ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 82 Nr kol. 1360

Wojciech KASZOWSKI

O ZBIORACH POTĘGOWO ZGODNYCH

Streszczenie. W pracy badamy szczególny przypadek przestrzeni typu $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, mianowicie przestrzenie Szyłowa typu S. Dowodzimy, że warunek zgodności zbiorów względem rodzin $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ można w przypadku przestrzeni typu S zastąpić warunkiem zgodności potęgowej. Podajemy również dowód twierdzenia odwrotnego: jeżeli dla dowolnych par dystrybucji typu $(S_\alpha)'$ o nośnikach zawartych w ustalonych dwóch zbiorach istnieje splot w przestrzeni $(S_{\alpha/r})'$, to zbiory te są zgodne w potędze r.

Przedstawiamy także uogólnienie powyższych wyników na przypadek splotu wielu dystrybucji typu $(S_\alpha)'$ oraz badamy problem łączności splotu, gdy wszystkie nośniki są zgodne potęgowo.

ON COMPATIBLE POWER SETS

Summary. In the paper, we study a particular case of the space of functions of type $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, namely the Shilov spaces of type S. We prove that the condition of compatibility of sets with respect to the families $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ in the case of the spaces of type S can be replaced by the condition of compatibility in power. We also give a proof of the converse: if for any pair of distributions of type $(S_\alpha)'$ with the supports contained in two fixed sets their convolution exists in the space $(S_{\alpha/r})'$, then these sets are compatible in power r.

Moreover, we present generalizations of the above results for the convolution of several distributions of type $(S_\alpha)'$ and discuss the problem of the associativity of the convolution in case all the supports are compatible in power.

1. Przestrzenie Szyłowa typu S

Ze względu na złożoność opisu będziemy rozważali jedynie, tak jak w [1], przestrzenie Szyłowa w przypadku jednowymiarowym ($d = 1$).

Przez pojęcie przestrzeni typu S rozumiemy, wprowadzone w rozdziale IV pracy [1], przestrzenie S_α, S^β, S^β_α, a także $S_{\alpha,A}$, $S^{\beta,B}$, $S^{\beta,B}_{\alpha,A}$. Jednak tylko w przypadku przestrzeni S_α i $S_{\alpha,A}$ przestrzenie dualne są podprzestrzeniami przestrzeni dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Przestrzenie $S_{\alpha,A}$ są przykładem przestrzeni typu $K\{M_p\}$, natomiast S_α to szczególny przypadek przestrzeni $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. Elementy $(S_\alpha)'$ nazywać będziemy dystrybucjami Szyłowa typu S.

Definicja 1. *Niech $\alpha \geq 0$. Przestrzeń S_α określa się następująco: funkcja gładka (klasy $C^\infty(\mathbb{R})$) φ należy do S_α, jeśli istnieje stała $A > 0$, taka że dla dowolnego $q \in \mathbb{N}_0$ można znaleźć stałą $C_q > 0$, dla której*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \cdot \varphi^{(q)}(x)| \leq C_q \cdot A^k \cdot k^{k\alpha}$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}_0$.

Twierdzenie 1. (zob. [1], str. 172). *Jeżeli $\alpha = 0$, to $S_\alpha = \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Jeżeli $\alpha > 0$, to funkcja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ należy do przestrzeni S_α wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a > 0$, takie że do dowolnego $q \in \mathbb{N}_0$ można dobrać stałą $C_q > 0$, dla której*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(q)}(x)| \cdot \exp\left(a \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leq C_q.$$

Równość $a = \alpha/(e\cdot A^{\frac{1}{\alpha}})$ określa związek między stałymi A oraz a występującymi w definicji 1 i w powyższej nierówności.

Definicja 2. *Niech $\alpha \geq 0$, $A > 0$ będą dowolnymi liczbami. Symbolem $S_{\alpha,A}$ będziemy oznaczać przestrzeń funkcji gładkich φ na $\mathbb{R}$, takich że dla dowolnej pary liczb B, q ($B > A$, $q \in \mathbb{N}_0$) istnieje stała $C_{B,q} > 0$, dla której*

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}_0} \left| \left(\frac{x}{B\,k^\alpha}\right)^k \cdot \varphi^{(q)}(x) \right| \leq C_{B,q}.$$

Uwaga 1. *Jeżeli $\{A_n\}$ jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich, rozbieżnym do nieskończoności, to $S_\alpha = \bigcup_{n=1}^\infty S_{\alpha,A_n}$.*

Twierdzenie 2. (zob. [1]). *Niech $\alpha, A > 0$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi oraz niech $a := \alpha/(e \cdot A^{\frac{1}{\alpha}})$. Funkcja gładka φ należy do klasy $S_{\alpha,A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary liczb b, q ($b < a$, $q \in \mathbb{N}_0$) istnieje stała $C_{b,q} > 0$, taka że*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(q)}(x)| \cdot \exp\left(b \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leq C_{b,q}. \tag{1}$$

Wniosek 1. *Jeżeli liczby α, A, a są takie jak w twierdzeniu 2, to* $S_{\alpha,A} = K\{M_p\}$, *gdzie*

$$M_p(x) := \exp\left(\frac{ap}{p+1} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \tag{2}$$

dla $p \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in \mathbb{R}$.

Wniosek 2. *Jeżeli α jest dowolną liczbą dodatnią, to* $S_\alpha = \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, *gdzie* $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$ *jest rodziną funkcji zdefiniowanych następująco:*

$$M_{p,n}(x) := \exp\left(\frac{p}{n(p+1)} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \tag{3}$$

dla $p, n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in \mathbb{R}$.

Definicja 3. *Zbieżność w przestrzeni $S_{\alpha,A}$ określamy jako zbieżność w przestrzeni $K\{M_p\}$, zdefiniowanej przez ciąg $\{M_p\}$ dany wzorem* (2). *Wobec tego ciąg $\{\varphi_n\}$ funkcji $\varphi_n \in S_{\alpha,A}$ jest zbieżny do zera w $S_{\alpha,A}$, jeżeli dla dowolnych $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$ zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{\exp\left(\frac{ap}{p+1} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \cdot |\varphi_n^{(q)}(x)| : x \in \mathbb{R}\} = 0$$

gdzie $a = \alpha/(e \cdot A^{\frac{1}{\alpha}})$.

Definicja 4. *Zbieżność w przestrzeni S_α definiujemy jako zbieżność w przestrzeni $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$, określonej przez rodzinę $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$ funkcji określonych wzorem* (3). *Oznacza to, że ciąg $\{\varphi_n\}$ funkcji $\varphi_n \in S_\alpha$ jest zbieżny do zera w S_α, jeżeli istnieje liczba dodatnia $A > 0$, taka że*

(*a*) $\varphi_n \in S_{\alpha,A}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$;

(*b*) $\varphi_n \to 0$ *w* $S_{\alpha,A}$, *gdy* $n \to \infty$.

Lemat 1. *Ciąg* (2), *bazowy dla przestrzeni $S_{\alpha,A}$, spełnia warunki:* (P), (M), (N), (N'), (T), (R).

Dowód. (P) Dla $p \in \mathbb{N}$ przyjmijmy $q := p + 1$ oraz dla $\varepsilon \in (0,1)$ niech

$$T := \max \{\varepsilon^{-p(p+2)}, \left[\frac{(p+1)(p+2)}{a} \cdot \log(1/\varepsilon) \right]^\alpha\}.$$

Jeżeli $M_p(x) > T$, to z (2) wynika, że

$$\frac{ap}{p+1} |x|^{\frac{1}{\alpha}} > \log T \geq \log(\varepsilon^{-p(p+2)}) = p\,(p+2) \log(1/\varepsilon)$$

i stąd

$$|x|^{\frac{1}{\alpha}} > \frac{(p+1)(p+2)}{a} \cdot \log(1/\varepsilon). \tag{4}$$

Z definicji liczby T wnioskujemy, że nierówność (4) zachodzi także przy założeniu $|x| > T$.

Ponieważ, na mocy (2), mamy

$$\log m_{p,p+1}(x) = -\frac{a}{(p+1)(p+2)} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}},$$

więc z nierówności (4) wynika, że

$$\log m_{p,p+1}(x) < -\frac{a}{(p+1)(p+2)} \cdot \frac{(p+1)(p+2)}{a} \cdot \log(1/\varepsilon) = \log \varepsilon,$$

tzn. $M_{p,p+1}(x) < \varepsilon$, jeśli $M_p(x) > T$ lub $|x| > T$.

(M) Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ są liczbami, takimi że $|x| \leq |y|$, to

$$M_p(x) = \exp\left(\frac{ap}{p+1} |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \leq \exp\left(\frac{ap}{p+1} |y|^{\frac{1}{\alpha}} \right) = M_p(y).$$

(N) Jeżeli dla $p \in \mathbb{N}$ przyjmiemy $q := p+1$ oraz

$$b := \frac{a}{(p+1)(p+2)},$$

to

$$m_{p,q}(x) = \exp\left(-b \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right).$$

Dobierzmy liczbę $i_0 \in \mathbb{N}_0$, taką że $i_0 > 2\alpha$. Ponieważ

$$\exp\left(b \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \cdot b^i \cdot |x|^{\frac{i}{\alpha}} \geq \frac{1}{i_0\,!} \cdot b^{i_0} \cdot |x|^{\frac{i_0}{\alpha}},$$

więc

$$\frac{|x|^2}{\exp\left(b \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}}\right)} \leq i_0\,! \cdot b^{-i_0} \cdot |x|^{2-\frac{i_0}{\alpha}} \to 0,$$

gdy $|x| \to \infty$. Wobec tego istnieje liczba $x_0 > 0$, taka że

$$\exp\left(-b \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \leq |x|^{-2} \quad \text{dla} \quad |x| \geq x_0.$$

Stąd, ponieważ $m_{p,q} \leq 1$, mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_{p,q}(x)\, dx \leq 2 \cdot x_0 + 2 \cdot \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-b \cdot x^{\frac{1}{\alpha}} \right) dx \leq$$

$$\leq 2 \cdot x_0 + 2 \cdot \int_{x_0}^{\infty} x^{-2}\, dx = 2 \cdot x_0 + \frac{2}{x_0} < \infty.$$

Równość $\lim_{|x|\to\infty} m_{p,q}(x) = 0$ wynika z tego, że spełniony jest warunek (P).

Ponieważ $d = 1$, więc warunek (N') jest spełniony automatycznie.

(T) Dla $p \in \mathbb{N}$ oraz $h > 0$ przyjmijmy $q := p + 1$ oraz

$$C_{p,h} := \exp\left(\frac{ap}{p+1} \cdot (x_0 + h)^{\frac{1}{\alpha}} \right),$$

gdzie

$$x_0 := \frac{h}{\left(\frac{(p+1)^2}{p(p+2)}\right)^{\alpha} - 1}.$$

Ustalmy $x, y \in \mathbb{R}, |y| \leq h$. Ponieważ

$$\frac{M_p(x+y)}{M_{p+1}(x)} = \exp\left(a \cdot \left(\frac{p}{p+1} \cdot |x+y|^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p+1}{p+2} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right)$$

oraz

$$\frac{p}{p+1} \cdot |x+y|^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p+1}{p+2} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \leq |x|^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{p}{p+1} \left(1 + \frac{h}{|x|}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p+1}{p+2} \right),$$

więc dla $|x| \geq x_0$ zachodzi

$$\frac{M_p(x+y)}{M_{p+1}(x)} \leq \exp\left(a|x|^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{p}{p+1} \left(1 + \left(\frac{(p+1)^2}{p(p+2)}\right)^{\alpha} - 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p+1}{p+2} \right) \right) =$$

$$= \exp\left(a|x|^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{p}{p+1} \cdot \frac{(p+1)^2}{p(p+2)} - \frac{p+1}{p+2} \right) \right) = 1.$$

Załóżmy teraz, że $|x| \leq x_0$. Wtedy zachodzi

$$\frac{M_p(x+y)}{M_{p+1}(x)} \leq M_p(x+y) = \exp\left(\frac{ap}{p+1} \cdot (x_0 + h)^{\frac{1}{\alpha}} \right) = C_{p,h}.$$

Ponieważ $M_p(-x) = M_p(x)$, więc spełniony jest również warunek (R). ∎

Wniosek 3. *Rodzina* (3), *bazowa dla przestrzeni* S_α, *spełnia warunki:* (P), (M), (N), (N'), (T), (R).

Poniższe twierdzenia charakteryzują elementy przestrzeni $(S_{\alpha,A})'$ oraz $(S_\alpha)'$.

Twierdzenie 3. (zob. [1], str. 110). *Jeżeli* $f \in (S_{\alpha,A})'$, *to istnieją* $p \in \mathbb{N}$ *oraz zespolone miary borelowskie* $\mu_0, \ldots, \mu_p$, *skupione na nośniku* supp f *dystrybucji* f, *takie że*

$$< f, \varphi > = \sum_{q=0}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ap}{p+1} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \cdot \varphi^{(q)}(x) \, d\mu_q(x) \tag{5}$$

dla $\varphi \in S_{\alpha,A}$, *gdzie* $a = \alpha/(eA^{\frac{1}{\alpha}})$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli f jest funkcjonałem liniowym ciągłym na S_α, to dla wszystkich liczb dodatnich A istnieją $p \in \mathbb{N}$ oraz zespolone miary borelowskie $\mu_0, \ldots, \mu_p$, skupione na* supp f, *takie że*

$$< f, \varphi > = \sum_{q=0}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ap}{p+1} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \cdot \varphi^{(q)}(x)\, d\mu_q(x) \tag{6}$$

dla $\varphi \in S_{\alpha,A}$, gdzie $a = \alpha/(eA^{\frac{1}{\alpha}})$.

Twierdzenie 5. (zob. [4]). *Jeżeli $f \in (S_{\alpha,A})'$, to istnieją $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$ oraz funkcja $F \in L^\infty(\mathbb{R})$, taka że*

$$f = (M_p \cdot F)^{(q)},$$

gdzie funkcje M_p są określone wzorem (2).

2. Zbiory zgodne w potędze r

W tej części będziemy często korzystali ze znanych nierówności:

$$k^{-1} \cdot (a_1^c + \ldots + a_k^c) \le (a_1 + \ldots + a_k)^c \le k^c \cdot (a_1^c + \ldots + a_k^c), \tag{7}$$

które zachodzą dla wszystkich liczb rzeczywistych, nieujemnych $a_1, \ldots, a_k$, c.

Definicja 5. *Załóżmy, że $X, Y \subset \mathbb{R}$ oraz $r \in [1, \infty)$. Zbiory X, Y nazywamy zgodnymi w potędze r, jeżeli istnieje stała $C > 0$, taka że*

$$|x| + |y| \le C \cdot (1 + |x + y|)^r \tag{8}$$

dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in Y$.

Pokażemy, że ta prosta definicja jest równoważna dość złożonej definicji zgodności względem rodzin funkcji $\mathcal{M}_{\alpha/r}$, $\mathcal{M}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$.

Lemat 2. *Załóżmy, że $X, Y \subset \mathbb{R}$, $r \in [1, \infty)$ oraz dla dowolnego $\gamma > 0$ $\mathcal{M}_\gamma = \{M_{p,n}^\gamma\}_{p,n=1}^\infty$ jest dowolną rodziną funkcji, taką że $\mathcal{K}^{\mathcal{M}_\gamma} = S_\gamma$, np.*

$$M_{p,n}^\gamma(x) := \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{p}{p+1} \cdot |x|^{\frac{1}{\gamma}} \right)$$

dla $p, n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnie ustalonej liczby $\alpha > 0$ następujące warunki są równoważne:

(*a*) *zbiory* X, Y *są zgodne w potędze* r;

(*b*) *zbiory* X, Y *są zgodne względem* $(\mathcal{M}_{\alpha/r}, \mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$ (zob. [7], definicja 25);

(*c*) *istnieje stała* $C > 0$, *taka że*

$$|x|^{\frac{1}{\alpha}} + |y|^{\frac{1}{\alpha}} \leq C + C \cdot |x+y|^{\frac{r}{\alpha}}, \tag{9}$$

dla wszystkich $x \in X$, $y \in Y$.

Dowód. (*b*) $\Rightarrow$ (*c*) Na mocy uwagi o warunku zgodności względem rodzin $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ (zob. [7], uwaga 8) ze zgodności względem $(\mathcal{M}_{\alpha/r}, \mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$ w szczególności wynika, że dla $n = 1$ istnieje liczba naturalna $m > 1$ oraz dla $p = 1$ istnieje $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ oraz stała $C_1 > 0$, takie że zachodzi nierówność

$$M^\alpha_{1,m}(x) \cdot M^\alpha_{1,m}(y) \leq C_1 \cdot M^{\alpha/r}_{q,1}(x+y)$$

dla $x \in X$, $y \in Y$ oraz równoważna jej nierówność

$$\frac{1}{2m} \cdot (|x|^{\frac{1}{\alpha}} + |y|^{\frac{1}{\alpha}}) \leq C_2 + \frac{q}{q+1} \cdot |x+y|^{\frac{r}{\alpha}}$$

dla $x \in X$, $y \in Y$, gdzie $C_2 := \log\, C_1$. Przyjmując

$$C := 2m \cdot \max\{C_2, q/(q+1)\},$$

otrzymujemy nierówność (9).

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*) Zakładając, że warunek (*c*) jest spełniony dla stałej $C > 0$, oraz wykorzystując nierówności (7), otrzymujemy:

$$|x| + |y| = ((|x| + |y|)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha \leq (2^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (|x|^{\frac{1}{\alpha}} + |y|^{\frac{1}{\alpha}}))^\alpha \leq$$

$$\leq 2 \cdot (C + C \cdot |x+y|^{\frac{r}{\alpha}})^\alpha \leq 2 \cdot 2^\alpha \cdot (C^\alpha + C^\alpha \cdot |x+y|^r) =$$

$$= 2^{\alpha+1} \cdot C^\alpha \cdot (1 + |x+y|^r) \leq 2^{\alpha+2} \cdot C^\alpha \cdot (1 + |x+y|)^r.$$

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Niech $C > 0$ będzie stałą występującą w definicji 5. Wówczas dla $x \in X$, $y \in Y$ na mocy (7) i (8) mamy

$$\log\, (M^\alpha_{p,m}(x)\, M^\alpha_{p,m}(y)\,) = \frac{1}{m} \cdot \frac{p}{p+1} \cdot (|x|^{\frac{1}{\alpha}} + |y|^{\frac{1}{\alpha}}) \leq \frac{2}{m}\, (|x| + |y|)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leq \frac{2}{m} \cdot C^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (1 + |x+y|)^{\frac{r}{\alpha}} \leq \frac{2}{m} \cdot C^{\frac{1}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{r}{\alpha}} \cdot (1 + |x+y|^{\frac{r}{\alpha}}).$$

Jeżeli liczbę naturalną m dobierzemy tak, aby $m \geq 4 \cdot n \cdot C^{\frac{1}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{r}{\alpha}}$, to dla dowolnego $q \geq 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{2}{m} \cdot C^{\frac{1}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{r}{\alpha}} \cdot (1 + |x+y|^{\frac{r}{\alpha}}) \leq \frac{1}{2n} \cdot (1 + |x+y|^{\frac{r}{\alpha}}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{q}{q+1} \cdot |x+y|^{\frac{r}{\alpha}} \leq \log\left(e^{\frac{1}{2n}} \cdot M_{q,n}^{\alpha/r}(x+y) \right),$$

a to razem z poprzednią nierównością oznacza, że

$$M_{p,m}^{\alpha}(x) \cdot M_{p,m}^{\alpha}(y) \leq e^{\frac{1}{2n}} \cdot M_{q,n}^{\alpha/r}(x+y)$$

dla $x \in X$, $y \in Y$, czyli spełniony jest warunek (b).

Jak widać, liczbę naturalną $q > p$ można dobrać dowolnie, np. przyjmując $q := p+1$. ∎

Wobec powyższego lematu oraz wniosku 3 możemy twierdzenie o splocie w przestrzeniach $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ (zob. [7], twierdzenie 20) zastosować do przestrzeni $(S_\alpha)'$.

Twierdzenie 6. *Jeżeli $\alpha > 0$, $r \in [1, \infty)$ oraz $f, g \in (S_\alpha)'$ są dystrybucjami, których nośniki* supp f, supp g *są zgodne w potędze r, to istnieje splot $f * g$ w $(S_{\alpha/r})'$.*

Okazuje się, że w przypadku przestrzeni $(S_\alpha)'$ powyższe twierdzenie można odwrócić, podobnie jak w przypadku przestrzeni: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ oraz $K\{M_p\}'$. Zanim jednak to uczynimy, udowodnimy cztery lematy.

Lemat 3. *Niech $\alpha > 0$, $r \in [1, \infty)$. Jeżeli zbiory $X, Y \subset \mathbb{R}$ są zgodne, ale nie są zgodne w potędze r, to istnieją ciągi $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ liczb $x_i \in X$, $y_i \in Y$, takie że zachodzą nierówności:*

$$|x_i| > i, \ |y_i| > i, \ |x_i + y_i| > i \tag{10}$$

oraz

$$|x_i|^{\frac{1}{\alpha}} + |y_i|^{\frac{1}{\alpha}} > i \cdot (1 + |x_i + y_i|^{\frac{r}{\alpha}}) \tag{11}$$

dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$.

Dowód. Z lematu 2 wynika, że istnieją ciągi $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ liczb $x_i \in X$, $y_i \in Y$, dla których spełniona jest nierówność (11).

Zauważmy, że nierówność (11) jest zachowana także wtedy, gdy w miejsce ciągów $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ podstawimy ich podciągi $\{x_{k_i}\}$, $\{y_{k_i}\}$. Z nierówności (11) wynika, że $|x_i|^{\frac{1}{\alpha}} + |y_i|^{\frac{1}{\alpha}} \to \infty$. Ponieważ $|x_i|^{\frac{1}{\alpha}} + |y_i|^{\frac{1}{\alpha}} \leq 2 \cdot (|x_i| + |y_i|)^{\frac{1}{\alpha}}$, więc $|x_i| + |y_i| \to \infty$, co wobec zgodności zbiorów X, Y oznacza, że $|x_i+y_i| \to \infty$. Można dobrać ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{k_i\}$, taki że

$$|x_{k_i} + y_{k_i}| > i \quad \text{dla} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Gdyby żaden z ciągów $\{|x_{k_i}|\}$, $\{|y_{k_i}|\}$ nie zawierał podciągu rozbieżnego do nieskończoności, to oba ciągi byłyby ograniczone, co przeczyłoby jednak temu, że $|x_{k_i}| + |y_{k_i}| \to \infty$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że istnieje podciąg $\{l_i\} \prec \{k_i\}$, taki że

$$|x_{l_i}| \to \infty, \quad \text{gdy} \quad i \to \infty. \tag{13}$$

Udowodnimy, że wówczas $|y_{l_i}| \to \infty$. Gdyby tak nie było, to istniałby podciąg $\{m_i\} \prec \{l_i\}$, dla którego ciąg $\{y_{m_i}\}$ byłby ograniczony, tzn.

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{i \in N} |y_{m_i}| \leq M. \tag{14}$$

Ponieważ, na mocy nierówności (7) oraz (11), mamy

$$i\,(1 + |x_{m_i} + y_{m_i}|)^{\frac{r}{\alpha}} \leq 2^{\frac{r}{\alpha}}\, i\,(1 + |x_{m_i} + y_{m_i}|)^{\frac{r}{\alpha}} < 2^{\frac{r}{\alpha}}\,(|x_{m_i}|^{\frac{1}{\alpha}} + |y_{m_i}|^{\frac{1}{\alpha}}),$$

więc stąd na mocy (7) i (14) mielibyśmy

$$1 - M + |x_{m_i}| \leq 1 + |x_{m_i}| - |y_{m_i}| \leq 1 + |x_{m_i} + y_{m_i}| \leq$$

$$\leq 2 \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{\alpha}{r}} \cdot (|x_{m_i}|^{\frac{1}{\alpha}} + |y_{m_i}|^{\frac{1}{\alpha}})^{\frac{\alpha}{r}} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{\alpha}{r}} \cdot (M^{\frac{1}{r}} + |x_{m_i}|^{\frac{1}{r}}),$$

czyli

$$\frac{1 - M + |x_{m_i}|}{M^{\frac{1}{r}} + |x_{m_i}|^{\frac{1}{r}}} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{\alpha}{r}}. \tag{15}$$

Oczywiście $(2/i)^{(\alpha/r)} \to 0$, gdy $i \to \infty$, a z drugiej strony

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1 - M + |x_{m_i}|}{M^{\frac{1}{r}} + |x_{m_i}|^{\frac{1}{r}}} = \lim_{i \to \infty} |x_{m_i}|^{1-\frac{1}{r}} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad r = 1 \\ \infty & \text{gdy} \quad r > 1. \end{cases}$$

Otrzymana sprzeczność z nierównością (15) dowodzi, że $|y_{l_i}| \to \infty$. Stąd i z (13) wynika, że istnieje podciąg $\{n_i\} \prec \{l_i\}$, taki że $|x_{n_i}| > i$ oraz $|y_{n_i}| > i$ dla $i \in \mathbb{N}$.

Na mocy ostatnich nierówności oraz nierówności (12) ciągi $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ spełniają nierówności (10), co dowodzi tezy lematu.∎

Kolejny lemat wyraża zupełność przestrzeni $(S_\alpha)'$.

Lemat 4. *Jeżeli* $\{f_n\}$ *jest ciągiem dystrybucji* $f_n \in (S_\alpha)'$ *oraz dla wszystkich funkcji* $\varphi \in S_\alpha$ *istnieje granica*

$$< f \, , \, \varphi > := \lim_{n\to\infty} < f_n \, , \, \varphi >,$$

to $f \in (S_\alpha)'$.

Dowód powyższego lematu opiera się na twierdzeniu Banacha-Steinhausa (zob. [10]) oraz na tym, że przestrzeń S_α jest przeliczalną sumą przestrzeni typu $S_{\alpha,A}$, które są zupełnymi przestrzeniami przeliczalnie unormowanymi (zob. [1]).∎

Lemat 5. *Jeżeli* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ *są ciągami liczb* $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $\mu_n \in \mathbb{C}$ *oraz* $|x_n| \to \infty$, $|y_n| \to \infty$, *to*

(*a*) *szeregi* $f := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \delta_{x_n}$, $g := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cdot \delta_{y_n}$ *są zbieżne w* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$;

(*b*) *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \mu_m \cdot \delta_{(x_n, y_m)}$ *jest zbieżny w* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$;

(*c*) $f \otimes g \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \mu_m \cdot \delta_{(x_n, y_m)}$.

Dowód. Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ oraz $K_1 := \operatorname{supp} \varphi_1$, $K_2 := \operatorname{supp} \varphi_2$. Dobierzmy liczbę $n_0 \in \mathbb{N}$, taką że $x_n \in \mathbb{R} \setminus K_1$ oraz $y_n \in \mathbb{R} \setminus K_2$ dla $n > n_0$. Wówczas zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < \lambda_n \cdot \delta_{x_n} \, , \, \varphi_1 > | \; = \; \sum_{n=1}^{n_0} |\lambda_n \cdot \varphi_1(x_n)| \; < \; \infty$$

oraz

$$\sum_{m=1}^{\infty} | < \mu_m \cdot \delta_{y_m} \, , \, \varphi_2 > | \; = \; \sum_{m=1}^{n_0} |\mu_m \cdot \varphi_2(y_m)| \; < \; \infty.$$

Podobnie dowodzimy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} | < \lambda_n \cdot \mu_m \cdot \delta_{(x_n, y_m)} \, , \, \varphi > | \quad < \; \infty.$$

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Ponieważ

$$< f \otimes g \, , \, \varphi_1 \otimes \varphi_2 > = < f \, , \varphi_1 > \cdot < g \, , \varphi_2 > = \; (\sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n \cdot \varphi_1(x_n))\cdot$$

$$\cdot(\sum_{m=1}^{n_0} \mu_m \cdot \varphi_2(y_m)) \; = < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \mu_m \cdot \delta_{(x_n, y_m)} \, , \, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >,$$

więc

$$< f \otimes g \, , \varphi > \; = \; < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \mu_m \cdot \delta_{(x_n, y_m)} \, , \varphi > \tag{16}$$

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Przestrzeń $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R})$ jest gęsta w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, więc równość (16) zachodzi dla wszystkich $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.■

Lemat 6. *Dla dowolnego $\alpha > 0$ istnieje funkcja $\varphi \in S_\alpha$, taka że $\varphi \geq 0$ oraz*

$$\varphi(x) = \exp\left(-|x|^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, takich że $|x| \geq 1$.

Dowód. Niech $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ będzie funkcją, taką że $0 \leq h \leq 1$, supp $h \subset [-1, 1]$ oraz $h(x) = 1$ dla $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (zob. [8], twierdzenie XIX.1.3, str. 331).

Przyjmijmy $\varphi(x) := (1 - h(x)) \cdot \exp(-|x|^{\frac{1}{\alpha}})$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oczywiście $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ oraz $\varphi(x) = \exp(-|x|^{\frac{1}{\alpha}})$ dla $|x| \geq 1$. Pozostaje wykazać, że $\varphi \in S_\alpha$.

Najpierw udowodnimy, że dla dowolnego $q \in \mathbb{N}_0$ istnieją wielomiany $W_q, U_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takie że

$$\varphi^{(q)}(x) \; = \; x^{-q} \cdot W_q\,(x^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp\,(-x^{\frac{1}{\alpha}}) \qquad \text{dla } x > 1$$

oraz

$$\varphi^{(q)}(x) \; = \; (-x)^{-q} \cdot U_q\,((-x)^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp\,(-(-x)^{\frac{1}{\alpha}}) \qquad \text{dla } x < -1.$$

Dla $q = 0$ wystarczy przyjąć $W_q(t) = U_q(t) = 1$ dla $t \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że odpowiednie wielomiany W_q, U_q istnieją dla pewnego $q \in \mathbb{N}_0$. Wówczas dla $x > 1$ zachodzi

$$\begin{aligned}
\varphi^{(q+1)}(x) \; &= \; -q \cdot x^{-q-1} \cdot W_q\,(x^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp\,(-x^{\frac{1}{\alpha}}) \; + \\
&+ \; x^{-q} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot x^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot W_q'\,(x^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp\,(-x^{\frac{1}{\alpha}}) \; + \\
&+ \; x^{-q} \cdot W_q\,(x^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot (-\frac{1}{\alpha}) \cdot x^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \exp\,(-x^{\frac{1}{\alpha}}) \; = \\
&= \; x^{-(q+1)} \cdot W_{q+1}\,(x^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp\,(-x^{\frac{1}{\alpha}}),
\end{aligned}$$

gdzie

$$W_{q+1}\,(t) \; := \; (-q - \frac{1}{\alpha} \cdot t) \cdot W_q\,(t) + \frac{1}{\alpha} \cdot t \cdot W_q'\,(t)$$

dla $t \in \mathbb{R}$. Podobnie dowodzimy, że

$$\varphi^{(q+1)}(x) \; = \; (-x)^{-(q+1)} \cdot U_{q+1}\,((-x)^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp\,(-(-x)^{\frac{1}{\alpha}}),$$

dla $x < -1$, gdzie

$$U_{q+1}(t) := (q + \frac{1}{\alpha} \cdot t) \cdot U_q(t) - \frac{1}{\alpha} \cdot t \cdot W_q'(t)$$

dla $t \in \mathbb{R}$.

Dla $q \in \mathbb{N}_0$ przyjmijmy stałą C_q jako największą spośród poniższych trzech liczb:

$$\sup\{|W_q(t)| \cdot \exp(-\frac{t}{2}) : t > 1\},$$
$$\sup\{|U_q(t)| \cdot \exp(-\frac{t}{2}) : t < -1\},$$
$$\exp(\frac{1}{2}) \cdot \sup\{|\varphi^{(q)}(t)| : -1 \le t \le 1\}.$$

Jeżeli $x > 1$, to

$$|\varphi^{(q)}(x)| = |x^{-q} \cdot W_q(x^{\frac{1}{\alpha}})| \cdot \exp(-x^{\frac{1}{\alpha}}) \le$$

$$\le |W_q(x^{\frac{1}{\alpha}})| \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{\alpha}}) \le$$

$$\le C_q \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Jeżeli $x < -1$, to

$$|\varphi^{(q)}(x)| = |(-x)^{-q} \cdot U_q((-x)^{\frac{1}{\alpha}})| \cdot \exp(-(-x)^{\frac{1}{\alpha}}) \le$$

$$\le |U_q((-x)^{\frac{1}{\alpha}})| \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot (-x)^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot (-x)^{\frac{1}{\alpha}}) \le$$

$$\le C_q \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot (-x)^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Jeżeli natomiast $x \in [-1, 1]$, to

$$|\varphi^{(q)}(x)| \le \sup\{|\varphi^{(q)}(t)| : t \in [-1,1]\} \cdot \exp(\frac{1}{2} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot$$

$$\cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}}) \le C_q \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Zatem

$$\sup\{|\varphi^{(q)}(x)| \exp(\frac{1}{2}|x|^{\frac{1}{\alpha}}) : x \in \mathbb{R}\} < \infty$$

i z twierdzenia 1 wnioskujemy, że $\varphi \in S_\alpha$, co kończy dowód. ∎

Udowodnimy teraz zapowiadane twierdzenie odwrotne do twierdzenia 6.

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że $\alpha > 0$, $r \in [1,\infty)$ oraz $X, Y \subset \mathbb{R}$ są podzbiorami, takimi że dla dowolnych funkcji uogólnionych $f, g \in (S_\alpha)'$ o nośnikach* $\operatorname{supp} f \subset X$, $\operatorname{supp} g \subset Y$ *istnieje splot $f * g$ w $(S_{\alpha/r})'$. Wówczas zbiory X, Y są zgodne w potędze r.*

Dowód. W szczególności z założeń wynika, że dla dowolnych dystrybucji temperowanych f, g o nośnikach zawartych w X i Y istnieje splot $f * g$ w $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Zatem zbiory X, Y muszą być zgodne (zob. [5]).

Przypuśćmy, że zbiory X, Y nie są zgodne w potędze r.

Na mocy lematu 3, istnieją ciągi $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ liczb $x_i \in X$, $y_i \in Y$ spełniające nierówności (a), (b) (występujące w tym lemacie). Przyjmijmy $z_i := x_i + y_i$ oraz określmy dystrybucje

$$f := \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{i} \cdot |x_i|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cdot \delta_{x_i}, \quad g := \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{i} \cdot |y_i|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cdot \delta_{y_i}.$$

Niech $\varphi \in S_\alpha$. Wówczas istnieją $a > 0$, $C > 0$, takie że

$$|\varphi(x)| \leq C \cdot \exp\left(-a \cdot |x|^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Dobierzmy $i_0 \in \mathbb{N}$ tak, by $b := a - \frac{1}{i_0} > 0$. Ponieważ

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{i}\, |x_i|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cdot |< \delta_{x_i}, \varphi >| \leq C \cdot \sum_{i=i_0}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{i}\, |x_i|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cdot \exp\left(-a\, |x_i|^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$\leq C \cdot \sum_{i=i_0}^{\infty} \exp\left(-b \cdot |x_i|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leq C \cdot \sum_{i=i_0}^{\infty} \exp\left(-b \cdot i^{\frac{1}{\alpha}}\right) < \infty,$$

więc z lematu 4 wynika, że $f \in (S_\alpha)'$. Podobnie dowodzimy, że $g \in (S_\alpha)'$. Oczywiście $\operatorname{supp} f \subset X$, $\operatorname{supp} g \subset Y$, więc istnieje splot $f * g$ w $(S_{\alpha/r})'$.

Zgodnie z lematem 6 dobierzmy funkcję $\varphi \in S_{\alpha/r}$, taką że $\varphi \geq 0$ oraz $\varphi(x) = \exp\left(-|x|^{\frac{r}{\alpha}}\right)$ dla $|x| \geq 1$.

Niech $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ będzie funkcją, taką że

1° $\eta(x,y) \geq 0$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

2° $\eta(x,y) = 1$ dla $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

Wówczas ciąg $\{\eta_n\}$, taki że $\eta_n(x,y) := \eta(\frac{x}{n}, \frac{y}{n})$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ jest ciągiem jedynkowym w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, a więc istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} < f \otimes g\, ,\, \eta_n \varphi^{\Delta} > . \tag{17}$$

Wobec lematów 5 i 3 mamy:

$$< f \otimes g \, , \, \eta_n \varphi^{\Delta} > =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \exp\,(\frac{1}{i}\, |x_i|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{j}\, |y_j|^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot \eta\,(\frac{x_i}{n}\,,\,\frac{y_j}{n}) \cdot \varphi\,(x_i + y_j) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} \exp\,(\frac{1}{i}\,(|x_i|^{\frac{1}{\alpha}} + |y_i|^{\frac{1}{\alpha}})) \cdot \eta\,(\frac{x_i}{n}\,,\,\frac{y_i}{n}) \cdot \varphi(z_i) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} \exp\,(|z_i|^{\frac{r}{\alpha}}) \cdot \eta\,(\frac{x_i}{n}\,,\,\frac{y_i}{n}) \cdot \exp\,(-|z_i|^{\frac{r}{\alpha}}) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \eta\,(\frac{x_i}{n}\,,\,\frac{y_i}{n}).$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ przyjmijmy oznaczenie

$$K_n \;:=\; \{\, i \in \mathbb{N} \colon \, |x_i| \leq n\,,\, |y_i| \leq n \,\}.$$

Mamy

$$K_n \subset K_{n+1} \quad \text{dla } \; n \in \mathbb{N}\,; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \;=\; \mathbb{N}, \tag{18}$$

a zatem

$$< f \otimes g \, , \, \eta_n \, \varphi^{\Delta} > \;\geq\; \sum_{i \in K_n} \eta\,(\frac{x_i}{n}\,,\,\frac{y_i}{n}) \;=\; \sum_{i \in K_n} 1 \;=\; |K_n|$$

gdzie $|K_n|$ oznacza moc zbioru K_n.

Na podstawie (18) mamy $|K_n| \to \infty$, co przeczy istnieniu granicy (17), a więc przeczy również istnieniu splotu $f * g$ w przestrzeni $(S_{\alpha/r})'$.■

3. Iloczyn tensorowy

Iloczynem tensorowym funkcji $f_1 : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{C}, \ldots, f_k : \mathbb{R}^{d_k} \to \mathbb{C}$ nazywamy funkcję $f_1 \otimes \ldots \otimes f_k : \mathbb{R}^{d_1 + \ldots + d_k} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k)\,(x_1, \ldots, x_k) \;:=\; f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_k(x_k)$$

dla $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^{d_k}$.

Załóżmy, że $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, \ldots, \Omega_k \subset \mathbb{R}^{d_k}$ są podzbiorami otwartymi. Symbolem $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}(\Omega_k)$ oznaczamy przestrzeń funkcji $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k)$, dla których istnieje $n \in \mathbb{N}$ oraz funkcje $\varphi_{i,j} \in \mathcal{D}(\Omega_j)$, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, k$, takie że

$$\phi \;=\; \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i,k}.$$

Lemat 7. *Przestrzeń $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}(\Omega_k)$ jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k)$.*

Jeżeli $f_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{d_1})$, $f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{d_2})$ oraz $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$, to na podstawie twierdzenia Fubiniego $f_1 \otimes f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ oraz

$$< f_1 \otimes f_2 \ , \ \phi > = \int_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}} f_1(x_1)\ f_2(x_2)\ \phi\ (x_1, x_2)\ dx_2\ dx_1\ =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_1(x_1)(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_2(x_2)\phi(x_1,x_2)dx_2)dx_1\ = < f_1(x_1), < f_2(x_2), \phi(x_1,x_2) >> .$$

Powyższy wzór stanowi podstawę do uogólnienia pojęcia iloczynu tensorowego na przypadek dystrybucji.

Twierdzenie 8. (zob. [2]). *Jeżeli $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ są podzbiorami otwartymi oraz $f_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ i $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, to funkcja $\varphi : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{C}$ określona wzorem $\varphi(x_1) := < f_2(x_2), \phi\ (x_1, x_2) >$ należy do klasy $\mathcal{D}(\Omega_1)$, a wzór*

$$< f_1 \otimes f_2, \phi > := < f_1(x_1), < f_2(x_2), \phi(x_1, x_2) > >$$

definiuje dystrybucję $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, którą nazywamy iloczynem tensorowym dystrybucji f_1 i f_2.

J. Uryga przeniósł powyższe twierdzenie na przestrzenie Gelfanda-Szyłowa typu $K\{M_p\}'$.

Do końca tej części będziemy zakładali, że $\{M_p^1\}$, $\{M_p^2\}, \ldots, \{M_p^k\}$ są ciągami bazowymi (zob. [7], definicja 1) funkcji $M_p^j : \mathbb{R}^{d_j} \longrightarrow [1, \infty)$ dla $j = 1, \ldots, k$, spełniającymi warunek (P). Wówczas ciąg $\{M_p^1 \otimes \ldots \otimes M_p^k\}_{p=1}^{\infty}$ również jest ciągiem bazowym oraz spełnia warunek (P).

Twierdzenie 9. (zob. [12]). *Jeżeli $f_1 \in K\{M_p^1\}'$, $f_2 \in K\{M_p^2\}'$ oraz $\phi \in K\{M_p^1 \otimes M_p^2\}$, to funkcja $\varphi : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{C}$ dana wzorem*

$$\varphi(x_1) := < f_2(x_2) \ , \ \phi(x_1, x_2) >$$

należy do klasy $K\{M_p^1\}$, a wzór

$$< f_1 \otimes f_2 \ , \ \phi > := < f_1(x_1) \ , \ < f_2(x_2), \phi(x_1, x_2) > >$$

określa funkcję uogólnioną $f_1 \otimes f_2 \in K\{M_p^1 \otimes M_p^2\}'$.

Twierdzenie 10. (zob. [12]). *Niech $f_i \in K\{M_p^i\}$, $p_i \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych $q_i \in \mathbb{N}_0^{d_i}$, $|q_i| \leq p_i$ dane są zespolone miary borelowskie $\mu_{q_i}^i$ skupione na zbiorach* supp f_i, *takie że zachodzi równość*

$$< f_i, \varphi > = \sum_{|q_i| \leq p_i} \int_{\mathbb{R}^{d_i}} M_{p_i}^i(x_i) \cdot \varphi^{(q_i)}(x_i)\, d\mu_{q_i}^i(x_i)$$

dla wszystkich $\varphi \in K\{M_p^i\}$, gdzie $i = 1, 2$. Wówczas iloczyn tensorowy $f_1 \otimes f_2$ wyraża się wzorem:

$$< f_1 \otimes f_2 \; , \; \phi > =$$

$$= \sum_{|q_1| \leq p_1} \sum_{|q_2| \leq p_2} \int_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}} M_{p_1}^1(x_1) M_{p_2}^2(x_2) \phi^{(q_1,q_2)}(x_1, x_2)\; d(\mu_{q_1}^1 \times \mu_{q_2}^1)(x_1, x_2)$$

dla $\phi \in K\{M_p^1 \otimes M_p^2\}$.

Jeżeli $f_j \in K\{M_p^j\}'$ dla wszystkich $j = 1, 2, 3$, to $f_1 \otimes f_2 \in K\{M_p^1 \otimes M_p^2\}'$ oraz $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 \in K\{M_p^1 \otimes M_p^2 \otimes M_p^3\}'$ na mocy twierdzenia 9. Podobnie przekonujemy się, że $f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3) \in K\{M_p^1 \otimes M_p^2 \otimes M_p^3\}'$.

Ponadto dla $\phi \in K\{M_p^1 \otimes M_p^2 \otimes M_p^3\}$ zachodzi równość:

$$< (f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 \; , \; \phi > = < (f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) \; , < f_3(x_3), \phi(x_1, x_2, x_3) > > =$$

$$= < f_1(x_1) \; , < f_2(x_2), < f_3(x_3), \phi(x_1, x_2, x_3) >> > =$$

$$< f_1(x_1) \; , < (f_2 \otimes f_3)(x_2, x_3), \phi(x_1, x_2, x_3) > > = < f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3) \; , \; \phi >,$$

a więc iloczyn tensorowy funkcji uogólnionych typu $K\{M_p\}'$ jest działaniem łącznym.

Korzystając z zasady indukcji matematycznej można udowodnić następujące

Twierdzenie 11. *Jeżeli założenia twierdzenia* 10 *są spełnione dla $i = 1, \ldots, k$, to iloczyn tensorowy $f_1 \otimes \ldots \otimes f_k$ wyraża się wzorem:*

$$< f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \; , \; \phi > = \sum_{|q_1| \leq p_1} \cdots \sum_{|q_k| \leq p_k} \int_{\mathbb{R}^{d_1+\ldots+d_k}} M_{p_1}^1(x_1) \cdot \ldots \cdot M_{p_k}^k(x_k) \cdot$$

$$\cdot \phi^{(q_1,\ldots,q_k)}(x_1, \ldots, x_k)\; d(\mu_{q_1}^1 \times \ldots \times \mu_{q_k}^k)(x_1, \ldots, x_k)$$

dla $\phi \in K\{M_p^1 \otimes \ldots \otimes M_p^k\}$.

4. Splot wielu dystrybucji typu S

Podobnie do splotu dwóch dystrybucji można rozważać sploty wielu funkcji uogólnionych.

W tej części α będzie oznaczać liczbę dodatnią, k pewną liczbę naturalną ($k \geq 2$), a r liczbę z przedziału $[1, \infty)$.

Definicja 6. *Niech $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Mówimy, że splot $f_1 * \ldots * f_k$ istnieje w $(S_\alpha)'$, jeżeli dla dowolnego ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$ w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ oraz dowolnej funkcji $\varphi \in S_\alpha$ istnieje granica po prawej stronie równości*

$$< f_1 * \ldots * f_k \ , \ \varphi > := \lim_{n \to \infty} < f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \ , \ \eta_n \cdot \varphi^{\Delta_k} >, \tag{19}$$

gdzie $\varphi^{\Delta_k} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi^{\Delta_k}(x_1, \ldots, x_k) := \varphi(x_1 + \ldots + x_k)$.

Uwaga 2. *Wartość granicy występującej po prawej stronie wzoru* (19) *nie zależy od wyboru ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$. Jeżeli warunek podany w powyższym twierdzeniu jest spełniony, to $f_1 * \ldots * f_k$ jest funkcją uogólnioną klasy $(S_\alpha)'$.*

Definicja 7. *Niech $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że zbiory $X_1, \ldots, X_k$ są zgodne w potędze r, jeżeli istnieje stała $C > 0$, taka że*

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j| \leq C \cdot (1 + |\sum_{j=1}^{k} x_j|)^r \tag{20}$$

dla wszystkich $x_1 \in X_1, \ldots, x_k \in X_k$.

Twierdzenie 12. *Jeżeli $f_1, \ldots, f_k$ są funkcjami uogólnionymi z przestrzeni $(S_\alpha)'$, których nośniki $X_1 := \operatorname{supp} f_1, \ldots, X_k := \operatorname{supp} f_k$ są zbiorami zgodnymi w potędze r, to istnieje splot $f_1 * \ldots * f_k$ w $(S_{\alpha/r})'$ oraz*

$$\operatorname{supp} (f_1 * \ldots * f_k) \subset X_1 + \ldots + X_k.$$

Dowód. Niech $\{\eta_n\}$ będzie ustalonym ciągiem jedynkowym w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ oraz $\varphi \in S_{\alpha/r}$. Niech C będzie stałą dobraną do zbiorów $X_1, \ldots, X_k$ zgodnie z definicją 7 i dla której zachodzi nierówność (20). Niech $A > 0$ będzie stałą, dla której $\varphi \in S_{\alpha/r, A}$ (zob. uwaga 1 na str. 106), z kolei niech

$$a := \frac{\alpha/r}{e \cdot A^{\frac{r}{\alpha}}}, \quad b := \frac{a}{k \cdot C^{\frac{1}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{r}{\alpha}}}$$

i wreszcie $B > 0$, takie że $b = \alpha/(e \cdot B^{\frac{1}{\alpha}})$. Następnie (na mocy wniosku 1 ze str. 107 i definicji przestrzeni $K\{M_p\}$, zob. [1]) dla $p \in \mathbb{N}$ oraz $q \in \mathbb{N}_0$ dobierzmy stałą $D_{p,q} > 0$, dla której zachodzi nierówność

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq D_{p,q} \cdot \exp\left(-\frac{ap}{p+1} \cdot |x|^{\frac{r}{\alpha}} \right) \tag{21}$$

dla $x \in \mathbb{R}$, która jest odpowiednikiem nierówności (1) ze str. 106.

Na podstawie twierdzenia 4 (str. 110) możemy dobrać liczbę $p \in \mathbb{N}$ oraz zespolone miary borelowskie $\mu^1_{q_1}, \ldots, \mu^k_{q_k}$ dla $q_j \in \{0, 1, \ldots, p\}$ $(j = 1, \ldots, k)$ skupione odpowiednio na $X_1, \ldots, X_k$, takie że

$$< f_j, \psi > = \sum_{q_j=0}^{p} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{bp}{p+1}\, |x_j|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cdot \psi^{(q_j)}(x_j)\, d\mu^j_{q_j}(x_j)$$

dla $\psi \in S_{\alpha,B}$ oraz $j = 1, \ldots, k$.

Wobec tego z twierdzenia 11 (str. 120) wynika w szczególności, że

$$< f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \,,\, \phi > = \sum_{q_1=0}^{p} \cdots \sum_{q_k=0}^{p} \int_{\mathbb{R}^k} \exp\left(\frac{bp}{p+1}(|x_1|^{\frac{1}{\alpha}} + \ldots + |x_k|^{\frac{1}{\alpha}})\right) \cdot$$

$$\cdot \phi^{(q_1,\ldots,q_k)}(x_1, \ldots, x_k)\, d(\mu^1_{q_1} \times \ldots \times \mu^k_{q_k})(x_1, \ldots, x_k)$$

dla $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ i stąd na mocy wzoru Leibniza otrzymujemy

$$< f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \,,\, \eta_n \cdot \varphi^{\Delta_k} > = \sum_{q_1=0}^{p} \cdots \sum_{q_k=0}^{p} \sum_{r_1=0}^{q_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{q_k} \binom{q_1}{r_1} \cdot \ldots \cdot \binom{q_k}{r_k} \cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} \exp\left(\frac{bp}{p+1}(|x_1|^{\frac{1}{\alpha}} + \ldots + |x_k|^{\frac{1}{\alpha}})\right) \cdot \eta_n^{(q_1-r_1,\ldots,q_k-r_k)}(x_1, \ldots, x_k) \cdot$$

$$\cdot \varphi^{(r_1+\ldots+r_k)}(x_1 + \ldots + x_k)\, d(\mu^1_{q_1} \times \ldots \times \mu^k_{q_k})(x_1, \ldots, x_k).$$

Ustalmy wskaźniki $q_1, \ldots, q_k, r_1, \ldots, r_k$, $(r_1 \leq q_1 \leq p, \ldots, r_k \leq q_k \leq p)$ i oznaczmy $q := (q_1, \ldots, q_k)$, $r := (r_1, \ldots, r_k)$, $r_0 := r_1 + \ldots + r_k$ oraz $\mu_q := \mu^1_{q_1} \times \ldots \times \mu^k_{q_k}$.

Niech $E > 0$ będzie stałą, taką że

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^k} |\eta_n^{(q-r)}(x)| \leq E$$

i niech $g_n(x) = g_n(x_1, \ldots, x_k)$ oznacza funkcję podcałkową po prawej stronie ostatniej równości. Wtedy na mocy nierówności (7), (20) i (21) dla wszystkich $x \in X_1 \times \ldots \times X_k$ zachodzi

$$|g_n(x)| \leq E \cdot \exp\left(b\, \frac{p}{p+1}\, k\, (|x_1| + \ldots + |x_k|)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cdot |\varphi^{(r_0)}(x^{\Delta})| \leq$$

$$\leq \; E \cdot D_{p,r_0} \cdot g(x),$$

gdzie

$$g(x) := \exp\left(\frac{bp}{p+1}\, k\, C^{\frac{1}{\alpha}}\, (1 + |x_1 + \ldots + x_k|)^{\frac{r}{\alpha}} - \frac{ap}{p+1}\, |x_1 + \ldots + x_k|^{\frac{r}{\alpha}}\right)$$

dla $x \in \mathbb{R}^k$.

Ponieważ $g_n(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^k \setminus X_1 \times \ldots \times X_k$, więc

$$|g_n(x)| \; \leq \; E \cdot D_{p,r_0} \cdot g(x)$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^k$.

Na mocy nierówności (7) ze str. 110 mamy

$$g(x) \; \leq \; \exp\left(b\, \frac{p}{p+1}\, k\, C^{\frac{1}{\alpha}}\, 2^{\frac{r}{\alpha}}\, (1 + |x_1 + \ldots + x_k|^{\frac{r}{\alpha}}) - \right.$$

$$\left. -a\, \frac{p}{p+1}\, |x_1 + \ldots + x_k|^{\frac{r}{\alpha}}\right),$$

a więc z równości $a = b\, k\, C^{\frac{1}{\alpha}}\, 2^{\frac{r}{\alpha}}$ otrzymujemy oszacowanie

$$g(x) \; \leq \; \exp\left(a\, \frac{p}{p+1} \right).$$

Wobec tego $E \cdot D_{p,r_0} \cdot g$ jest całkowalną majorantą ciągu funkcji g_n.

Z powyższego oszacowania i twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności (zob. [9]) wynika, że istnieje granica

$$\lim_{n \to \infty} < f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \;,\; \eta_n \cdot \varphi^{\Delta_k} >$$

oraz

$$< f_1 * \ldots * f_k, \varphi > = \sum_{q_1=0}^{p} \cdots \sum_{q_k=0}^{p} \int_X \exp\left(b\, \frac{p}{p+1}\, (|x_1|^{\frac{1}{\alpha}} + \ldots + |x_k|^{\frac{1}{\alpha}})\right) \cdot$$

$$\cdot \varphi^{(q_1+\ldots+q_k)}(x_1 + \ldots + x_k)\; d(\mu^1_{q_1} \times \ldots \times \mu^k_{q_k})(x_1, \ldots, x_k),$$

gdzie $X := X_1 \times \ldots \times X_k$, a więc istnieje splot $f_1 * \ldots * f_k$ w $(S_{\alpha/r})'$.

Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus (X_1 + \ldots + X_k))$, to $\varphi^{(q_1+\ldots+q_k)}(x_1 + \ldots + x_k) \; = \; 0$ dla $(x_1, \ldots, x_k) \in X$. Wobec tego

$$< f_1 * \ldots * f_k \;,\; \varphi > = \; 0$$

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus X_1 + \ldots + X_k))$ i stąd

$$\operatorname{supp}\, (f_1 * \ldots * f_k) \subset X_1 + \ldots + X_k. \blacksquare$$

Powyższy dowód jest wzorowany na dowodach analogicznych twierdzeń, podanych przez A. Kamińskiego w pracach [3] i [5] o splocie dystrybucji temperowanych oraz twierdzenia J. Urygi (zob. [12], [11]), dotyczącego splotu funkcji uogólnionych Gelfanda-Szyłowa typu $K\{M_p\}'$. Jednak powyższe twierdzenie nie jest bezpośrednim wnioskiem z rozważanych wcześniej twierdzeń.

Warto wspomnieć, że podobnie jak w przypadku $k = 2$ można udowodnić następujące twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 13. *Jeżeli $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{R}$ są podzbiorami, takimi że dla dowolnych funkcji uogólnionych $f_1, \ldots, f_k \in (S_\alpha)'$ o nośnikach zawartych odpowiednio w $X_1, \ldots, X_k$ istnieje splot $f_1 * \ldots * f_k$ w $(S_{\alpha/r})'$, to zbiory $X_1, \ldots, X_k$ są zgodne w potędze r.*

Na zakończenie rozważymy problem łączności splotu funkcji uogólnionych klasy $(S_\alpha)'$. Będziemy zakładali, że $l \in \mathbb{N}$, $l \leq k$ oraz $\{Z_j\}_{j=1}^{l}$ jest partycją zbioru $Z := \{1, \ldots, k\}$.

Twierdzenie 14. *Jeżeli zbiory $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{R}$ są zgodne w potędze r, to*

(*a*) *dla dowolnie ustalonego $j \in \{1, \ldots, l\}$ zbiory X_i $(i \in Z_j)$ są zgodne w potędze r;*

(*b*) *zbiory*

$$Y_j := \sum_{i \in Z_j} X_i = \{\sum_{i \in Z_j} x_i : x_i \in X_i \quad \text{dla } i \in Z_j\}$$

są zgodne w potędze r $(j = 1, \ldots, l)$.

Dowód. (*a*) Załóżmy, że zbiory $X_1, \ldots, X_k$ są zgodne w potędze r i niech $C > 0$ będzie stałą, taką że

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| \leq C \cdot (1 + |\sum_{i=1}^{k} x_i|)^r$$

dla $x_1 \in X_1, \ldots, x_k \in X_k$.

Niech $x_i^0 \in X_i$ dla $i \in Z \setminus Z_j$ będą ustalonymi elementami i przyjmijmy

$$C_0 := |\sum_{i \in Z \setminus Z_j} x_i^0|.$$

Wówczas dla $x_i \in X_i$ $(i \in Z_j)$ mamy

$$\sum_{i \in Z_j} |x_i| \leq \sum_{i \in Z_j} |x_i| + \sum_{i \in Z \setminus Z_j} |x_i^0| \leq C \cdot (1 + |\sum_{i \in Z_j} x_i + \sum_{i \in Z \setminus Z_j} x_i^0|)^r \leq$$

$$\leq C \cdot (1 + C_0 + |\sum_{i \in Z_j} x_i|)^r \leq C \cdot (1 + C_0)^r \cdot (1 + |\sum_{i \in Z_j} x_i|)^r.$$

(b) Dla $y_1 \in Y_1, \ldots, y_l \in Y_l$ istnieją $x_1 \in X_1, \ldots, x_k \in X_k$, takie że $y_j = \sum_{i \in Z_j} x_i$ dla $j = 1, \ldots, l$ i stąd

$$\sum_{j=1}^{l} |y_j| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i| \leq C \cdot (1 + |\sum_{i=1}^{k} x_i|)^r = C \cdot (1 + |\sum_{j=1}^{l} y_j|)^r . \blacksquare$$

Twierdzenie 15. *Jeżeli dla zbiorów $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{R}$ są spełnione warunki (a), (b) twierdzenia 14, to zbiory te są zgodne w potędze r^2.*

Dowód. Niech $C_j > 0$ będzie stałą, taką że

$$\sum_{i \in Z_j} |x_i| \leq C_j \cdot (1 + |\sum_{i \in Z_j} x_i|)^r \tag{22}$$

dla $x_i \in X_i$, $j = 1, \ldots, l$. Przyjmijmy $C := \max \{C_1, \ldots, C_l\}$.

Niech $D > 0$ będzie stałą, taką że

$$\sum_{j=1}^{l} |y_j| \leq D \cdot (1 + |\sum_{j=1}^{l} y_j|)^r \tag{23}$$

dla $y_1 \in Y_1, \ldots, y_l \in Y_l$.

Dla $x_1 \in X_1, \ldots, x_k \in X_k$ oraz $j \in \{1, \ldots, l\}$ przyjmijmy $y_j := \sum_{i \in Z_j} x_i$. Wówczas na mocy (22) i (23) mamy

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i \in Z_j} |x_i| \leq C \cdot \sum_{j=1}^{l} (1 + |y_j|)^r \leq C \cdot 2^r \cdot \sum_{j=1}^{l} (1 + |y_j|^r) \leq$$

$$\leq l\, C\, 2^r \cdot (1 + \sum_{j=1}^{l} |y_j|)^r \leq l\, C\, 2^r \cdot (1 + D \cdot (1 + |\sum_{j=1}^{l} y_j|)^r)^r \leq$$

$$\leq l\, C\, 2^r\, (D+1)^r \cdot (1 + |\sum_{i=1}^{k} x_i|)^{r^2} . \blacksquare$$

Definicja 8. *Niech $f_1, \ldots, f_k$ będą dystrybucjami na $\mathbb{R}$. Mówimy, że istnieje splot $f_1 * \ldots * f_k$ w $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, jeżeli dla dowolnego ciągu jedynkowego $\{\eta_n\}$ funkcji $\eta_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ oraz dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ istnieje granica*

$$< f_1 * \ldots * f_k \,,\, \varphi > := \lim_{n \to \infty} < f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \,,\, \eta_n \cdot \varphi^{\Delta_k} > .$$

Definicja 9. *Mówimy, że zbiory $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{R}$ są zgodne, jeżeli dla dowolnych ciągów $\{x_n^1\}, \ldots, \{x_n^k\}$, takich że $x_n^1 \in X_1, \ldots, x_n^k \in X_k$ dla $n \in \mathbb{N}$, zachodzi implikacja*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k} |x_n^i| = \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} |\sum_{i=1}^{k} x_n^i| = \infty .$$

Oczywiście warunek zgodności w potędze r jest mocniejszy od warunku zgodności.

Jeżeli $Z_0 = \{i_1, \ldots, i_m\}$ jest podzbiorem zbioru $Z = \{1, \ldots, k\}$, przy czym $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, to splot $f_{i_1} * \ldots * f_{i_m}$ będziemy oznaczać symbolami: $*_{i \in Z_0} f_i$ oraz $*_{j=1}^{m} f_{i_j}$.

Twierdzenie 16. (zob. [6]). *Jeżeli* $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *przy czym nośniki* supp f_1 , ... , supp f_k *są zbiorami zgodnymi, to istnieją sploty:*

(a) $f_1 * \ldots * f_k$;

(b) $*_{i \in Z_j} f_i$ *dla* $j = 1, \ldots, l$;

(c) $*_{j=1}^{l} (*_{i \in Z_j} f_i)$

w $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *oraz*

$$f_1 * \ldots * f_k = *_{j=1}^{l} (*_{i \in Z_j} f_i).$$

Twierdzenie 17. *Jeżeli* $f_1, \ldots, f_k$ *są funkcjami uogólnionymi klasy* $(S_\alpha)'$, *których nośniki* supp $f_1, \ldots,$ supp f_k *są zbiorami zgodnymi w potędze* r, *to istnieją sploty:*

(a) $f_1 * \ldots * f_k$ *w* $(S_{\alpha/r})'$;

(b) $*_{i \in Z_j} f_i$ *w* $(S_{\alpha/r})'$ *dla* $j = 1, \ldots, l$;

(c) $*_{j=1}^{l} (*_{i \in Z_j} f_i)$ *w* $(S_{\alpha/r^2})'$

oraz

$$f_1 * \ldots * f_k = *_{j=1}^{l} (*_{i \in Z_j} f_i).$$

Dowód. Istnienie splotów występujących w punktach (a) i (b) wynika z twierdzeń 12 oraz 14. Ponieważ $*_{i \in Z_j} f_i \in (S_{\alpha/r})'$ i jednocześnie

$$\operatorname{supp} (*_{i \in Z_j} f_i) \subset \sum_{i \in Z_j} X_i = Y_j$$

dla wszystkich $j \in \{1, \ldots, l\}$ oraz zbiory Y_j są zgodne w potędze r, więc istnieje splot $*_{j=1}^{l} (*_{i \in Z_j} f_i)$ w $(S_{\alpha/r^2})'$.

Ze zgodności zbiorów $X_1, \ldots, X_k$ w potędze r wynika zgodność tych zbiorów, więc na podstawie twierdzenia 16 mamy

$$< f_1 * \ldots * f_k \, , \, \varphi > = < *_{j=1}^{l} (*_{i \in Z_j} f_i) \, , \, \varphi > \tag{24}$$

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ponieważ przestrzeń $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ jest gęsta w S_{α/r^2}, więc równość (24) zachodzi dla wszystkich $\varphi \in S_{\alpha/r^2}$.■

Wniosek 4. *Jeżeli* $f_1, f_2, f_3 \in (S_\alpha)'$ *oraz nośniki* $\operatorname{supp} f_1$, $\operatorname{supp} f_2$ *i* $\operatorname{supp} f_3$ *są zgodne w potędze* r, *to istnieją sploty:*

(a) $f_1 * f_2 * f_3$ *w* $(S_{\alpha/r})'$;

(b) $f_1 * f_2$ *w* $(S_{\alpha/r})'$;

(c) $f_2 * f_3$ *w* $(S_{\alpha/r})'$;

(d) $(f_1 * f_2) * f_3$ *w* $(S_{\alpha/r^2})'$;

(e) $f_1 * (f_2 * f_3)$ *w* $(S_{\alpha/r^2})'$

oraz

$$f_1 * f_2 * f_3 = (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3).$$

Literatura

[1] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions*, vol. 2, Academic Press, New York, 1968.

[2] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer, Berlin, 1983.

[3] A. Kamiński, *Całkowanie i operacje nieregularne*, rozprawa doktorska, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1975.

[4] A. Kamiński, *Remarks on $K\{M_p\}'$-spaces*, Studia Math. **77** (1984), 499-508.

[5] A. Kamiński, *On the Rényi theory of conditional probabilities*, Studia Math. **79** (1984), 151-191.

[6] A. Kamiński and J. Uryga, *Convolution in $K\{M_p\}'$ - spaces*, w tomie: *Generalized Functions, Convergence Structures and Their Applications*, Proc. of the Conf., Dubrovnik 1987, Plenum Press, New York - London, 1988, 187-196.

[7] W. Kaszowski, *Splot dystrybucji w przestrzeniach typu* $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$, (w niniejszym Zeszycie).

[8] K. Maurin, *Analiza*, część 3, *Analiza zespolona, dystrybucje, analiza harmoniczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.

[9] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986.

[10] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[11] J. Uryga, *O pewnym kryterium istnienia splotu funkcji uogólnionych w przestrzeniach typu $K\{M_p\}'$*, Instytut Matematyczny PAN, Preprint 15, Ser. B, Warszawa 1986, 41 stron.

[12] J. Uryga, *Operacje w przestrzeniach funkcji uogólnionych typu $K\{M_p\}'$*, rozprawa doktorska, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1989.

[13] J. Uryga, *On compatibility of supports of generalized functions of Gel'fand-Shilov type*, Bull. Pol. Ac.: Math. **36** (1988), 45-52.

Recenzent: Ryszard Rudnicki

Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

In [7], results concerning the existence of the convolution in spaces of type $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ are obtained.

In this paper a particular case of spaces of type $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ is studied, namely the Shilov spaces of type S.

We prove that the family $\mathcal{M} = \{M_{p,n}\}$ of functions which is basic for the space S_α, i. e. $\mathcal{K}^{\mathcal{M}} = S_\alpha$, fulfills the conditions $(\mathrm{P}), (\mathrm{M}), (\mathrm{N}), (\mathrm{N}'), (\mathrm{T}), (\mathrm{R})$. Therefore all the results concerning the convolution in the spaces $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}})'$ remain true for the space $(S_\alpha)'$.

It is proved that the condition of compatibility of sets in the case of spaces of type S can be equivalently replaced by compatibility in power. As a consequence, we show that the condition of compatibility in the power r, where $r \in [1, \infty)$, of the supports of the distributions $f, g \in (S_\alpha)'$ implies the existence of the convolution in the space $(S_{\alpha/r})'$.

We also prove the converse: if for any pair of distributions of type $(S_\alpha)'$ with supports contained in a two given sets their convolution exists in $(S_{\alpha/r})'$, then the sets are compatible in the power r.

Moreover, we present generalizations of the above results for the convolution of several distributions of type $(S_\alpha)'$ and discuss the problem of the associativity of the convolution in case all the supports are compatible in power.