tau}{3} + \dot{x} \frac{\tau}{3} + x.$$

Z czego po podstawieniu równań (3) i (6) uzyskujemy równanie postaci:

$$y = \left((L_3^{(3)} + \ddot{x}) \frac{\tau}{3} + \ddot{x} \frac{\tau}{3} + \dot{x} \right) \frac{\tau}{3} + \ddot{x} \left(\frac{\tau}{3} \right)^2 + 2\dot{x} \frac{\tau}{3} + x.$$

Kolejny raz wykorzystując równanie (6) dostajemy:

$$y = \left(x^{(3)} \left(\frac{\tau}{3} \right)^2 + \ddot{x} \frac{\tau}{3} + \dot{x} \frac{\tau}{3} + x \right) \frac{\tau}{3} + \ddot{x} \left(\frac{\tau}{3} \right)^2 + 2\dot{x} \frac{\tau}{3} + x,$$

$$y = x^{(3)} \left(\frac{\tau}{3} \right)^3 + 3\ddot{x} \left(\frac{\tau}{3} \right)^2 \tau \dot{x} + x.$$

Otrzymaliśmy więc równanie różniczkowe trzeciego rzędu o stałych współczynnikach:

$$x^{(3)} \left(\frac{\tau}{3} \right)^3 + 3\ddot{x} \left(\frac{\tau}{3} \right)^2 \tau \dot{x} + x = y.$$

Rozwiążmy równanie jednorodne:

$$x^{(3)} \left(\frac{\tau}{3} \right)^3 + 3\ddot{x} \left(\frac{\tau}{3} \right)^2 \tau \dot{x} + x = 0.$$

Po podzieleniu przez $\left(\frac{\tau}{3} \right)^3$ otrzymujemy:

$$x^{(3)} + \frac{9}{\tau} \ddot{x} + \frac{27}{\tau^2} \dot{x} + \frac{27}{\tau^3} x = 0.$$

Równanie charakterystyczne powyższego równania jest postaci:

$$\lambda^3 + \frac{9}{\tau} \lambda^2 + \frac{27}{\tau^2} \lambda + \frac{27}{\tau^3} = 0,$$

$$\left(\lambda + \frac{3}{\tau} \right)^3 = 0,$$

czyli:

$$\ddot{x}(t) = C_1 e^{-\frac{3t}{\tau}} + C_2 t e^{-\frac{3t}{\tau}} + C_3 t^2 e^{-\frac{3t}{\tau}}.$$

Wracając do równania niejednorodnego:

$$x^{(3)} + \frac{9}{\tau} \ddot{x} + \frac{27}{\tau^2} \dot{x} + \frac{27}{\tau^3} x = \frac{27y}{\tau^3},$$

widzimy, że $x(t) = 1$ jest rozwiązaniem szczególnym, gdy $y(t)$ jest skokiem jednostkowym, czyli dla $y(t) = 1$. Tak więc wyjście z opóźnieńca rzędu trzeciego przy skoku jednostkowym na wejściu jest dane równaniem:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{3t}{\tau}} + C_2 t e^{-\frac{3t}{\tau}} + C_3 t^2 e^{-\frac{3t}{\tau}} + 1.$$

Dla wyznaczenia stałych C_1 , C_2 i C_3 wykorzystamy warunki początkowe w chwili $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \\ \ddot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Wykorzystując te warunki dostajemy układ trzech równań jednorodnych:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + 1, \\ 0 = -C_1 \frac{3}{\tau} + C_2, \\ 0 = C_1 \frac{9}{\tau^2} - C_2 \frac{3}{\tau} - C_2 \frac{3}{\tau} + 2C_3, \end{cases}$$

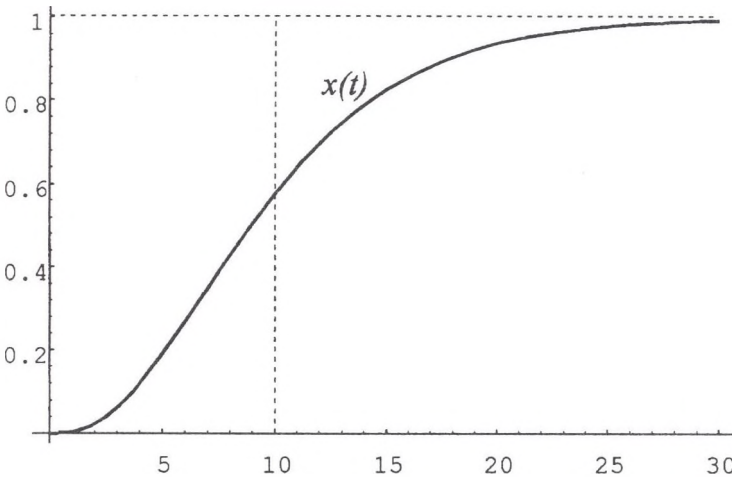
rozwiązaniem którego są liczby:

$$\begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = -\frac{3}{\tau}, \\ C_3 = -\frac{9}{2\tau^2}. \end{cases}$$

Rozwiązanie naszego równania różniczkowego, przy zadanych warunkach początkowych, ma więc postać:

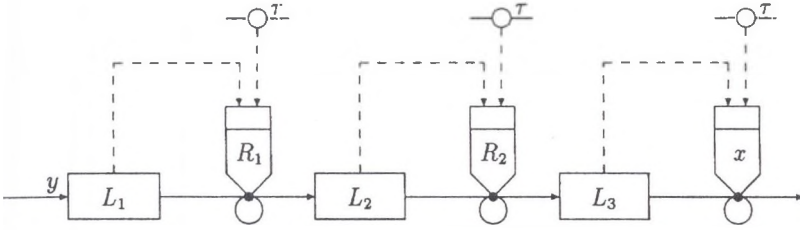
$$x(t) = -e^{-\frac{3t}{\tau}} - \frac{3}{\tau} t e^{-\frac{3t}{\tau}} - \frac{9}{2\tau^2} t^2 e^{-\frac{3t}{\tau}} + 1.$$

Na rysunku 8 przedstawiono przykładową charakterystykę wyjścia $x(t)$ z elementu opóźniającego trzeciego rzędu dla $\tau = 10$ dni.



Rys. 8. Wyjście z elementu opóźniającego trzeciego rzędu przy skoku jednostkowym na wejściu (metoda dokładna)

Fig. 8. Output from the third level delay in unit jump on the input (exact method)



Rys. 9. Opóźnienie trzeciego rzędu w konwencji Forreстера
 Fig. 9. The third level delay by Forrester

4.1. Opóźnienie trzeciego rzędu wg Forreстера

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = L_1 + dt * (y - R_1), \\ L_2 = L_2 + dt * (R_1 - R_2), \\ L_3 = L_3 + dt * (R_2 - x), \\ R_1 = \frac{L_1}{\frac{\tau}{3}}, \\ R_2 = \frac{L_2}{\frac{\tau}{3}}, \\ x = \frac{L_3}{\frac{\tau}{3}}. \end{array} \right.$$

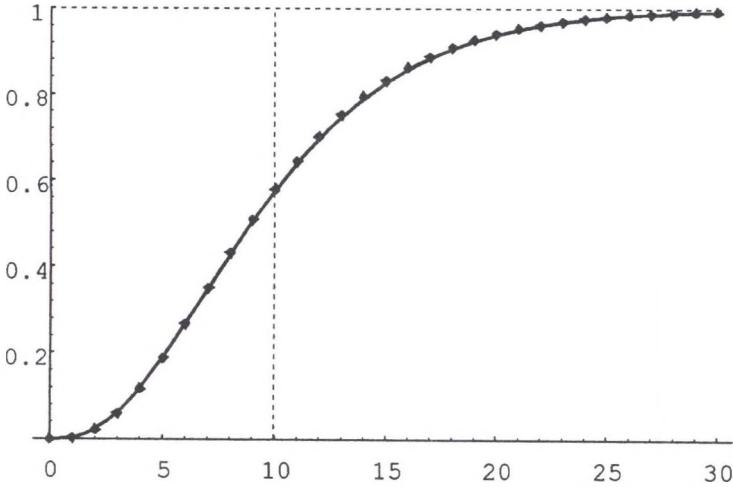
W konwencji Coyle'a układ ten będzie wyglądał następująco:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{1.k} = L_{1.j} + dt * (y.jk - R_{1.jk}), \\ L_{2.k} = L_{2.j} + dt * (R_{1.jk} - R_{2.jk}), \\ L_{3.k} = L_{3.j} + dt * (R_{2.jk} - x.jk), \\ R_{1.kl} = L_{1.k} / (\tau/3), \\ R_{2.kl} = L_{2.k} / (\tau/3), \\ x.kl = L_{3.k} / (\tau/3). \end{array} \right.$$

Symulację przeprowadzono dla przykładowego $\tau = 10$ dni i wejścia $y(t)$ równego skokowi jednostkowemu. Wynik tej symulacji przedstawiono na rysunku 10.

W systemach ekonomicznych spotykamy elementy opóźniające (zwane też elementami przepustowości, patrz [9]) różnych rzędów (najczęściej pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu).

Uogólniając przypadek opóźnienia na n -ty rząd otrzymamy przy $n \rightarrow \infty$ charakterystyki coraz bardziej zbliżone do skoku jednostkowego, przesuniętego względem wejścia o czas $t = \tau$.



Rys. 10. Wyjście z elementu opóźniającego trzeciego rzędu przy skoku jednostkowym na wejściu (linia kropkowana – metoda Dynamiki Systemowej, linia ciągła – metoda dokładna)

Fig. 10. Output from the third level delay in unit jump on the input (dot line – System Dynamics method, solid line – exact method)

5. Przykład modelu ekonomicznego ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim

Strukturę dodatniego sprzężenia zwrotnego (w notacji Łukaszewicza, [9] str. 77) przedstawia rysunek 11.

Przytoczmy za Coylem (patrz [1], str. 379) przykład systemu z dodatnim sprzężeniem zwrotnym. Jego strukturę w konwencji sprzężeń Coyle'a przedstawia rysunek 12.

Równania systemu są następujące:

$$\dot{a} = r, \quad (7)$$

$$r = \frac{n - a}{\tau_1}, \quad (8)$$

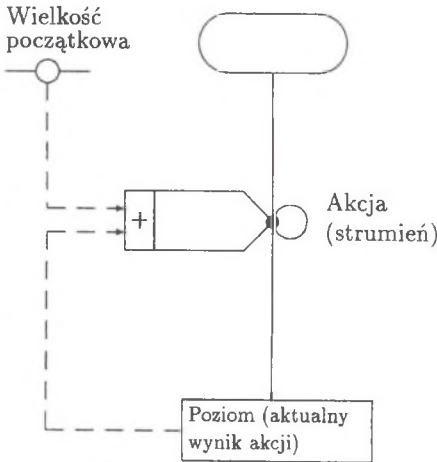
$$n = \frac{m}{p}, \quad (9)$$

$$\dot{m} = \frac{o - m}{\tau_2}, \quad (10)$$

$$o = a \cdot e. \quad (11)$$

Ponieważ z (9) i (8) mamy:

$$m = n \cdot p,$$



Rys. 11. Struktura dodatniego sprzężenia zwrotnego (notacja Łukaszevicza)
 Fig. 11. Structure of positive feedback (by Łukaszevicz)

$$n = \tau_1 \cdot r + a,$$

to otrzymujemy:

$$m = p(\tau_1 \cdot r + a) = p(\tau_1 \cdot \dot{a} + a).$$

Stąd

$$\dot{m} = p(\tau_1 \cdot \ddot{a} + \dot{a}).$$

Dlatego wykorzystując równania (11) i (10) możemy napisać:

$$a \cdot e = 0 = \tau_2 \cdot \dot{m} + m = \tau_2 \cdot p(\tau_1 \cdot \ddot{a} + \dot{a}) + p(\tau_1 \cdot \dot{a} + a),$$

czyli

$$\frac{ae}{p} = \tau_1 \tau_2 \ddot{a} + (\tau_1 + \tau_2) \dot{a} + a.$$

Stąd

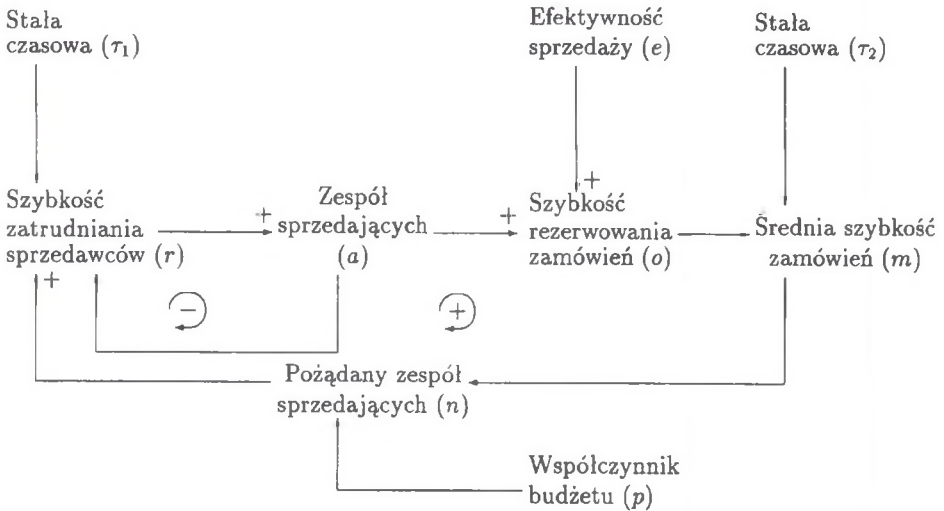
$$\tau_1 \tau_2 \ddot{a} + (\tau_1 + \tau_2) \dot{a} + a \left(1 - \frac{e}{p}\right) = 0.$$

Równanie charakterystyczne dla powyższego równania różniczkowego wygląda następująco:

$$\tau_1 \tau_2 \lambda^2 + (\tau_1 + \tau_2) \lambda + \left(1 - \frac{e}{p}\right) = 0. \tag{12}$$

Jego pierwiastkami są:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1 \tau_2 \left(1 - \frac{e}{p}\right)}}{2\tau_1 \tau_2}.$$



Rys. 12. Przykład Coyle'a systemu ze sprzężeniem zwrotnym (r - [człowiek/miesiąc], a - [człowiek], e - [zł/miesiąc/człowiek], o - [zł/miesiąc], m - [zł/miesiąc], n - [człowiek], τ_1, τ_2 - [miesiąc])

Fig. 12. Coyle's example of system with feedback (r - [man/month], a - [man], e - [zł/man/month], o - [zł/month], m - [zł/month], n - [man], τ_1, τ_2 - [month])

Weźmy

$$a(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t},$$

gdzie λ_1 i λ_2 są rzeczywiste i różne.

Zachodzą trzy przypadki:

I. $e > p$ wtedy

$$1 - \frac{e}{p} < 0,$$

a więc $-4\tau_1\tau_2(1 - \frac{e}{p}) > 0$ oraz

$$\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 - \frac{e}{p})} > (\tau_1 + \tau_2).$$

Dlatego

$$\lambda_1 = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) + \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 - \frac{e}{p})}}{2\tau_1\tau_2} > 0,$$

$$\lambda_2 < 0;$$

II. dla $e = p$ mamy:

$$\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 - \frac{e}{p})} = (\tau_1 + \tau_2).$$

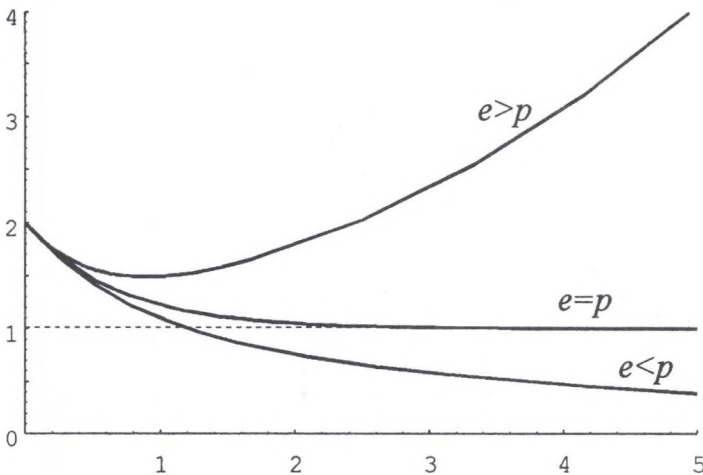
Dlatego

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &< 0;\end{aligned}$$

III. dla $e < p$ mamy:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &< 0, \\ \lambda_2 &< 0.\end{aligned}$$

Charakterystyka $a(t)$ ma w tych trzech przypadkach przebieg jak na rysunku 13.



Rys. 13. Charakterystyka systemu z dodatnim sprzężeniem zwrotnym ($\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, (a) $e = 1000$, $p = 500$, (b) $e = 1000$, $p = 1000$, (c) $e = 500$, $p = 1000$, metoda dokładna)

Fig. 13. Characteristic of system with positive feedback ($\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, (a) $e = 1000$, $p = 500$, (b) $e = 1000$, $p = 1000$, (c) $e = 500$, $p = 1000$, exact method)

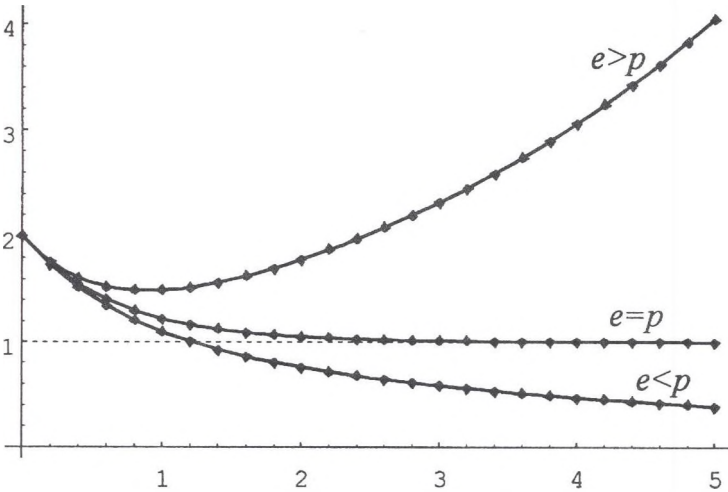
Analiza trzech przypadków pozwala na wysunięcie następujących wniosków:

- gdy $e > p$, to znaczy sprzedawcy są bardziej efektywni, niż wynika to z budżetu (współczynnik p), to system będzie kontynuował wzrost od momentu startu,
- gdy $e = p$, to znaczy budżet jest prawidłowy (na poziomie efektywności), ale nie ma potencjału rozwoju,
- gdy $e < p$, to znaczy gdy efektywność sprzedaży jest niższa, niż zakłada budżet, to system będzie upadał. Widać to wyraźnie na rysunku 13.

Równania systemu ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim w konwencji Coyle'a mają następującą postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} a.k = a.j + dt * r.jk, \\ r.kl = (n.k - a.k) / \tau_1, \\ n.k = m.k / p, \\ m.k = m.j + dt * m1.jk, \\ m1.kl = (o.k - m.k) / \tau_2, \\ o.k = a.k * e. \end{array} \right.$$

Charakterystykę $a(t)$ dla trzech przypadków relacji między p oraz e (dane jak dla rozwiązań dokładnych) przedstawia rysunek 14.



Rys. 14. Charakterystyka systemu z dodatnim sprzężeniem zwrotnym ($\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, (a) $e = 1000$, $p = 500$, (b) $e = 1000$, $p = 1000$, (c) $e = 500$, $p = 1000$, linia ciągła - metoda dokładna, linia kropkowana - metoda Dynamiki Systemowej)

Fig. 14. Characteristic of system with positive feedback ($\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, (a) $e = 1000$, $p = 500$, (b) $e = 1000$, $p = 1000$, (c) $e = 500$, $p = 1000$, solid line - exact method, dot line - System Dynamics method)

Tabela 1

Wyniki symulacji opóźnień

Czas	(a)		(b)		(c)	
t	$x_{sym}(t)$	$x_{dok}(t)$	$x_{sym}(t)$	$x_{dok}(t)$	$x_{sym}(t)$	$x_{dok}(t)$
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.18209	0.18127	0.05990	0.06155	0.02101	0.02312
4	0.33103	0.32968	0.19046	0.19121	0.11783	0.12051
6	0.45284	0.45119	0.33810	0.33737	0.26853	0.26938
8	0.55248	0.55067	0.47703	0.47507	0.43188	0.43029
10	0.63397	0.63212	0.59673	0.59399	0.58022	0.57681
12	0.70062	0.69881	0.69463	0.69156	0.70156	0.69725
14	0.75513	0.75340	0.77201	0.76892	0.79418	0.78976
16	0.79972	0.79810	0.83169	0.82880	0.86147	0.85746
18	0.83619	0.83470	0.87688	0.87431	0.90861	0.90524
20	0.86602	0.86467	0.91062	0.90842	0.94071	0.93803
22	0.89042	0.88920	0.93554	0.93370	0.96207	0.96003
24	0.91037	0.90928	0.95377	0.95227	0.97602	0.97453
26	0.92669	0.92573	0.96700	0.96580	0.98500	0.98393
28	0.94004	0.93919	0.97654	0.97559	0.99070	0.98995
30	0.95096	0.95021	0.98339	0.98265	0.99428	0.99377
Obliczone błędy						
$\Delta_{\acute{s}re}$	$1.341905 \cdot 10^{-3}$		$2.091429 \cdot 10^{-3}$		$2.589048 \cdot 10^{-3}$	
Δ_{max}	$1.85 \cdot 10^{-3}$		$3.11 \cdot 10^{-3}$		$4.45 \cdot 10^{-3}$	
$\delta_{\acute{s}re}$	$1.672874 \cdot 10^{-3}$		$2.581042 \cdot 10^{-3}$		$3.184226 \cdot 10^{-3}$	
δ_{max}	$4.833964 \cdot 10^{-3}$		$7.6484018 \cdot 10^{-2}$		$2.333333 \cdot 10^{-1}$	
σ	$6.371405 \cdot 10^{-3}$		$1.0291356 \cdot 10^{-2}$		$1.3445315 \cdot 10^{-2}$	

(a) – opóźnienie pierwszego rzędu, (b) – opóźnienie drugiego rzędu, (c) – opóźnienie trzeciego rzędu, $x_{sym}(t)$ – wyniki przybliżone, $x_{dok}(t)$ – wyniki dokładne, $\Delta_{\acute{s}re}$ – średni błąd bezwzględny, Δ_{max} – maksymalny błąd bezwzględny, $\delta_{\acute{s}re}$ – średni błąd względny, δ_{max} – maksymalny błąd względny, σ – błąd średniokwadratowy

Tabela 2

Wyniki symulacji systemu ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim

Czas t	(a)		(b)		(c)	
	$a_{sym}(t)$	$a_{dok}(t)$	$a_{sym}(t)$	$a_{dok}(t)$	$a_{sym}(t)$	$a_{dok}(t)$
0.0	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
0.2	1.7558	1.7581	1.7391	1.7408	1.7308	1.7322
0.6	1.5235	1.5270	1.4038	1.4066	1.3452	1.3477
0.8	1.4890	1.4924	1.2985	1.3012	1.2067	1.2092
1.0	1.4895	1.4927	1.2206	1.2231	1.0938	1.0962
1.2	1.5157	1.5187	1.1631	1.1653	1.0007	1.0031
1.6	1.6226	1.6250	1.0891	1.0907	0.8579	0.8598
1.8	1.6959	1.6982	1.0658	1.0672	0.8022	0.8039
2.0	1.7795	1.7818	1.0487	1.0498	0.7540	0.7555
2.2	1.8723	1.8746	1.0360	1.0369	0.7118	0.7131
2.6	2.0824	2.0849	1.0197	1.0202	0.6409	0.6419
2.8	2.1991	2.2018	1.0145	1.0150	0.6105	0.6114
3.0	2.3236	2.3266	1.0107	1.0111	0.5827	0.5836
3.2	2.4560	2.4592	1.0079	1.0082	0.5572	0.5579
3.6	2.7454	2.7494	1.0043	1.0045	0.5112	0.5118
3.8	2.9032	2.9077	1.0032	1.0033	0.4903	0.4909
4.0	3.0703	3.0752	1.0024	1.0025	0.4706	0.4712
4.2	3.2471	3.2525	1.0018	1.0018	0.4520	0.4525
4.6	3.6322	3.6388	1.0010	1.0010	0.4174	0.4178
4.8	3.8416	3.8489	1.0007	1.0007	0.4013	0.4017
5.0	4.0631	4.0711	1.0005	1.0006	0.3859	0.3863
Obliczone błędy						
$\Delta_{\acute{s}re}$	$3.3266667 \cdot 10^{-3}$		$2.47619 \cdot 10^{-4}$		$5.71429 \cdot 10^{-4}$	
Δ_{max}	$8.0 \cdot 10^{-3}$		$2.5 \cdot 10^{-3}$		$2.5 \cdot 10^{-3}$	
$\delta_{\acute{s}re}$	$1.131344 \cdot 10^{-3}$		$2.41437 \cdot 10^{-4}$		$1.012189 \cdot 10^{-3}$	
δ_{max}	$2.292076 \cdot 10^{-3}$		$2.075008 \cdot 10^{-3}$		$2.392583 \cdot 10^{-3}$	
σ	$1.8651541 \cdot 10^{-2}$		$1.838478 \cdot 10^{-3}$		$3.274141 \cdot 10^{-3}$	

(a) – przypadek $e > p$ ($e = 1000$, $p = 500$), (b) – przypadek $e = p$ ($e = 1000$, $p = 1000$), (c) – przypadek $e < p$ ($e = 500$, $p = 500$), $a_{sym}(t)$ – wyniki przybliżone, $a_{dok}(t)$ – wyniki dokładne, $\Delta_{\acute{s}re}$ – średni błąd bezwzględny, Δ_{max} – maksymalny błąd bezwzględny, $\delta_{\acute{s}re}$ – średni błąd względny, δ_{max} – maksymalny błąd względny, σ – błąd średniokwadratowy

6. Podsumowanie

We wszystkich omawianych przypadkach symulację modelu dokładnego zrealizowano używając pakietu *Mathematica*, przy pomocy którego wykonano wykresy obliczonych rozwiązań dokładnych. Natomiast symulację modeli Dynamiki Systemowej oprogramowano w języku *Dynamo*. Następnie wyniki tej symulacji przeniesiono do programu *Mathematica* i przedstawiono w celu porównania na wspólnych wykresach z wynikami dokładnymi.

Jako horyzont symulacji dla wszystkich opóźnień przyjęto $h = 30$ dni, a krok symulacji $dt = 0.1$. Na rysunkach 3, 6 i 10 zestawiono charakterystyki wyjścia z opóźnienia odpowiednio pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu, w odpowiedzi na skok jednostkowy, uzyskane w modelu dokładnym (linia ciągła) i w modelu Dynamiki Systemowej (linia kropkowana).

Natomiast przy badaniu systemu ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim horyzont symulacji przyjęto równy $h = 5$ lat, a krok symulacji $dt = 0.1$. Na rysunku 13 przedstawiono zachowanie się systemu dla trzech różnych relacji między parametrami e i p . W każdym przypadku parametry systemu dobrano tak, aby pierwiastki otrzymanego równania charakterystycznego (12) były rzeczywiste. W pierwszym przypadku, gdy $e > p$, jak już zaznaczono, system wzrasta. W drugim przypadku ($e = p$) system jest w stagnacji. Natomiast w ostatnim ($e < p$) system upada. Na rysunku 14 zestawiono charakterystyki wyjścia z systemu ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim, dla wszystkich trzech przypadków, uzyskane w modelu dokładnym (linia ciągła) i w modelu Dynamiki Systemowej (linia kropkowana).

W tabelach 1 i 2 zaprezentowano wyniki numeryczne symulacji modelu dokładnego i modelu Dynamiki Systemowej dla omawianych w pracy systemów. Analiza błędów (podobnie jak to było w artykule [6]) podkreśla dużą dokładność, a co za tym idzie, przydatność metody Dynamiki Systemowej do symulacji różnorodnych systemów gospodarczych. Przydaje się ona jeszcze bardziej w przypadku rzeczywistych systemów, które swoim rozmiarem i skomplikowaniem wręcz uniemożliwiają stosowanie metod dokładnych.

Literatura

- [1] R. G. Coyle, *Management System Dynamics*, John Wiley & Sons, New York 1977.
- [2] J. W. Forrester, *Industrial Dynamics*, MIT Press, Massachusetts 1961.
- [3] E. Kasperska, *Badania symulacyjne na modelu SYMODREAL (Model Zakłóceń Dostaw i Produkcji Zakładu Przemysłowego)*, w skrypcie Pol. Śl. pt. *Zarządzanie przedsiębiorstwem przemysłowym. Problemy, metody, techniki*, Gliwice 1995, 225-235.

- [4] E. Kasperska, *Symulacja komputerowa dla wspomagania podejmowania decyzji gospodarczych w przedsiębiorstwie przemysłowym o produkcji ciągłej. Nowe kierunki badań*, Kwartalnik PAN „Organizacja i Kierowanie” 2 (1995), 65-70.
- [5] E. Kasperska, *Sztuczna inteligencja w badaniach symulacyjnych dla wspomagania planowania i organizowania w przedsiębiorstwie przemysłowym o produkcji ciągłej*, Materiały Konferencji „Inteligentne systemy wspomagania decyzji w zarządzaniu”, Szczyrk 1994, 231-236.
- [6] E. Kasperska, D. Słota, *Porównanie modelowania systemów gospodarczych metodą Dynamiki Systemowej i metodą transformaty Laplace’a* (w niniejszym Zeszycie).
- [7] E. Kącki, Ł. Siewierski, *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, PWN, Warszawa 1985.
- [8] R. J. Kochenburger, *Modelowanie układów dynamicznych przy użyciu maszyn matematycznych*, WNT, Warszawa 1975.
- [9] R. Łukaszewicz, *Dynamika Systemów Zarządzania*, PWN, Warszawa 1975.
- [10] T. H. Naylor, *Modelowanie cyfrowe systemów ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1975.

*Institut Matematyki
Politechnika Śląska
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice
email: damslota@zeus.polsl.gliwice.pl*

Recenzent: Henryk Sroka

Abstract

This article refers to work [6] by authors, where the simple economic systems were the base for compare the exactness of solution of the management problems making use of method of Laplace Transform. In this paper the way of modelling delay elements of dynamic systems by System Dynamics method and some mathematically precise method are compared.

In Chapter II-IV the delays of: first, second and fourth orders are presented. The characteristic of delayed rates replay to unit impals are compared in graphical and tabled form.

In Chapter V the modelling of some system with positive feedback, by System Dynamics method and mathematically precise method (system of linear differential equations with constant coefficients) is compared. The discussion about conditions of growing and decaying of system, depended on some relations of parameters, is demonstrated.