ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 82 Nr kol. 1360

Wojciech KASZOWSKI

SPLOT DYSTRYBUCJI W PRZESTRZENIACH TYPU $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$

Streszczenie. W pracy tej definiujemy przestrzenie typu $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, będące granicami induktywnymi przestrzeni typu $K\{M_p\}$ (które zostały wprowadzone przez I. M. Gelfanda i G. E. Szyłowa w [1]) oraz dowodzimy równoważności różnych definicji splotu w przestrzeniach $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, analogicznych do znanych definicji splotu w przestrzeniach $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ oraz $K\{M_p\}'$.
Określamy również warunek zgodności względem rodziny $\mathcal{M}$. Dowodzimy, że jeżeli f, g są dystrybucjami typu $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ o nośnikach spełniających ten warunek, to istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$.

ON THE CONVOLUTION IN SPACES OF TYPE $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$

Summary. In this paper we define the spaces of type $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, which are inductive limits of spaces of type $K\{M_p\}$ (defined by I. M. Gel'fand and G. E. Shilov in [1]). Moreover, we prove the equivalence of different definitions of the convolution in the spaces $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, which are analogous to the known definitions of the convolution in the spaces $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ and $K\{M_p\}'$.
We also introduce also the $\mathcal{M}$ – compatibility condition. We prove, that if f, g are distributions of type $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, whose supports satisfy this condition, then the convolution $f * g$ exists in space $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$.

1. Przestrzenie typu $K\{M_p\}$

Przestrzenie typu $K\{M_p\}$ zostały wprowadzone przez I. M. Gelfanda oraz G. E. Szyłowa w pracy [1]. Wiele różnych przestrzeni podstawowych może być przedstawionych w postaci $K\{M_p\}$. Poprzez odpowiedni dobór ciągu $\{M_p\}$ otrzymujemy przestrzenie funkcji próbnych Schwartza (tzw. przestrzenie $\mathcal{S}$ funkcji szybko malejących), przestrzenie funkcji gładkich o nośniku zawartym w danym zbiorze zwartym (przestrzenie D_K) oraz przestrzenie $S_{\alpha,A}$ i inne.

Definicja 1. *Niech $\{M_p\}$ będzie ciągiem funkcji określonych na $\mathbb{R}^d$ o wartościach w zbiorze $[1,\infty]$. Mówimy że $\{M_p\}$ jest ciągiem bazowym, jeżeli spełnia następujące warunki:*

(a) $M_p(x) \leq M_{p+1}(x)$ *dla* $x \in \mathbb{R}^d$ *oraz* $p \in \mathbb{N}$;

(b) *zbiory* $Q_p := \{x \in \mathbb{R}^d : M_p(x) < \infty\}$ *są równe; oznaczamy je wspólnym symbolem* Q;

(c) *funkcje* M_p *są ciągłe na* Q_p.

Definicja 2. *Niech $\{M_p\}$ będzie ciągiem bazowym funkcji $M_p : \mathbb{R}^d \to [1,\infty]$. Symbolem $K\{M_p\}$ oznaczamy przestrzeń funkcji φ klasy C^∞, takich że*

$$\| \varphi \|_p := \sup \{M_p(x) \cdot |\varphi^{(q)}(x)| : x \in \mathbb{R}^d,\ q \in \mathbb{N}_0^d,\ |q| \leq p\} < \infty$$

dla wszystkich $p \in \mathbb{N}$. Zbieżność w przestrzeni $K\{M_p\}$ definiujemy w następujący sposób: $\varphi_n \to \varphi$ w $K\{M_p\}$, jeśli $\| \varphi_n - \varphi \|_p \to 0$, gdy $n \to \infty$ dla każdego $p \in \mathbb{N}$.

Często rozważa się dodatkowe warunki dotyczące ciągu $\{M_p\}$ zapewniające odpowiednie własności przestrzeni $K\{M_p\}$. Następujące trzy warunki zostały wprowadzone przez I.M. Gelfanda i G.E. Szyłowa w [1], str. 87, 111:

(P) dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ istnieje $q \in \mathbb{N}$, $q > p$, takie że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $T > 0$, dla którego zachodzi implikacja: jeśli $M_p(x) > T$ lub $|x| > T$, to $m_{p,q}(x) < \varepsilon$, gdzie

$$m_{p,q}(x) := \begin{cases} \frac{M_p(x)}{M_q(x)} & \text{gdy } x \in Q \\ 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R}^d \setminus Q \, ; \end{cases}$$

(M) dla każdego $p \in \mathbb{N}$ istnieje stała $C_p > 0$, taka że dla dowolnego wskaźnika $i \in \{1,2,\ldots,d\}$ oraz dowolnych $x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_d$, $y_i \in \mathbb{R}$ spełniających nierówności $|x_i| \leq |y_i|$ oraz $x_i \cdot y_i > 0$ zachodzi

$$M_p(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_d) \leq C_p \cdot M_p(x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_d) \, ;$$

(N) dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $q > p$, taka że $m_{p,q} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ oraz $m_{p,q}(x) \to 0$ gdy $|x| \to \infty$.

A. Kamiński rozważał w pracy [4] dodatkowo warunek (N′) gwarantujący prostszą reprezentację elementów przestrzeni $K\{M_p\}'$ (zob. twierdzenie 3):

(N') dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ oraz $i \in \{1,2,\ldots,d\}$ istnieje wskaźnik $q > p$ i stała $B_{i,p} > 0$, taka że

$$\mu(\bar{x}) := \int_{-\infty}^{\infty} m_{p,q}(x)\, dx_i \le B_{i,p}$$

dla prawie wszystkich $\bar{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$, gdzie $\bar{x} := (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_d)$.

Oczywiście, w przypadku jednowymiarowym ($d = 1$) warunek (N') jest zawsze spełniony.

W pracy [9] J. Uryga rozważał dwa dodatkowe warunki, przy których udowodnił twierdzenia o splocie funkcji uogólnionych typu $K\{M_p\}'$:

(T) dla każdego $p \in \mathbb{N}$ oraz $h > 0$ istnieją $q > p$ i stała $C_{p,h} > 0$, takie że

$$M_p(x+y) \le C_{p,h} \cdot M_q(x)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|y| \le h$;

(R) dla wszystkich $p \in \mathbb{N}$ istnieje wskaźnik $q > p$ oraz stała $D_p > 0$, taka że

$$M_p(-x) \le D_p \cdot M_q(x)$$

dla $x \in \mathbb{R}^d$.

Definicja 3. *Symbolem $K\{M_p\}'$ oznaczamy przestrzeń dualną do przestrzeni $K\{M_p\}$, tzn. $K\{M_p\}'$ zawiera wszystkie funkcjonały liniowe ciągłe na $K\{M_p\}$.*

Następujące dwa twierdzenia charakteryzują postać funkcjonałów liniowych, ciągłych na $K\{M_p\}$.

Twierdzenie 1. (zob. [1], str. 110). *Jeżeli ciąg $\{M_p\}$ spełnia warunek* (P) *oraz f jest funkcjonałem liniowym na $K\{M_p\}$, to następujące warunki są równoważne:*

(*i*) $f \in K\{M_p\}'$;

(*ii*) *istnieje $p \in \mathbb{N}$ oraz zespolone miary borelowskie μ_q dla $q \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| \le p$, skupione na* supp f, *takie że*

$$< f, \varphi > = \sum_{|q|\le p} \int_{\mathbb{R}^d} M_p(x) \cdot \varphi^{(q)}(x)\, d\mu_q(x)$$

dla $\varphi \in K\{M_p\}$.

Twierdzenie 2. (zob. [1], str. 113). *Jeżeli ciąg $\{M_p\}$ spełnia warunki* (M), (N) *oraz f jest funkcjonałem liniowym na $K\{M_p\}$, to następujące warunki są równoważne:*

(*i*) $f \in K\{M_p\}'$;

(*ii*) *istnieje $p \in \mathbb{N}$ oraz funkcje $F_q \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dla $q \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| \le p$, takie że*

$$f = \sum_{|q|\le p} (M_p \cdot F_q)^{(q)}.$$

A. Kamiński udowodnił (zob. [4]), że przy dodatkowym warunku (N′) można uzyskać następującą wygodną charakteryzację.

Twierdzenie 3. *Jeżeli ciąg* $\{M_p\}$ *spełnia warunki* (P), (M), (N) *i* (N′) *oraz* $f \in K\{M_p\}'$, *to istnieją* $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0^d$ *oraz funkcja* $F \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, *takie że*

$$f = (M_p \cdot F)^{(q)}.$$

Uwaga 1. *Z monotoniczności ciągu* $\{M_p\}$ *wynika, że wskaźnik* p *występujący w powyższych trzech twierdzeniach można dowolnie zwiększyć.*

Przykład 1. *Dla zbioru zwartego* $K \subset \mathbb{R}^d$ *przyjmijmy*

$$M_p(x) := \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in K; \\ \infty & \text{dla } x \in \mathbb{R}^d \setminus K. \end{cases}$$

Wówczas przestrzeń $K\{M_p\}$ *pokrywa się z przestrzenią* $\mathcal{D}_K$.

Przykład 2. *Jeżeli przyjmiemy* $M_p(x) := (1 + |x|)^p$, *to przestrzeń* $K\{M_p\}$ *będzie przestrzenią* $\mathcal{S}$, *czyli przestrzenią funkcji szybko malejących Schwartza.*

2. Przestrzenie typu $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$

Chociaż przestrzenie typu $K\{M_p\}$ obejmują znaczną klasę przestrzeni funkcji próbnych, istnieje wiele ważnych ze względu na zastosowania przestrzeni, które nie są przestrzeniami typu $K\{M_p\}$. Są to np. przestrzeń funkcji gładkich o zwartym nośniku (przestrzeń $\mathcal{D}$) oraz przestrzenie Szyłowa typu S (przestrzenie S_α). Wszystkie te przestrzenie można jednak przedstawić w postaci granic induktywnych przestrzeni typu $K\{M_p\}$.

Definicja 4. *Niech* $\mathcal{M} = \{M_{p,n} : p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$ *będzie rodziną funkcji określonych na* $\mathbb{R}^d$, *o wartościach w przedziale* $[1, \infty]$. *Mówimy, że* $\mathcal{M}$ *jest rodziną bazową, jeżeli spełnia warunki:*

(*a*) *dla* $p, n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in \mathbb{R}^d$ *zachodzą nierówności:*

$$M_{p,n+1}(x) \leq M_{p,n}(x) \leq M_{p+1,n}(x)\,;$$

(*b*) *dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *zbiory*

$$Q_{p,n} := \{x \in \mathbb{R}^d : M_{p,n}(x) < \infty\}$$

są równe (tzn. nie zależą od p*);*

(*c*) *funkcje* $M_{p,n}$ *są ciągłe na* $Q_{p,n}$.

Rodzinę bazową $\mathcal{M}$ można interpretować jako ciąg $\{M_{p,n}\}_{n=1}^{\infty}$ ciągów bazowych $\{M_{p,n}\}_{p=1}^{\infty}$.

Definicja 5. *Niech $\mathcal{M} = \{M_{p,n} : p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$ będzie rodziną bazową oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$ oznaczamy przestrzeń typu $K\{M_p\}$, gdzie $M_p := M_{p,n}$. Natomiast symbolem $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ oznaczamy sumę przestrzeni $\mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$, gdzie n przebiega wszystkie liczby naturalne. Ciąg $\{\varphi_j\}$ funkcji $\varphi_j \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ nazywamy zbieżnym do zera w $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, jeżeli istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $\varphi_j \in \mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$ oraz $\varphi_j \to 0$ w $\mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$.*

Podobnie jak w przypadku ciągów $\{M_p\}$ będziemy rozważali dodatkowe warunki dotyczące rodziny $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$. Będziemy mówili, że rodzina $\mathcal{M}$ spełnia warunek (P), jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ciąg $\{M_{p,n}\}_{p=1}^{\infty}$ spełnia warunek (P). Analogicznie określamy warunki (M), (N), (N′), (T) oraz (R) dla rodziny $\mathcal{M}$.

Definicja 6. *Symbolem $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałów liniowych ciągłych na $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$.*

Przykład 3. *Niech $\{M_p\}$ będzie ciągiem bazowym. Jeżeli zdefiniujemy rodzinę $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$ w następujący sposób*

$$M_{p,n}(x) := M_p(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^d \text{ oraz } p, n \in \mathbb{N},$$

to przestrzeń $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ będzie przestrzenią $K\{M_p\}$.

Przykład 4. *Jeżeli zdefiniujemy*

$$M_{p,n}(x) := \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| \le n; \\ \infty & \text{dla } |x| > n, \end{cases}$$

to $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ będzie przestrzenią $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, czyli przestrzenią funkcji gładkich na $\mathbb{R}^d$ o zwartym nośniku.

3. Splot w przestrzeni $K\{M_p\}'$

Istnieje wiele sposobów określenia splotu dystrybucji. Niektóre z nich opierają się na pojęciach ciągu jedynkowego oraz gładkiego rozkładu jedynki.

Definicja 7. *Ciąg $\{\eta_n\}$ funkcji $\eta_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ nazywamy ciągiem jedynkowym, jeżeli spełnia następujące dwa warunki* (*a*) *dla dowolnego zbioru zwartego* $K \subset \mathbb{R}^d$ *istnieje liczba* $n_0 \in \mathbb{N}$, *taka że*

$$\eta_n(x) = 1$$

dla $x \in K$ *oraz* $n \geq n_0$;

(*b*) *dla każdego wielowskaźnika* $q \in \mathbb{N}_0^d$ *istnieje stała* $C_p > 0$, *taka że*

$$|\eta_n^{(q)}(x)| \leq C_p$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 8. *Ciąg* $\{\omega_n\}$ *funkcji nieujemnych* $\omega_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *nazywamy gładkim rozkładem jedynki, jeżeli*

(*a*) *nośniki* $\operatorname{supp} \omega_n$ *tworzą lokalnie skończone pokrycie* $\mathbb{R}^d$;

(*b*) *dla każdego* $x \in \mathbb{R}^d$ *zachodzi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) = 1 ;$$

(*c*) *dla każdego* $q \in \mathbb{N}_0^d$ *istnieje stała* $D_q > 0$, *taka że*

$$\sup_{n \in N} \| \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(q)} \|_{C(\mathbb{R}^d)} \leq D_q.$$

Inna definicja splotu dystrybucji wykorzystuje pojęcie dystrybucji całkowalnych.

Definicja 9. *Niech* $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ *będzie przestrzenią funkcji* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, *takich że dla dowolnego wielowskaźnika* $q \in \mathbb{N}_0^d$ *oraz dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $T > 0$, *takie że* $|\varphi^{(q)}(x)| < \varepsilon$ *dla wszystkich* $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| > T$. *Ciąg* $\{\varphi_n\}$ *funkcji* $\varphi_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ *nazywamy zbieżnym do zera w przestrzeni* $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ *i piszemy wtedy* $\varphi_n \to 0$ *w* $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, *jeżeli*

$$\lim_{n \to \infty} (\sup \{|\varphi_n^{(q)}(x)| : x \in \mathbb{R}^d\}) = 0$$

dla dowolnego wielowskaźnika $q \in \mathbb{N}_0^d$.

Definicja 10. *Symbolem* $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ *będziemy oznaczać przestrzeń funkcji gładkich na* $\mathbb{R}^d$, *dla których każda pochodna jest funkcją ograniczoną na* $\mathbb{R}^d$. *Ciąg* $\{\varphi_n\}$ *funkcji* $\varphi_n \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ *nazywamy zbieżnym do zera w przestrzeni* $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ *i piszemy wtedy* $\varphi_n \to 0$ *w* $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, *jeżeli*

(*i*) *dla dowolnego zbioru zwartego* $K \subset \mathbb{R}^d$ *oraz wielowskaźnika* $q \in \mathbb{N}_0^d$

$$\lim_{n \to \infty} \| \varphi_n^{(q)} \|_{C(K)} = 0 ;$$

(*ii*) *dla dowolnego wielowskaźnika* $q \in \mathbb{N}_0^d$ *istnieje stała* $C_q > 0$, *taka że*

$$|\varphi_n^{(q)}(x)| \leq C_q$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in \mathbb{R}^d$.

Można wykazać (zob. [6], str. 201), że przestrzenie dualne do $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ oraz $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ są równe. Tę wspólną przestrzeń dualną będziemy oznaczali symbolem $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ i nazywali przestrzenią dystrybucji całkowalnych na $\mathbb{R}^d$.

Twierdzenie 4. (zob. [6], Ch. VI, Th. XXV). *Jeżeli $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, to następujące warunki są równoważne:*

(i_1) $u \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$;

(i_2) *dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ oraz ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$ istnieje*

$$\lim_{n\to\infty} < u, \eta_n\varphi > \;;$$

(i_3) *dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ oraz ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$ istnieje*

$$\lim_{n\to\infty} < u, \eta_n\varphi > \;;$$

(i_4) *dla dowolnego ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$ istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} < u, \eta_n > \;;$$

(i_5) $u * \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$;*

(i_6) *u jest skończoną sumą pochodnych dystrybucyjnych funkcji całkowalnych.*

Inny układ warunków charakteryzujących dystrybucje całkowalne podał J. Uryga w pracy [7].

Twierdzenie 5. (zob. [7]). *Dla dowolnej dystrybucji $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) $u \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$;

(ii) *dla dowolnego gładkiego rozkładu jedynki $\{\omega_n\}$ szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} < u, \omega_n >$$

jest zbieżny;

(iii) *dla dowolnego ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$, takiego że $0 \leq \eta_n \leq 1$, istnieje*

$$\lim_{n\to\infty} < u, \eta_n > \;;$$

W pracy [7] J. Uryga udowodnił następujące twierdzenie dotyczące równoważności warunków istnienia splotu w przestrzeniach $K\{M_p\}'$.

Twierdzenie 6. (zob. [7], [9]). *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *oraz* $\{M_p\}$ *jest ciągiem bazowym* (zob. definicja 1) *funkcji* M_p, *o wartościach skończonych, spełniającym warunki* (M), (N), (R), (T), *to następujące warunki są równoważne:*

(*i*) $\varphi^\Delta \cdot (f \otimes g) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{2d})$ *dla wszystkich funkcji* $\varphi \in K\{M_p\}$;

(*ii*) $(\check{g} * \varphi) \cdot f \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ *dla wszystkich funkcji* $\varphi \in K\{M_p\}$;

(*iii*) $(\check{f} * \varphi) \cdot g \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ *dla wszystkich funkcji* $\varphi \in K\{M_p\}$;

(*iv*) $(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnych* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in K\{M_p\}$;

(*v*) $(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnych* $\varphi \in K\{M_p\}$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$;

(*vi*) $(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnych* φ, $\psi \in K\{M_p\}$.

Podamy teraz pięć definicji splotu dystrybucji w $K\{M_p\}'$, analogicznych do definicji splotu dystrybucji w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Definicja 11. *Niech* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *Mówimy, że istnieje splot* $f * g$ *w* $K\{M_p\}'$, *jeżeli*

$$\varphi^\Delta \cdot (f \otimes g) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{2d})$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in K\{M_p\}$. *Wtedy funkcjonał* $f * g$ *określony jest wzorem*

$$< f * g \ , \ \varphi > := < \varphi^\Delta \cdot (f \otimes g) \ , \ 1 > \qquad \text{dla } \varphi \in K\{M_p\}.$$

Definicja 12. *Niech* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *Mówimy, że istnieje splot* $f * g$ *w* $K\{M_p\}'$, *jeśli dla dowolnej funkcji* $\varphi \in K\{M_p\}$ *oraz dowolnego ciągu jedynkowego* $\{\eta_n\}$ *funkcji* $\eta_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$ *istnieje granica*

$$< f * g \ , \ \varphi > := \lim_{n \to \infty} < f \otimes g \ , \ \eta_n \varphi^\Delta > \tag{1}$$

Uwaga 2. *Wartość granicy występującej we wzorze* (1) *nie zależy od wyboru ciągu jedynkowego* $\{\eta_n\}$.

Definicja 13. *Niech* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *Mówimy, że istnieje splot* $f * g$ *w* $K\{M_p\}'$, *jeżeli dla dowolnego gładkiego rozkładu jedynki* $\{\omega_n\}$ *oraz dowolnej funkcji* $\varphi \in K\{M_p\}$ *istnieje granica*

$$< f * g \ , \ \varphi > := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} < f \otimes g \ , \ \omega_k \cdot \varphi^\Delta > \tag{2}$$

Uwaga 3. *Wartość granicy występującej we wzorze* (2) *nie zależy od wyboru gładkiego rozkładu jedynki* $\{\omega_n\}$.

Definicja 14. *Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Mówimy, że istnieje splot $f * g$ w $K\{M_p\}'$, jeżeli*

$$(\check{g} * \varphi) \cdot f \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$$

dla wszystkich funkcji $\varphi \in K\{M_p\}$. Wówczas funkcjonał $f * g$ określony jest wzorem

$$< f * g\ ,\ \varphi > := < (\check{g} * \varphi) \cdot f\ ,\ 1 > \quad \text{dla } \varphi \in K\{M_p\}\ .$$

Definicja 15. *Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Mówimy, że istnieje splot $f * g$ w $K\{M_p\}'$, jeśli*

$$(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

dla wszystkich par funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in K\{M_p\}$. Wówczas funkcjonał $f * g$ określony jest równością

$$< (f * g) * \varphi\ ,\ \psi > = \int_{\mathbb{R}^d} (f * \varphi)(x) \cdot (\check{g} * \psi)(x)\, dx \tag{3}$$

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in K\{M_p\}$.

Uwaga 4. (zob. [7]). *Jeżeli spełniony jest warunek określony w powyższej definicji, to istnieje funkcjonał $f * g$, spełniający równość* (3) *i jest przez tę równość wyznaczony jednoznacznie.*

Twierdzenie 7. (zob. [7], [9]). *Jeżeli $\{M_p\}$ jest ciągiem bazowym* (por. definicja 1) *funkcji o wartościach skończonych, spełniającym warunki* (M), (N), (R), (T), *to przedstawione w powyższych pięciu definicjach warunki istnienia splotu dystrybucji f i g w przestrzeni $K\{M_p\}'$ są równoważne. Zdefiniowane w tych definicjach funkcjonały $f * g$ są równe i należą do przestrzeni $K\{M_p\}'$.*

W szczególnym przypadku, gdy ciąg $\{M_p\}$ jest dobrany tak, że $K\{M_p\} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (np. gdy $M_p(x) = (1 + |x|)^p$), splot dystrybucji f i g w przestrzeni $K\{M_p\}'$ nazywamy splotem temperowanym.

4. Istnienie splotu w przestrzeni $\mathcal{S}'$

A. Kamiński w pracy [3] podał przykład funkcji gładkich znikających w nieskończoności o nośnikach zgodnych, dla których splot dystrybucyjny nie jest dystrybucją temperowaną. Przykład ten był negatywnym rozwiązaniem problemu postawionego przez R. Shiraishiego: czy z istnienia splotu $f * g$ w $\mathcal{D}'$ dystrybucji temperowanych $f, g \in \mathcal{S}'$ wynika, że $f * g \in \mathcal{S}'$?

Również w pracy [3] został wprowadzony tzw. warunek wielomianowej zgodności.

Definicja 16. *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^d$. Mówimy, że zbiory X, Y są zgodne wielomianowo, jeżeli istnieje wielomian $W : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, taki że*

$$|x| + |y| \leq W(|x+y|) \quad dla\ x \in X,\ y \in Y\ .$$

Następujące dwa twierdzenia zostały udowodnione przez A. Kamińskiego w [3] i [5].

Twierdzenie 8. (zob. [3]). *Jeżeli $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ są dystrybucjami, których nośniki* supp f *oraz* supp g *są zgodne wielomianowo, to istnieje splot temperowany $f * g$.*

Twierdzenie 9. (zob. [3], [5]). *Jeżeli $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ są zbiorami, takimi że istnieje splot temperowany $f * g$ dla dowolnych dystrybucji temperowanych $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, takich że* supp $f \subset X$, supp $g \subset Y$, *to zbiory X, Y są zgodne wielomianowo.*

5. Istnienie splotu w przestrzeniach $K\{M_p\}'$

Ponieważ przestrzenie Gelfanda-Szyłowa typu $K\{M_p\}$ stanowią naturalne uogólnienie przestrzeni funkcji szybko malejących $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, więc powstał kolejny problem: czy można sformułować warunek zgodności, wyrażony w języku funkcji M_p, który

- zapewniałby istnienie splotu dystrybucji w przestrzeni $K\{M_p\}'$;
- byłby równoważny warunkowi zgodności wielomianowej w przypadku, gdy $K\{M_p\} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Próby rozwiązania tego problemu zapoczątkował S. Pilipović. Podał on warunki sformułowane w oparciu o wyróżnione klasy funkcji ciągłych. Taki opis wymagał określenia tych klas dla danego ciągu $\{M_p\}$, co (w pewnych przypadkach) stanowiło trudność.

Inne rozwiązanie zaproponował J. Uryga wprowadzając warunek zgodności względem $\{M_p\}$ (tzw. $\{M_p\}$-zgodność). Warunek ten, w odróżnieniu od warunków S. Pilipovicia, jest wyrażony jedynie za pomocą funkcji M_p.

Definicja 17. *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^d$. Mówimy, że zbiory X, Y są zgodne względem $\{M_p\}$, jeżeli dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ istnieją liczba naturalna $q > p$ oraz stała $C_p > 0$, takie że*

$$M_p(x) \cdot M_p(y) \leq C_p \cdot M_q(x+y) \quad \text{dla} \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Lemat 1. (zob. [7]). *Jeżeli $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ oraz ciąg $\{M_p\}$ jest tak dobrany, że $K\{M_p\} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, to następujące warunki są równoważne:*

(*i*) *zbiory X, Y są zgodne wielomianowo;*

(*ii*) *zbiory X, Y są zgodne względem $\{M_p\}$.*

Następujące trzy twierdzenia zostały udowodnione przez J. Urygę w pracach [7] oraz [8].

Twierdzenie 10. (zob. [7], [8]). *Jeżeli $\{M_p\}$ jest ciągiem bazowym* (por. definicja 1) *funkcji o wartościach skończonych oraz $f, g \in K\{M_p\}'$, przy czym nośniki* supp f, supp g *są zgodne względem $\{M_p\}$, to istnieje splot $f * g$ w $K\{M_p\}'$.*

Twierdzenie 11. (zob. [7], [8]). *Jeżeli $\{M_p\}$ jest ciągiem, spełniającym założenia twierdzenia* 10 *oraz $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ są podzbiorami, takimi że splot $f * g$ istnieje w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dla dowolnych $f, g \in K\{M_p\}'$ o nośnikach zawartych odpowiednio w X i Y, to zbiory X, Y są zgodne.*

Twierdzenie 12. (zob. [7], [8]). *Jeżeli $\{M_p\}$ jest ciągiem spełniającym założenia twierdzenia* 10 *i dodatkowy warunek* (T) (zob. str. 89) *oraz $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ są podzbiorami, takimi że istnieje splot $f*g$ w $K\{M_p\}'$ dla dowolnych dystrybucji $f, g \in K\{M_p\}'$ o nośnikach zawartych odpowiednio w X i Y, to zbiory X, Y są zgodne względem $\{M_p\}$.*

Bardzo ważne ze względu na dalsze zastosowania do badania splotu w przestrzeniach $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ są wyniki J. Urygi dotyczące splotu, w sytuacji gdy oba czynniki należą do różnych przestrzeni typu $K\{M_p\}'$.

Do końca tej części będziemy zakładali, że $\{M_p\}$, $\{M'_p\}$, $\{M''_p\}$ są ciągami bazowymi funkcji o wartościach skończonych, spełniającymi warunek (P).

Definicja 18. *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^d$. Mówimy, że zbiory X, Y są zgodne względem ($\{M_p\}$, $\{M'_p\}$, $\{M''_p\}$), jeżeli dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ istnieje liczba naturalna $q > p$ oraz stała $C_p > 0$, taka że*

$$M'_p(x) \cdot M''_p(y) \leq C_p \cdot M_q(x+y) \quad \text{dla} \quad x \in X, \cdot y \in Y.$$

Twierdzenie 13. (zob. [7], [8]). *Jeżeli $f \in K\{M'_p\}'$, $g \in K\{M''_p\}'$ oraz nośniki* supp f, supp g *są zgodne względem ($\{M_p\}$, $\{M'_p\}$, $\{M''_p\}$), to istnieje splot $f * g$ w $K\{M_p\}'$.*

Twierdzenie 14. (zob. [7], [8]). *Jeżeli $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ są podzbiorami, takimi że istnieje splot $f*g$ w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dla wszystkich par dystrybucji $f \in K\{M'_p\}'$, $g \in K\{M''_p\}'$ o nośnikach zawartych odpowiednio w X i Y, to zbiory X, Y są zgodne.*

Twierdzenie 15. (zob. [7], [8]). *Jeżeli ciągi $\{M_p\}$, $\{M'_p\}$, $\{M''_p\}$ spełniają dodatkowy warunek* (T) (zob. str. 89) *oraz $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ są podzbiorami, takimi że istnieje splot $f * g$ w $K\{M_p\}'$ dla wszystkich par dystrybucji $f \in K\{M'_p\}'$, $g \in K\{M''_p\}'$ o nośnikach zawartych odpowiednio w X i Y, to zbiory X, Y są zgodne względem ($\{M_p\}$, $\{M'_p\}$, $\{M''_p\}$).*

6. Splot w przestrzeniach $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$

Z twierdzenia 6 łatwo wyprowadzić następujący „jego analogon” dla splotu w przestrzeniach $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$:

Twierdzenie 16. *Niech* $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$ *będzie rodziną bazową* (zob. definicja 4) *funkcji, o wartościach skończonych, spełniającą warunki* (M), (N), (R), (T). *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, *to następujące warunki są równoważne:*

(*i*) $\varphi^{\Delta} \cdot (f \otimes g) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{2d})$ *dla wszystkich funkcji* $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$;

(*ii*) $(\check{g} * \varphi) \cdot f \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ *dla wszystkich funkcji* $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$;

(*iii*) $(\check{f} * \varphi) \cdot g \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ *dla wszystkich funkcji* $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$;

(*iv*) $(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnych* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$;

(*v*) $(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnych* $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$;

(*vi*) $(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnych* $\varphi, \psi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$.

Dowód. Załóżmy, że spełniony jest warunek (*i*). Ustalmy, w sposób dowolny, liczbę $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\varphi^{\Delta} \cdot (f \otimes g) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{2d})$$

dla wszystkich funkcji $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}_n$. Z twierdzenia 6 wynika więc, że

$$(\check{g} * \varphi) \cdot f \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$$

dla wszystkich $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}_n$, co wobec dowolności n oznacza, że spełniony jest warunek (*ii*).

Podobnie dowodzimy pozostałych implikacji:

$$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (i) \,. \blacksquare$$

Następujące definicje są modyfikacją definicji splotu dystrybucji w przestrzeni $K\{M_p\}'$ w przypadku przestrzeni $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$.

Definicja 19. *Niech* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *Mówimy, że istnieje splot* $f * g$ *w* $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, *jeżeli*

$$\varphi^{\Delta} \cdot (f \otimes g) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{2d})$$

dla wszystkich funkcji $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. *Wtedy funkcjonał* $f * g$ *jest określony wzorem*

$$< f * g \,,\, \varphi > := < \varphi^{\Delta} \cdot (f \otimes g) \,,\, 1 > \qquad \text{dla} \quad \varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}.$$

Definicja 20. *Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Mówimy, że istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, jeśli dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ oraz dowolnego ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$ funkcji $\eta_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$ istnieje granica*

$$< f * g \, , \, \varphi > := \lim_{n\to\infty} < f \otimes g \, , \, \eta_n \varphi^{\Delta} > . \tag{4}$$

Uwaga 5. *Wartość granicy występującej po prawej stronie wzoru* (4) *nie zależy od wyboru ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$.*

Definicja 21. *Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Mówimy, że istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, jeżeli dla dowolnego gładkiego rozkładu jedynki $\{\omega_n\}$ oraz wszystkich funkcji $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ istnieje granica*

$$< f * g \, , \, \varphi > := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < f \otimes g \, , \, \omega_k \cdot \varphi^{\Delta} > . \tag{5}$$

Uwaga 6. *Wartość granicy występującej po prawej stronie wzoru* (5) *nie zależy od wyboru gładkiego rozkładu jedynki $\{\omega_n\}$.*

Definicja 22. *Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Mówimy, że istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, jeżeli*

$$(\check{g} * \varphi) \cdot f \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. Wówczas funkcjonał $f * g$ określony jest wzorem

$$< f * g \, , \, \varphi > := < (\check{g} * \varphi) \cdot f \, , \, 1 > \qquad \text{dla} \quad \varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}} .$$

Definicja 23. *Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Mówimy, że istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, jeśli*

$$(f * \varphi) \cdot (\check{g} * \psi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

dla wszystkich par funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. Wówczas funkcjonał $f * g$ określony jest równością

$$< (f * g) * \varphi \, , \, \psi > := \int_{\mathbb{R}^d} (f * \varphi)(x) \cdot (\check{g} * \psi)(x) \, dx \tag{6}$$

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$.

Uwaga 7. *Jeśli spełniony jest warunek podany w powyższej definicji, to istnieje dokładnie jeden funkcjonał $f * g$ spełniający równość* (6).

Dowód. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną oraz niech u_n będzie dystrybucją, o której mowa w uwadze 4, spełniającą równanie (3) dla wszystkich $\psi \in \mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$. Jeżeli $\psi \in \mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$, to przyjmijmy

$$< f * g \, , \, \psi > := < u_n \, , \, \psi > .$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy $< f * g, \psi >$ dla wszystkich $\psi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. Pokażemy, że ta definicja nie zależy od wyboru $n \in \mathbb{N}$. W tym celu wystarczy wykazać, że $< u_m \, , \, \psi > = < u_n \, , \, \psi >$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$, takich że $n < m$ oraz dowolnej funkcji $\psi \in \mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$. Niech więc $u_{m,n}$ będzie obcięciem funkcjonału u_m do przestrzeni $\mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$. Łatwo zauważyć, że funkcjonał $u_{m,n}$ spełnia równość (3) dla wszystkich $\psi \in \mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$, a więc zgodnie z uwagą 4 mamy $u_{m,n} = u_n$.

Niech u będzie funkcjonałem liniowym na $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ spełniającym równość (6) oraz niech $\psi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. Dobierzmy liczbę $n \in \mathbb{N}$, tak by $\psi \in \mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$. Obcięcie funkcjonału u do przestrzeni $\mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$ jest równe funkcjonałowi u_n z tych samych powodów, dla których $u_m = u_n$. Wobec tego zachodzą równości:

$$< u \, , \, \psi > = < u_n \, , \, \psi > = < f * g \, , \, \psi > . \blacksquare$$

Twierdzenie 17. *Jeżeli $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$ jest rodziną bazową funkcji, o wartościach skończonych, spełniającą warunki* (M), (N), (R), (T), *to przedstawione w powyższych pięciu definicjach warunki istnienia splotu dystrybucji f i g w przestrzeni $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ są równoważne. Zdefiniowane w nich funkcjonały $f * g$ są równe i należą do przestrzeni $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$.*

Dowód tego twierdzenia wynika z twierdzeń 16, 4, 5 oraz 7.

Jeżeli rodzina $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$ jest określona w taki sposób, że $\mathcal{K}^{\mathcal{M}} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (zob. przykład 4), to splot w przestrzeni $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ jest równoważny splotowi w przestrzeni $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

7. Istnienie splotu w przestrzeni $\mathcal{D}'$

Definicja 24. *Niech X i Y będą podzbiorami przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Mówimy, że zbiory X, Y są zgodne, jeżeli dla dowolnych par ciągów $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, takich że $x_n \in X$, $y_n \in Y$ dla $n \in \mathbb{N}$, zachodzi implikacja*

$$\lim_{n\to\infty} (|x_n| + |y_n|) = \infty \implies \lim_{n\to\infty} |x_n + y_n| = \infty .$$

Lemat 2. *Jeżeli X, Y są podzbiorami $\mathbb{R}^d$, to następujące warunki są równoważne:*

(*a*) *zbiory X, Y są zgodne;*

(*b*) *dla dowolnego zbioru ograniczonego* $I \subset \mathbb{R}^d$ *zbiór* $I^\Delta \cap (X \times Y)$ *jest ograniczonym podzbiorem* $\mathbb{R}^{2d}$, *gdzie*

$$I^\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d} : x + y \in I\};$$

(*c*) *dla dowolnego zbioru ograniczonego* $I \subset \mathbb{R}^d$ *zbiory* $X \cap (I - Y)$ *oraz* $(I - X) \cap Y$ *są ograniczone w* $\mathbb{R}^d$.

Twierdzenie 18. (zob. [2]). *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *są dystrybucjami, których nośniki* supp f *i* supp g *są zgodne, to istnieje splot* $f * g$ *w* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Twierdzenie 19. (zob. [5]). *Jeżeli* X, Y *są podzbiarami* $\mathbb{R}^d$, *takimi że splot* $f * g$ *istnieje w* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *dla dowolnych dystrybucji* f *i* g, *których nośniki są zawarte odpowiednio w* X *i* Y, *to zbiory* X, Y *są zgodne.*

8. Istnienie splotu w przestrzeniach $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$

W tej części będziemy zakładali, że $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$, $\mathcal{M}_1 = \{M'_{p,n}\}$, $\mathcal{M}_2 = \{M''_{p,n}\}$ są rodzinami bazowymi funkcji o wartościach skończonych, spełniającymi warunek (P). Jedynie w uwadze 10 założenia te nie będą spełnione.

Definicja 25. *Niech* $X, Y \subset \mathbb{R}^d$. *Mówimy, że zbiory* X, Y *są zgodne względem rodzin* $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, *jeżeli dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje* $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, *takie że zbiory* X, Y *są zgodne względem* $(\{M_{p,n}\}_{p=1}^\infty, \{M'_{p,m}\}_{p=1}^\infty, \{M''_{p,m}\}_{p=1}^\infty)$.

Jeżeli $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$, to mówimy, że zbiory X, Y są zgodne względem $\mathcal{M}$.

Uwaga 8. *Warunek zgodności względem* $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ *można wyrazić w języku funkcji* $M_{p,n}$. *Mianowicie, zbiory* X, Y *są zgodne względem* $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{n\in N} \bigvee_{m>n} \bigwedge_{p\in N} \bigvee_{q>p} \bigvee_{C_p>0} \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{y\in Y} M'_{p,m}(x) \cdot M''_{p,m}(y) \leq C_p \cdot M_{q,n}(x+y).$$

Uwaga 9. *Jeżeli* $M_{p,n} = M_{p,m} = M_p$, $M'_{p,n} = M'_{p,m} = M'_p$ *oraz* $M''_{p,n} = M''_{p,m} = M''_p$ *dla wszystkich* $p, n, m \in \mathbb{N}$, *to warunek zgodności względem rodzin* $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ *jest równoważny warunkowi zgodności względem ciągów* $(\{M_p\}, \{M'_p\}, \{M''_p\})$.

Uwaga 10. *Jeżeli* $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ *oraz* $\mathcal{M}$ *jest rodziną funkcji, zdefiniowaną w przykładzie 4, to następujące warunki są równoważne:*

(*a*) *zbiory* X, Y *są zgodne;*

(*b*) *zbiory* X, Y *są zgodne względem* $\mathcal{M}$.

Dowód. Ponieważ funkcje $M_{p,n}$ nie zależą od p oraz przyjmują wartości w zbiorze $\{1, \infty\}$, więc warunek (b) jest równoważny następującemu warunkowi:

(c) *dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $m > n$, przy którym zachodzi implikacja*

$$|x+y| \leq n \Longrightarrow (|x| \leq m \wedge |y| \leq m)$$

dla wszystkich $x \in X$, $y \in Y$.

Pokażemy, że warunek (c) jest równoważny warunkowi (a).

$(a) \Rightarrow (c)$
Załóżmy, że zbiory X, Y są zgodne, ale nie spełniają warunku (c). Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla dowolnego $m > n$ istnieją $x_m \in X$ oraz $y_m \in Y$, dla których zachodzą nierówności

$$|x_m + y_m| \leq n_0 \wedge (|x_m| > m \vee |y_m| > m). \tag{7}$$

Wobec tego dla wszystkich $m > n_0$ zachodzi nierówność $|x_m| + |y_m| > m$, która wobec zgodności zbiorów X, Y oznacza, że $|x_m + y_m| \longrightarrow \infty$. Uzyskaliśmy więc sprzeczność z nierównościami (7).

$(c) \Rightarrow (a)$
Załóżmy, że zbiory X, Y nie są zgodne, ale spełniają warunek (c). Wówczas istnieją ciągi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, takie że $x_n \in X$, $y_n \in Y$ dla $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| + |y_n| \to \infty$ oraz ciąg $\{|x_n + y_n|\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest rozbieżny do nieskończoności. Bez zmniejszania ogólności, przechodząc w razie potrzeby do podciągów, możemy założyć, że ciąg $\{|x_n + y_n|\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Wobec tego istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $|x_n + y_n| \leq n_0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $|x_n| + |y_n| \longrightarrow \infty$, więc do $m > n_0$ możemy dobrać liczbę naturalną k_m, taką że $|x_{k_m}| > m$ lub $|y_{k_m}| > m$, co jest sprzeczne z warunkiem (c). ∎

Twierdzenie 20. *Jeżeli $f \in (\mathcal{K}^{\mathcal{M}_1})'$, $g \in (\mathcal{K}^{\mathcal{M}_2})'$ oraz nośniki* supp f, supp g *są zgodne względem $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, to istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$.*

Dowód. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Dobierzmy $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, tak by nośniki supp f, supp g były zgodne względem $(\{M_{p,n}\}_{p=1}^{\infty}, \{M'_{p,m}\}_{p=1}^{\infty}, \{M''_{p,m}\}_{p=1}^{\infty})$. Ponieważ obcięcia funkcjonałów f i g do przestrzeni $\mathcal{K}_m^{\mathcal{M}_1}$ i $\mathcal{K}_m^{\mathcal{M}_2}$ są funkcjonałami ciągłymi na tych przestrzeniach, to z twierdzenia 13 wynika, że

$$\varphi^{\Delta} \cdot (f \otimes g) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{2d}) \tag{8}$$

dla wszystkich funkcji $\varphi \in \mathcal{K}_n^{\mathcal{M}}$, tzn. istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}_n^{\mathcal{M}})'$. Z dowolności liczby naturalnej n wynika, że (8) zachodzi dla wszystkich funkcji $\varphi \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, czyli że istnieje splot $f * g$ w $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$. ∎

Literatura

[1] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions*, vol. 2, Academic Press, New York, 1968.

[2] P. Antosik, J. Mikusiński and R. Sikorski, *Theory of Distributions. The Sequential Approach*, Elsevier-PWN, Amsterdam-Warszawa, 1973.

[3] A. Kamiński, *Całkowanie i operacje nieregularne*, rozprawa doktorska 1975, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa.

[4] A. Kamiński, *Remarks on $K\{M_p\}'$ - spaces*, Studia Math. **77** (1984), 499-508.

[5] A. Kamiński, *On the Rényi theory of conditional probabilities*, Studia Math. **79** (1984), 151-191.

[6] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, I 1950, II 1951, Hermann, Paris.

[7] J. Uryga, *Operacje w przestrzeniach funkcji uogólnionych typu $K\{M_p\}'$*, rozprawa doktorska 1989, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa.

[8] J. Uryga, *On compatibility of supports of generalized functions of Gel'fand-Shilov type*, Bull. Pol. Ac.: Math. **36** (5-6) (1988), 45-52.

[9] J. Uryga, *On tensor product and convolution of generalized functions of Gelfand-Shilov type*, Generalized Functions and Convergence, Memorial Volume for Professor Jan Mikusiński, World Scientific, Singapore 1990, 251-264.

Recenzent: Ryszard Rudnicki

Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

The convolution of distributions is an operation defined for certain subsets of the Cartesian product $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$. One of them is the set of pairs (f, g) of distributions, whose supports $\operatorname{supp} f$ and $\operatorname{supp} g$ satisfy the so-called compatibility condition (see [2]).

The convolution is not sufficient, however, for the convolution $f*g$ to be an element of the same space to which the distributions f and g belong. A. Kamiński in [3] constructed an example of two tempered distributions $f, g \in \mathcal{S}'$ whose supports are compatible, but the convolution $f * g$ is not a tempered distribution. He also introduced the condition of polynomial compatibility of supports which guarantees that the convolution of tempered distributions exists and represents a tempered distribution.

J. Uruga in [8] generalized Kamiński's results to the case of the Gel'fand - Shilov spaces of type $K\{M_p\}'$ which embrace the space $\mathcal{S}'$ of tempered distributions as a particular case. He formulated the condition of compatibility in terms of the sequences $\{M_p\}$, such that the convolution of distributions with supports satisfying this condition exists in $K\{M_p\}'$.

In [1], the Shilov spaces $(S_{\alpha,A})'$ and $(S_\alpha)'$ of generalized functions are defined. The spaces $(S_{\alpha,A})'$ belong to the class of the spaces $K\{M_p\}'$ and the spaces $(S_\alpha)'$ do not, but the spaces S_α are inductive limits of the spaces $S_{\alpha,A}$.

In this paper we define the spaces of type $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, determined by a given family $\mathcal{M}$ of functions, which are inductive limits of spaces of type $K\{M_p\}$ and prove that various definitions of the convolution in $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, analogous to the known definitions in $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ and $K\{M_p\}'$, are equivalent.

We also introduce a condition of compatibility with respect to the family $\mathcal{M}$ and prove that if f, g are distributions of type $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ with supports satysfying this condition, then the convolution $f * g$ exists in $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$.

Moreover, we show that if $\mathcal{K}^{\mathcal{M}} = \mathcal{D}$ for a given family $\mathcal{M}$ of functions, then the mentioned condition of compatibility with respect to $\mathcal{M}$ is equivalent to the condition of compatibility formulated in [2].