

Damian SŁOTA

WYKORZYSTANIE ODWZOROWAŃ KONFOREMNYCH W QUASI-STACJONARNYM ZADANIU STEFANA

Streszczenie. W pracy, wykorzystując metodę opartą na odwzorowaniach konforemnych, rozwiązano dwuwymiarowe quasi-stacjonarne zadanie Stefana. Zadanie rozwiązano w sformułowaniu dla dwóch obszarów: nieograniczonego wnętrza kąta rozwartego oraz wnętrza walca eliptycznego.

USING CONFORMAL MAPPINGS IN QUASISTATIONARY STEFAN PROBLEM

Summary. In the paper the two-dimensional quasistationary Stefan problem is solved by using conformal mapping method. It is formulated for two areas: unbounded interior of obtuse angle and interior of cylindroid.

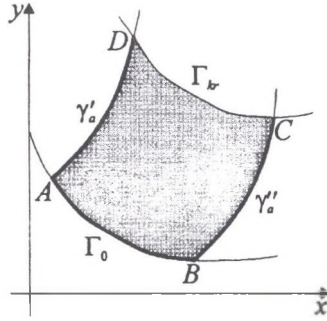
1. Zadanie quasi-stacjonarne

W pracy zajmiemy się rozwiązaniem zadania Stefana w czworokątach krzywoliniowych położonych na płaszczyźnie Oxy (rys. 1). Będziemy zakładać, że w czworokątach tych jeden bok jest izotermą (CD), przeciwległy do niego odcinkiem chłodzenia (AB), natomiast dwa pozostałe to adiabaty.

Zadanie będziemy rozpatrywać w przybliżeniu quasi-stacjonarnym, czyli przy założeniu, że rozkład temperatury w warstwie stałej różni się nieznacznie od stacjonarnego i może być w przybliżeniu znaleziony z równania Laplace'a:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0$$

gdzie λ [$W/(m \cdot K)$] oznacza współczynnik przewodzenia ciepła, a T [K] temperaturę.



Rys. 1. Obszar krzepnięcia
Fig. 1. Solidification area

Przyjmujemy, że na granicy krystalizacji (Γ_{kr}) jest utrzymywana stała temperatura T_{kr} :

$$T|_{\Gamma_{kr}} = T_{kr}.$$

Na granicach γ'_a i γ''_a , jako adiabatach, mamy:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\gamma'_a} = 0 \quad \text{i} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\gamma''_a} = 0.$$

Będziemy rozważali dwa przypadki. W pierwszym przypadku wymianę ciepła z otoczeniem determinuje warunek pierwszego rodzaju:

$$T|_{\Gamma_0} = T_n,$$

gdzie T_n oznacza stałą temperaturę powierzchni. W drugim natomiast proces oddawania ciepła określa warunek trzeciego rodzaju:

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma_0} = \alpha (T|_{\Gamma_0} - T_o),$$

gdzie T_o oznacza temperaturę otoczenia, a $\alpha [W/(m^2 \cdot K)]$ współczynnik przejmowania ciepła.

Kolejnym istotnym założeniem, z którego będziemy korzystali w pracy, jest podobieństwo izoterm frontu krzepnięcia roztopionego metalu. Z założenia tego otrzymujemy, że ortogonalna siatka izoterm i linii przepływu (krzywe, do których styczne w dowolnym punkcie mają kierunek pokrywający się z kierunkiem wektora gęstości strumienia ciepła (\vec{q}) w tym punkcie) nie ulega deformacji (zmianie kształtu) w czasie, następując jedynie rozbudowa o nowe izotermy i przedłużenie linii przepływu. Ujawnia się tu istota założenia o podobieństwie izoterm. Metoda będzie wykorzystywała odwzorowania konformalne w celu przekształcenia zadanego obszaru obliczeń na pewien prostszy w obliczeniach

obszar. Z definicji odwzorowania konforemnego wynika, że siatka ortogonalna izoterm i linii przepływu przejdzie po tym przekształceniu także na siatkę ortogonalną. Natomiast gdyby wyjściowa siatka ulegała deformacji, to nie potrafilibyśmy dobrać odwzorowania konforemnego, ponieważ po każdej zmianie należałoby dobierać nowe odwzorowanie, co jest praktycznie niemożliwe.

Ostatnią cechą prezentowanej metody jest wykorzystanie do obliczeń równania bilansu ciepła w warstwie stałej, obliczanego jako suma ciepła zmiany entalpii warstwy stałej i ciepła wydzielanego przy przejściu fazowym, czyli równania postaci:

$$Q_o = Q_{kr} + Q_e,$$

gdzie $Q_{kr} = \rho L b \frac{dS}{dt}$ – ciepło krystalizacji (S – pole powierzchni przekroju (czworokąta $ABCD$) [m^2], b – grubość warstwy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny Oxy [m], L – ciepło krzepnięcia [J/kg], ρ – gęstość krzepnącego metalu [kg/m^3]); $Q_e = \frac{d}{dt} (b \iint \rho c (T_{kr} - T(x, y)) dx dy)$ – ciepło zmian entalpii warstwy stałej w chwili t (c – ciepło właściwe [$J/(kg \cdot K)$]); $Q_o = b \int_0^l \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma_0} dl$ – ciepło odprowadzone przez powierzchnię Γ_0 (l – charakterystyczny wymiar liniowy, długość krzywej Γ_0).

Po uwzględnieniu powyższych zależności równanie bilansu ciepła przyjmie postać:

$$\int_0^l \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma_0} dl = \rho \left[L + c (T_{kr} - \bar{T}) \right] \frac{dS}{dt}, \quad (1)$$

gdzie \bar{T} jest średnią temperaturą w przekroju obliczoną ze wzoru:

$$\bar{T} = \frac{1}{S} \iint_{ABCD} T(x, y) dx dy.$$

Otrzymane równanie posłuży nam do znalezienia zależności położenia frontu krystalizacji od czasu.

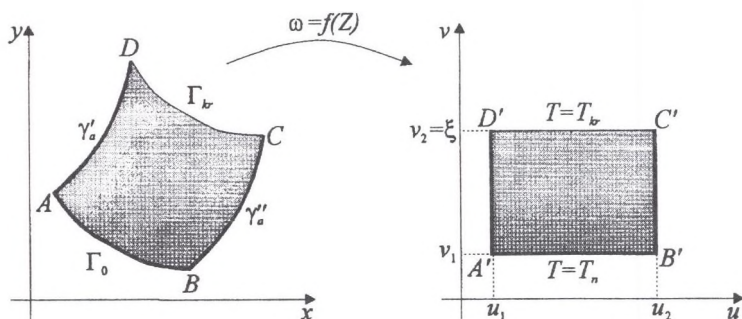
2. Rozwiązanie ogólne

Niech funkcja analityczna:

$$\omega = u + iv = f(Z) \quad (2)$$

gdzie $Z = X + iY$, odwzorowuje konforemnie rozpatrywany obszar na drugi obszar (rys. 2), dla którego znamy rozwiązanie interesującego nas zadania.

Rozpatrywany obszar $ABCD$ zostaje przekształcony na prostokąt $A'B'C'D'$. Granice $A'D'$ i $B'C'$ przekształconego obszaru są adiabatami, a pozostałe dwie ($A'B'$ i $C'D'$) są



Rys. 2. Przekształcenie obszaru krzepnięcia za pomocą odwzorowania konforemnego
Fig. 2. Transformation of solidification area using conformal mapping

izotermami (rysunek 2). Pole temperatury (stacjonarne) w tym obszarze jest jednowymiarowe (nie zależy od zmiennej u) i liniowe. Wynika to z założonego podobieństwa kształtu izoterm i ich równoległości do osi Ou . Dlatego temperatura w obszarze $A'B'C'D'$ jest dana funkcją liniową:

$$T(v) = T_n + (T_{kr} - T_n) \frac{v - v_1}{v_2 - v_1}. \quad (3)$$

Pole rozpatrywanego obszaru $ABCD$ można wyrazić, we wszystkich trzech układach współrzędnych, za pomocą wzorów:

$$S = \iint_{ABCD} dx dy = l^2 \iint_{\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\widehat{D}} dX dY = l^2 \iint_{A'B'C'D'} D(u, v) du dv, \quad (4)$$

gdzie $X = \frac{x}{l}$, $Y = \frac{y}{l}$ i $u + iv = f(X + iY)$, a $D(u, v)$ jest jacobianem przekształcenia:

$$\begin{cases} X = X(u, v), \\ Y = Y(u, v), \end{cases} \quad (5)$$

danym wzorem:

$$D(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u}.$$

Istotą prezentowanej metody jest wykorzystanie równania bilansu ciepła w celu rozwiązania postawionego zadania. Równanie bilansu ciepła ma postać (1):

$$\int_0^l \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma_0} dl = \varrho [L + c(T_{kr} - \bar{T})] \frac{dS(t)}{dt}.$$

Przy zamianie zmiennych X, Y na u, v równanie to można zapisać w postaci (ponieważ przepływ ciepła nie ulega zmianie przy odwzorowaniu konforemnym [5]):

$$\int_{u_1}^{u_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{v=v_1} du = \rho [L + c(T_{kr} - \bar{T})] \frac{dS[\xi(t)]}{dt}, \quad (6)$$

gdzie $\xi(t) = v_2(t)$ położenie frontu krzepnięcia w chwili t . Uwzględniając wzór (4) mamy:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = l^2 \frac{d\xi}{dt} \int_{u_1}^{u_2} D(u, \xi) du,$$

bo

$$\frac{dS}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(l^2 \int_{v_1}^{\xi} \int_{u_1}^{u_2} D(u, v) du dv \right) = l^2 \int_{u_1}^{u_2} D(u, \xi) du.$$

Ponieważ $T(v)$ jest funkcją liniową (3), więc $\left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_{v=v_1}$ jest stałe. Dlatego możemy zapisać:

$$\lambda (u_2 - u_1) \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_{v=v_1} = \rho l^2 [L + c(T_{kr} - \bar{T})] \frac{d\xi}{dt} \int_{u_1}^{u_2} D(u, \xi) du. \quad (7)$$

Ze wzoru (3) mamy:

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{T_{kr} - T_n}{v_2 - v_1}, \quad \bar{T} = \frac{1}{2} (T_{kr} + T_n).$$

Możemy przyjąć, że $v_1 = 0$ i $u_1 = 0$ (bo można przesunąć układ współrzędnych o wektor $\vec{h} = [u_1, v_1]$). Wstawiając to do przekształconego równania bilansu ciepła otrzymamy kolejno:

$$\lambda u_2 \frac{T_{kr} - T_n}{\xi} = \rho l^2 \left[L + \frac{c}{2} (T_{kr} - T_n) \right] \frac{d\xi}{dt} \int_0^{u_2} D(u, \xi) du, \quad (8)$$

$$\frac{\lambda u_2}{\rho l^2} \frac{T_{kr} - T_n}{L \xi} = \left[1 + \frac{c}{2L} (T_{kr} - T_n) \right] \frac{d\xi}{dt} \int_0^{u_2} D(u, \xi) du,$$

$$\frac{\lambda}{\rho l^2} \frac{T_{kr} - T_n}{L} \frac{1}{1 + \frac{c}{2L} (T_{kr} - T_n)} dt = \xi d\xi \frac{1}{u_2} \int_0^{u_2} D(u, \xi) du. \quad (9)$$

Jeśli wprowadzimy zmienne bezwymiarowe:

$$\tau = \frac{\lambda t}{c \rho l^2}, \quad K = \frac{c(T_{kr} - T_o)}{L}, \quad \Theta_n = \frac{T_{kr} - T_n}{T_{kr} - T_o},$$

gdzie T_o oznacza temperaturę otoczenia, to poprzednie równanie możemy zapisać w postaci:

$$\frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} d\tau = \xi d\xi \int_0^1 D(u, \xi) du. \quad (10)$$

Całkując to równanie, pamiętając o warunku początkowym $\xi(0) = 0$, otrzymamy ogólną postać szukanej zależności położenia granicy rozdziału faz od czasu:

$$\int_0^\tau \frac{K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} d\tau = \int_0^\xi \xi d\xi \int_0^1 D(u, \xi) du, \quad (11)$$

gdzie po prawej stronie występuje całka iterowana, a w ogólnym przypadku temperatura Θ_n zależy od czasu (ze względu na T_n , warunek brzegowy pierwszego rodzaju). W przypadku gdy temperatura powierzchni odlewu jest stała, to powyższe równanie upraszcza się do postaci:

$$\frac{K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} \tau = \int_0^\xi \xi d\xi \int_0^1 D(u, \xi) du. \quad (12)$$

Zastanówmy się teraz, jaką postać przyjmie równanie (11), gdy na odcinku krzywoliniowym AB zadany jest warunek brzegowy trzeciego rodzaju:

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma_0} = \alpha \left(T|_{\Gamma_0} - T_o \right). \quad (13)$$

Temperaturę powierzchni odlewu możemy określić ze wzoru (3) przy $v_1 = 0$ i $v_2 = \xi$:

$$T(v) = T_n(t) + (T_{kr} - T_n(t)) \frac{v}{\xi}. \quad (14)$$

Warunek (13) na płaszczyźnie $\omega = u + iv$ przyjmie postać:

$$\frac{\lambda}{l} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_{v=0} = \alpha (T_n(t) - T_o). \quad (15)$$

Uwzględniając poprzednią zależność możemy znaleźć wzór określający temperaturę powierzchni odlewu:

$$\alpha (T_n(t) - T_o) = \frac{\lambda}{l} (T_{kr} - T_n(t)) \frac{1}{\xi},$$

$$T_n(t) \left(\alpha + \frac{\lambda}{l\xi} \right) = \frac{\lambda}{l\xi} T_{kr} + \alpha T_o,$$

$$T_n(t) = \frac{\left(\alpha + \frac{\lambda}{l\xi} \right) T_{kr} - \alpha T_o + \alpha T_o}{\alpha + \frac{\lambda}{l\xi}}$$

$$T_n(t) = T_{kr} - (T_{kr} - T_o) \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha l\xi}}.$$

Wykorzystując kryterium Biota $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$ możemy ostatecznie napisać:

$$T_n(t) = T_{kr} - (T_{kr} - T_o) \frac{1}{1 + \frac{1}{Bi\xi}}. \quad (16)$$

Ponieważ bezwymiarowa temperatura powierzchni odlewu jest dana wzorem:

$$\Theta_n = \frac{T_{kr} - T_n(t)}{T_{kr} - T_o},$$

to uwzględniając (16) dostajemy:

$$\Theta_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{Bi\xi}} = \frac{Bi\xi}{1 + Bi\xi}. \quad (17)$$

Wprowadzając otrzymane wyrażenie do równania bilansu ciepła (10) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{2KBi\xi}{2 + 2Bi\xi + KBi\xi} d\tau &= \xi d\xi \int_0^1 D(u, \xi) du, \\ \frac{2K}{2 + K} d\tau &= \frac{2 + (2 + K)Bi\xi}{(2 + K)Bi} d\xi \int_0^1 D(u, \xi) du, \\ \frac{2K}{2 + K} d\tau &= \left[\xi + \frac{2}{(2 + K)Bi} \right] d\xi \int_0^1 D(u, \xi) du. \end{aligned}$$

Całkując ostatnią równość otrzymujemy rozwiązanie ogólne naszego zadania przy warunku brzegowym trzeciego rodzaju:

$$\frac{2K}{2 + K} \cdot \tau = \int_0^\xi \left[\xi + \frac{2}{(2 + K)Bi} \right] d\xi \int_0^1 D(u, \xi) du. \quad (18)$$

3. Krzepnięcie w obszarze nieograniczonym

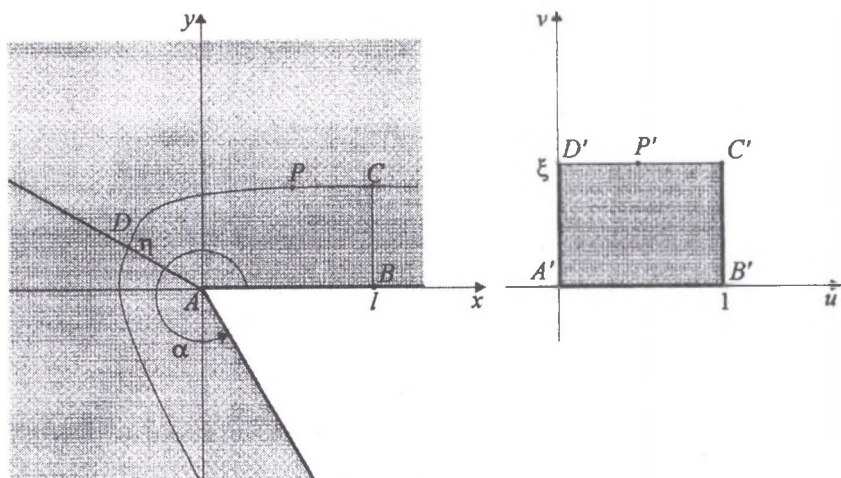
Jako przykład rozpatrzmy przypadek, gdy brzeg obszaru tworzy kąt α o mierze $\frac{5}{3}\pi$ (300°). Będziemy zakładać, że na brzegu zadany jest warunek brzegowy pierwszego rodzaju. Ponieważ w metodzie zakładamy brak źródeł i odbiorów ciepła, więc rozkład pola temperatury w rozpatrywanym obszarze jest symetryczny względem dwusiecznej kąta α . Dlatego w dalszych rozważaniach wystarczy rozpatrzyć tylko czworokąt krzywoliniowy $ABCD$ (rys. 3).

Wprowadźmy na płaszczyźnie OXY współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} X = r \cos \varphi, \\ Y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

oraz rozpatrzmy funkcję zespoloną:

$$\omega = f(Z) = Z^{\frac{3}{5}}.$$



Rys. 3. Obszar krzepnięcia w postaci kąta rozwartego i jego obraz poprzez odwzorowanie konforemne

Fig. 3. Solidification area in the form of obtuse angle and its range through conformal mapping

Ponieważ f jest funkcją analityczną na całej płaszczyźnie i jednokrotną w obszarze $\Omega = \{Z : \arg Z \in [0, \frac{5}{3}\pi]\}$, więc funkcja $f(Z)$ jest odwzorowaniem konforemnym w rozpatrywanym obszarze. Wykorzystując postać wykładniczą liczby zespolonej ($Z = re^{i\varphi}$) mamy:

$$\omega = f(Z) = Z^{\frac{3}{5}} = r^{\frac{3}{5}} e^{i\frac{3}{5}\varphi}.$$

Widać stąd, że półprosta wychodząca z punktu $Z = 0$ i nachylona do osi $\text{Re } Z$ pod kątem φ przejdzie na półprostą wychodzącą z punktu $\omega = 0$ i nachyloną do osi $\text{Re } \omega$ pod kątem $\frac{3}{5}\varphi$. W naszym przypadku dwusieczna AD nachylona pod kątem $\frac{5}{6}\pi$ przejdzie na półprostą nachyloną pod kątem $\varphi' = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}\pi = \frac{\pi}{2}$, czyli na półprostą $\text{Im } \omega \geq 0$. Dodatnia półoś rzeczywista ($\varphi = 0$) przejdzie na samą siebie. Odcinek BC przejdzie na odcinek $B'C'$ prostopadły do osi Ou . Natomiast odcinek $C'D'$, obraz izotermy CD , musi być jednocześnie prostopadły do obu obrazów adiabat ($A'D'$ i $B'C'$), czyli musi być równoległy do osi Ou .

Ponieważ wykorzystujemy teraz o jeden układ współrzędnych więcej (biegunowy), więc uwzględniając, że jacobian zamiany układu kartezjańskiego na biegunowy jest postaci:

$$D_b(r, \varphi) = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial r} = \cos \varphi \cdot (r \cos \varphi) - (-r \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = r,$$

wzór na pole czworokąta $ABCD$ (4) przyjmie postać:

$$S = \iint_{ABCD} dx dy = l^2 \iint_{\widehat{AB\widehat{C}\widehat{D}}} dX dY = l^2 \iint_{\widehat{AB\widehat{C}\widehat{D}}} r dr d\varphi = l^2 \iint_{A'B'C'D'} r(u, v) D(u, v) du dv,$$

gdzie $D(u, v)$ jest jacobianem zamiany zmiennych przy odwzorowaniu konforemnym $\omega = f(Z)$. Po uwzględnieniu powyższego wzoru zależność położenia granicy rozdziału faz od czasu (11) przyjmie postać:

$$\int_0^{\tau} \frac{K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} d\tau = \int_0^{\xi} \xi d\xi \int_0^1 r(u, \xi) D(u, \xi) du. \quad (19)$$

Wróćmy do naszego odwzorowania konforemnego:

$$\omega = u + iv = f(Z) = Z^{\frac{3}{5}}.$$

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej mamy:

$$Z^{\frac{3}{5}} = r^{\frac{3}{5}} \left(\cos \frac{3}{5}\varphi + i \sin \frac{3}{5}\varphi \right).$$

Porównując powyższe dwa wyrażenia otrzymamy:

$$\begin{cases} u = r^{\frac{3}{5}} \cos \frac{3}{5}\varphi, \\ v = r^{\frac{3}{5}} \sin \frac{3}{5}\varphi. \end{cases}$$

Wyliczając z tego układu zmienne r i φ mamy:

$$\begin{cases} r = (u^2 + v^2)^{\frac{5}{6}}, \\ \varphi = \frac{5}{3} \arctg \frac{v}{u}. \end{cases}$$

Możemy teraz obliczyć szukany jacobian $D(u, v)$:

$$D(u, v) = \frac{25}{9} (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{6}}.$$

Policzmy całkę:

$$\int_0^1 r(u, \xi) D(u, \xi) du = \frac{25}{9} \int_0^1 (u^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}} du = \frac{25}{63} \left[3(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}} + 4\xi^{\frac{4}{3}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\xi^{-2} \right) \right].$$

gdzie ${}_2F_1(a, b, c, x)$ jest funkcją hipergeometryczną. Wstawiając otrzymaną zależność do wzoru (19) i całkując, otrzymamy ($T_n = \text{const}$):

$$\frac{K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} \tau = \frac{5}{14} \left[(1 + \xi^2)^{\frac{5}{3}} - 1 \right] + \frac{25}{63} \pi \left[\frac{27}{65} \left(1 - {}_2F_1 \left(-\frac{13}{6}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}, -\xi^2 \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{9}{7} x^2 {}_2F_1 \left(-\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, -\xi^2 \right) - \frac{7\pi^{\frac{3}{2}} x^{\frac{13}{3}}}{3\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{19}{6})} \right], \quad (20)$$

gdzie $\Gamma(x)$ oznacza funkcję gamma Eulera. Ze wzoru tego możemy wyliczyć (wartość przybliżoną) bezwymiarowy czas τ odpowiadający zadanemu parametrowi ξ oraz, pamiętając o zależności $\tau = \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{\beta}$, zwykły czas.

Tabela 1
Wyniki obliczeń w przypadku krzepnięcia
w obszarze nieograniczonym

ξ	τ	t [h]	η
0.1	0.00885	0.10	0.01077
0.2	0.03939	0.43	0.03420
0.3	0.10178	1.11	0.06722
0.4	0.21040	2.28	0.10858
0.5	0.38271	4.15	0.15749
0.6	0.63853	6.93	0.21341
0.7	0.99955	10.85	0.27593
0.8	1.48904	16.17	0.34471
0.9	2.13157	23.14	0.41948
1.0	2.95287	32.06	0.5

Znajdziemy jeszcze zależność grubości warstwy zakrzepłej wzdłuż dwusiecznej AD od parametru ξ . Wykorzystamy w tym celu odpowiedniość między punktami D i D' . Niech η oznacza wspomnianą grubość. Dla punktu D mamy:

$$r_D = \frac{\eta}{l}, \quad \varphi_D = \frac{5}{6}\pi.$$

Natomiast dla odpowiadającego mu, poprzez odwzorowania f , punktu D' mamy:

$$u_{D'} = 0, \quad v_{D'} = \xi = r_D^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{5} \varphi_D = r_D^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = r_D^{\frac{3}{2}}.$$

Wykorzystując powyższe zależności otrzymamy:

$$\eta = l \cdot \xi^{\frac{2}{3}}. \quad (21)$$

Zależność czasu (podanego w godzinach) i grubości od parametru ξ podano w tabeli 1. Obliczenia przeprowadzono dla następujących wartości danych wejściowych: $c = 670 [J/(kg \cdot K)]$, $L = 247 [kJ/kg]$, $T_{kr} = 1788 [K]$, $T_n = T_o = 1388 [K]$, $\lambda = 30 [W/(m \cdot K)]$, $\rho = 7000 [kg/m^3]$, $l = 0.5 [m]$.

W celu znalezienia kształtu frontu krzepnięcia wystarczy znaleźć współrzędne punktu P znając współrzędne odpowiadającego mu punktu P' , które są równe:

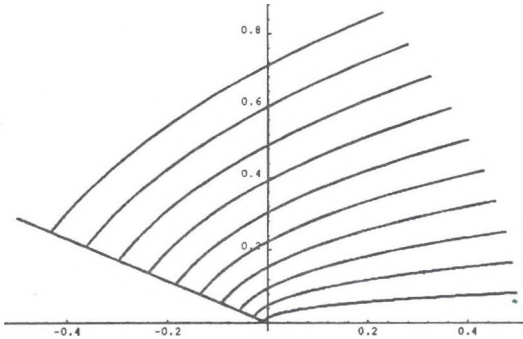
$$\begin{cases} u_{P'} = u, & u \in (0, 1], \\ v_{P'} = \xi. \end{cases}$$

Warto zauważyć, że dla $u = 1$ otrzymamy punkt C' . We współrzędnych biegunowych (unormowanych) współrzędne punktu P będą dane zależnościami:

$$\begin{cases} r_P = (u_{P'}^2 + \xi^2)^{\frac{5}{6}}, \\ \varphi_P = \frac{5}{3} \arctg \frac{\xi}{u_{P'}}. \end{cases}$$

Stąd współrzędne punktu P na płaszczyźnie wyjściowej Oxy będą następujące:

$$\begin{cases} x_P = l r_P \cos \varphi_P, \\ y_P = l r_P \sin \varphi_P. \end{cases}$$



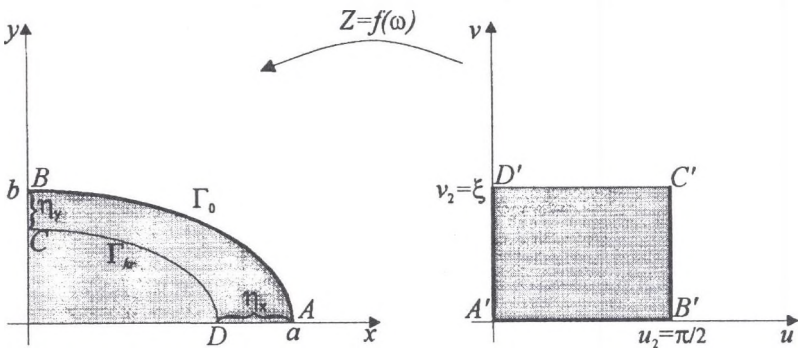
Rys. 4. Kilka położenia granicy rozdziału faz w przypadku krzepnięcia w obszarze nieograniczonym

Fig. 4. Some positions of the freezing front in the case of solidification in unbounded area

Widać stąd, że zadając parametr ξ jesteśmy w stanie znaleźć kształt granicy rozdziału faz oraz czas, po którym granica przyjmie to położenie. Można próbować także odwrotnie – zadać czas i szukać położenia granicy. W tym przypadku możemy mieć kłopot z dokładnym rozwiązaniem równania (19) ze względu na zmienną ξ i będziemy musieli wykorzystywać w tym celu metody numeryczne. Położenie frontu krzepnięcia dla obliczanego obszaru (czworokąt $ABCD$ z frontem krzepnięcia CD) w zależności od parametru ξ ilustruje rysunek 4. Parametry metalu i procesu krzepnięcia przyjęto takie same jak w przypadku określania wielkości grubości i czasu (tabela 1). Parametr ξ zmienia się od 0.1 (krzywa wewnętrzna) do 1.0 (krzywa zewnętrzna) z krokiem równym 0.1.

4. Krzepnięcie w walcu o przekroju eliptycznym

Rozpatrzmy teraz przypadek krzepnięcia odlewu w formie odlewniczej, która jest walcem o przekroju eliptycznym. Ze względu na symetrię zajmiemy się krzepnięciem w jednej ćwiartce przekroju poprzecznego obszaru krzepnięcia (rys. 5).



Rys. 5. Obszar krzepnięcia ograniczony elipsą i jego obraz poprzez odwzorowanie konformne

Fig. 5. Solidification area bounded by ellipse and its range through conformal mapping

Osie układu współrzędnych Oxy dobierzemy tak, aby pokryły się one z osiami elipsy. Równanie parametryczne elipsy wygląda wtedy następująco:

$$\begin{cases} x = a \cos u, \\ y = b \sin u, \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi). \quad (22)$$

Jeśli wprowadzimy nowe współrzędne $X = \frac{x}{l}$, $Y = \frac{y}{l}$ i $Z = X + iY$, gdzie $l = \sqrt{a^2 - b^2}$ jest odległością ognisk elipsy od początku układu współrzędnych, to równanie rozpatrywanej elipsy przyjmie postać:

$$\begin{cases} X = \frac{a}{l} \cos u, \\ Y = \frac{b}{l} \sin u, \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi). \quad (23)$$

Można je także zapisać w postaci:

$$Z = X + iY = \frac{a}{l} \cos u + i \frac{b}{l} \sin u.$$

Wprowadźmy funkcję:

$$Z = X + iY = f(\omega) = \frac{a}{l} \cos \omega + i \frac{b}{l} \sin \omega, \quad (24)$$

gdzie $\omega = u + iv$. Funkcja ta jest analityczna i jednokrotna w pasie $0 \leq u < 2\pi$, jest więc w tym pasie odwzorowaniem konforemnym. Przekształca ona oś rzeczywistą $u = \operatorname{Re} \omega$ na brzeg rozpatrywanego obszaru krzepnięcia (czyli na zadaną elipsę). Rozdzielając części rzeczywistą i urojoną we wzorze (24) mamy:

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{2l} \left((a+b)e^{-v} + (a-b)e^v \right) \cos u, \\ Y &= \frac{1}{2l} \left((a+b)e^{-v} - (a-b)e^v \right) \sin u. \end{cases} \quad (25)$$

Powyższa funkcja na pierwszej ćwiartkę elipsy przekształci pas:

$$P = \left\{ \omega = u + iv : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \wedge v \geq 0 \right\}.$$

Korzystając ze wzoru (25) możemy policzyć jacobian $D(u, v)$, który jest równy:

$$D(u, v) = \frac{1}{4l^2} \left((a+b)^2 e^{-2v} + (a-b)^2 e^{2v} - 2(a^2 - b^2) \cos 2u \right).$$

Ponieważ mamy teraz $u_2 = \frac{\pi}{2}$, więc równanie bilansu ciepła przyjmie postać:

$$\int_0^{\tau} \frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\xi} \xi d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u, \xi) du.$$

Wstawiając policzoną wartość jacobianu dostajemy:

$$\int_0^{\tau} \frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} d\tau = \frac{1}{2\pi l^2} \int_0^{\xi} \xi d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((a+b)^2 e^{-2\xi} + (a-b)^2 e^{2\xi} - 2(a^2 - b^2) \cos 2u \right) du.$$

Po policzeniu całki iterowanej otrzymamy:

$$\int_0^{\tau} \frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} d\tau = \frac{1}{16l^2} \left[(a+b)^2 \left(1 - (2\xi + 1) e^{-2\xi} \right) + (a-b)^2 \left(1 + (2\xi - 1) e^{2\xi} \right) \right].$$

W przypadku warunku brzegowego pierwszego rodzaju (przy $T_n = \text{const}$) dostajemy:

$$\frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} \tau = \frac{1}{16l^2} \left[(a+b)^2 \left(1 - (2\xi + 1) e^{-2\xi} \right) + (a-b)^2 \left(1 + (2\xi - 1) e^{2\xi} \right) \right]. \quad (26)$$

Grubość warstwy zakrzepłej wzdłuż osi Ox i Oy (η_x i η_y) możemy wyznaczyć korzystając z położenia punktów C' , D' i ich obrazów C , D . Współrzędne punktów C i D są równe:

$$C : \begin{cases} X_C &= 0, \\ Y_C &= \frac{b - \eta_y}{l}, \end{cases} \quad D : \begin{cases} X_D &= \frac{a - \eta_x}{l}, \\ Y_D &= 0, \end{cases}$$

natomiast współrzędne punktów C' i D' są równe:

$$C' : \begin{cases} u_{C'} = \frac{\pi}{2}, \\ v_{C'} = \xi, \end{cases} \quad D' : \begin{cases} u_{D'} = 0, \\ v_{D'} = \xi. \end{cases}$$

Korzystając z przedstawienia parametrycznego (25) mamy:

$$\begin{cases} \eta_x = a - \frac{1}{2} \left((a+b)e^{-\xi} + (a-b)e^{\xi} \right), \\ \eta_y = b - \frac{1}{2} \left((a+b)e^{-\xi} - (a-b)e^{\xi} \right). \end{cases} \quad (27)$$

Zastanówmy się jeszcze, ile będzie wynosił czas całego procesu krzepnięcia dla tego przykładu. Proces krzepnięcia zakończy się wtedy, gdy grubość warstwy zakrzepłej wzdłuż osi Oy będzie równa małej osi elipsy ($\eta_y = b$). Z zależności (27) dostajemy, że musi być spełniona wtedy równość:

$$(a+b)e^{-\xi} - (a-b)e^{\xi} = 0.$$

Wyliczając stąd ξ dostajemy:

$$\xi = \ln \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}. \quad (28)$$

Wstawiając powyższą zależność do wzoru (26) otrzymamy wyrażenie określające całkowity bezwymiarowy czas krzepnięcia:

$$\tau_k = \frac{2 + K\Theta_n b^2}{8K\Theta_n l^2}. \quad (29)$$

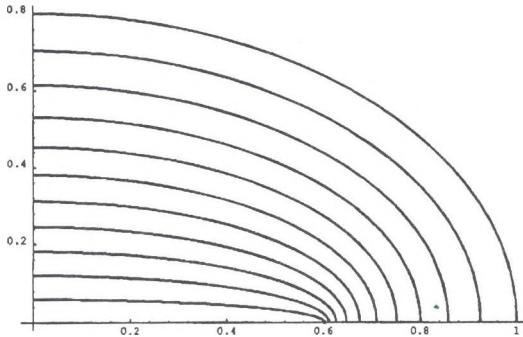
Zależność czasu (podanego w godzinach) i grubości zakrzepniętego metalu, wzdłuż osi Ox i Oy (η_x i η_y), od parametru ξ podano w tabeli 2. Obliczenia przeprowadzono dla następujących wartości danych wejściowych: $c = 670 [J/(kg \cdot K)]$, $L = 247 [kJ/kg]$, $T_{kr} = 1788 [K]$, $T_n = T_o = 1388 [K]$, $\lambda = 30 [W/(m \cdot K)]$, $\rho = 7000 [kg/m^3]$, $a = 1 [m]$, $b = 0.8 [m]$.

Bezwymiarowy czas całego procesu krzepnięcia τ_k , obliczony ze wzoru (29), wynosi 0.63184. Natomiast odpowiadający mu rzeczywisty czas krzepnięcia t_k jest równy 9.88 [h]. Wartość parametru ξ odpowiadająca zakończeniu krzepnięcia jest równa 1.09861.

Położenie frontu krzepnięcia dla obliczanego obszaru (czworokąt $ABCD$ z frontem krzepnięcia CD) w zależności od parametru ξ ilustruje rysunek 6. Parametry metalu i procesu krzepnięcia przyjęto takie same jak w przypadku określania wielkości grubości i czasu (tabela 2). Parametr ξ zmienia się od 0 (brzeg formy odlewniczej, krzywa zewnętrzna) do 1.0 (krzywa wewnętrzna) z krokiem równym 0.1.

Tabela 2
Wyniki obliczeń w przypadku krzepnięcia
w walcu eliptycznym

ξ	τ	t [h]	η_x	η_y
0.1	0.01424	0.22	0.07513	0.09616
0.2	0.05026	0.79	0.14100	0.18528
0.3	0.10016	1.57	0.19828	0.26825
0.4	0.15838	2.48	0.24753	0.34589
0.5	0.22118	3.46	0.28925	0.41900
0.6	0.28622	4.47	0.32386	0.48828
0.7	0.35229	5.50	0.35170	0.55445
0.8	0.41911	6.55	0.37305	0.61816
0.9	0.48721	7.61	0.38813	0.68005
1.0	0.55782	8.72	0.39708	0.74074



Rys. 6. Kilka położeń granicy rozdziału faz w przypadku krzepnięcia w walcu eliptycznym
Fig. 6. Some positions of the freezing front in the case of solidification in cylindroid

Literatura

- [1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, t. II i III, Warszawa 1985.
- [2] F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1979.
- [3] W. Longa, *Krzepnięcie odlewów w kokilach*, Śląsk, Katowice 1978.

- [4] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Государственное Издательство Техничко-Теоретической Литературы, Москва - Ленинград 1951.
- [5] Ю. А. Малевич, Ю. А. Самойлович, *Теплофизические основы затвердевания отливок и слитков*, Высшейшая школа, Минск 1989.
- [6] Ю. А. Самойлович, *Формирование слитка*, Металлургия, Москва 1977.

*Institut Matematyki
Politechnika Śląska
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice
e-mail: damslot@zeus.polsl.gliwice.pl*

Recenzent: Józef S. Suchy

Abstract

In the paper the method of solving the two-dimensional quasistationary Stefan problem, formulated in simply connected region, is presented. There is assumed Dirichlet boundary conditions and Hankel boundary conditions on the boundary of an area. The method uses conformal mapping and is based on a heat balance equation on a solid layer.

Two special cases of the Stefan problem are considered in the paper: unbounded interior of obtuse angle and interior of cylindroid. On the first area case it is found dependence between position of the freezing front in the plane Ouv and dimensionless time is given by equation (20). The thickness of solid phase along bisector is given by equation (21). For the second area the first dependence is described by formula (26). Thickness of solid phase determined along coordinate axes is given by (27). Dimensionless time of whole solidification process is determined by formula (29).

Results of numerical experiments are presented in tables 1 and 2 for the unbounded interior of obtuse angle and the interior of cylindroid. The figures 4 and 6 present some positions of the freezing front for both areas.