

Jerzy SUPEL, Jan ZAWADA

Politechnika Warszawska, Warszawa

METODA ELEMENTÓW KONTAKTOWYCH W ZASTOSOWANIU DO MODELOWANIA PROCESÓW KRUSZAREK

Streszczenie. W pracy przedstawiono założenia i podstawowe zależności numerycznej metody elementów kontaktowych. Zastosowanie tej metody w mechanice procesów rozdrabniania powinno przynieść wartościowe rezultaty. Umożliwia ona bowiem analizowanie rozdrabniania jako procesu sekwencyjnego, a nie tylko ostatniej fazy tego procesu, tj. osiągnięcia stanu granicznego (tak jak w teorii stanów granicznych).

APPLICATION OF THE CONTACT ELEMENT METHOD IN MODELLING OF CRUSHING PROCESSES

Summary. The paper presents the assumptions and fundamental relations of the numerical contact element method. Application of the method in the mechanics of grinding processes should lead to valuable results since this method allows for analysing the grinding process as a sequential process instead of analysing only the final stage of that process, i.e. attaining the limit state (as in Limit States Theory).

1. Wstęp

Rozwój mechaniki procesów rozdrabniania (kruszenia i mielenia), jak również procesów urabiania ośrodków kruchych (i plastycznych) zależy w znacznym stopniu od stosowania numerycznej analizy tych procesów. Obecnie mają głównie zastosowanie: metoda elementów skończonych i metody teorii stanów granicznych i nośności granicznej. Metoda elementów skończonych umożliwia przede wszystkim wyznaczanie pola naprężeń i odkształceń w fazie sprężystej deformacji, a dwie pozostałe metody pozwalają na określanie pola naprężeń i odkształceń w fazie plastycznych, trwałych deformacji. Nie stosowano dotychczas

opisywanych metod numerycznych do analizowania rozdrabniania jako procesu sekwencyjnego, w którym uwzględnia się poszczególne fazy obciążania i pęknięcia materiału.

Metoda elementów kontaktowych eliminuje tę niedoskonałość dotychczasowych analiz. Podobnie jak metoda elementów skończonych rozpatruje konstrukcje inżynierskie czy inne obciążane ciała jako zbiór elementów połączonych odpowiednio ze sobą, tak metoda elementów kontaktowych rozważa obciążany ośrodek jako zbiór ziaren o różnych kształtach będących ze sobą w kontakcie [1]. Na przykład blok obciążany stemplami współosiowymi można przedstawić w zależności od rodzaju deformacji jako zbiór elementów kontaktowych w postaci długich wałków, krążków bądź kul.

Metoda elementów kontaktowych, oprócz swojej prostoty ideowej, ma tę zaletę, że można łatwo wprowadzić zmiany prawa fizycznego opisującego warunki zniszczenia, a pęknięcie śledzimy jako proces bez przebudowy na każdym kroku czasowym macierzy sztywności. Metoda ta jest szczególnie przydatna do analizowania procesów dynamicznych.

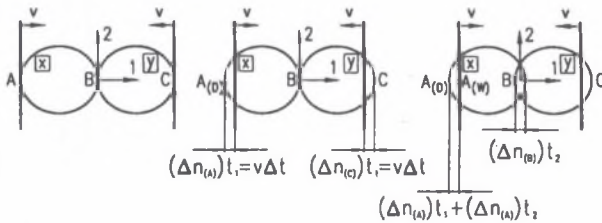
2. Idea metody elementów kontaktowych [1, 2]

2.1. Cykl obliczeniowy

Metoda elementów kontaktowych zakłada, że równowaga sił kontaktowych i przemieszczania obciążonego zbioru ziaren znajdowane są przez kolejne obliczenia chwilowego położenia pojedynczych ziaren. Ruch ziaren jest wynikiem propagowania w ośrodku pól naprężeń i odkształceń powstałych na brzegach i jest procesem dynamicznym. Prędkość propagacji jest funkcją właściwości ośrodka ziarnistego. Przyjmuje się, że w pewnych stałych przedziałach czasu prędkości i przyśpieszenia są stałe. Przyjmuje się ponadto, iż w jednym „kroku” czasowym zaburzenie nie przenosi się dalej niż do sąsiedniego elementu. Siły działające na pojedyncze ziarno są określone wyłącznie w miejscach kontaktu ziarna z innymi ziarnami. Można modelować oddziaływania znacznej liczby ziaren bez wykorzystywania dużej pamięci komputera.

Obliczenia przeprowadzane metodą elementów kontaktowych polegają na zastosowaniu drugiego prawa Newtona i prawa określającego zależność siła-przemieszczenie do opisu kontaktu ziaren. Prawo Newtona określa ruch ziarna pod wpływem działających sił. Zależność siła-przemieszczenie służy do znalezienia siły kontaktowej wynikającej z przemieszczeń.

Deformacje pojedynczych ziaren są małe w porównaniu z deformacją zbioru ziaren jako całości, całkowita deformacja jest zależna przede wszystkim od ruchu cząstek jako ciał sztywnych. W tym kontekście precyzyjne modelowanie odkształcenia pojedynczego ziarna nie jest konieczne dla uzyskania dobrego przybliżenia własności mechanicznych ośrodka. Przyjmuje się, że ziarna mogą na siebie nachodzić w miejscu kontaktu. Wielkość nasunięcia jest związana z siłą w miejscu kontaktu. Należy zaznaczyć, że te nasunięcia są małe w porównaniu z wymiarami ziaren.



Rys. 1. Dwa ziarna w kontakcie ściskane sztywnymi płytami (przykład ilustrujący cykl obliczeniowy)
Fig. 1. Two grains in contact compressed by rigid plates (an example illustrating the computational cycle)

Dla zilustrowania sposobu wyznaczania sił i przemieszczeń w jednym cyklu obliczeniowym posłużmy się przypadkiem przedstawionym na rys 1. Dwa ziarna oznaczone jako x i y są zginate między dwoma sztywnymi ścianami. Ściany zbliżają się do siebie ze stałą prędkością v . Początkowo, w czasie $t = t_0$, ściany i ziarna stykają się, lecz siły kontaktowe nie istnieją. Po czasie Δt ściany zbliżyły się ku sobie o odległość $2 v \Delta t$. Zgodnie z założeniem, że zaburzenie nie może się przenieść dalej niż jedno ziarno na jednym kroku czasowym, oba ziarna zachowują początkową pozycję w przedziale czasu od $t = t_0$ do $t = t_0 + \Delta t$. Tak więc w czasie $t_1 = t_0 + \Delta t$ ziarna nie zachodzą na siebie (rys. 1).

Punkty A_D i A_W są odpowiednio punktami ziarna i ściany, leżą na linii prostopadłej do ściany i przechodzącej przez środek ziarna. Kontakt A jest określony jako punkt w środku pomiędzy A_D i A_W . Względne przemieszczenie $(\Delta n)_A$ w miejscu kontaktu (nasunięcie) jest zdefiniowane jako przemieszczenie punktu A_W względem punktu A_D po czasie Δt .

Względne przemieszczenia zachodzące na kontaktach A i C w czasie $t_1 = t_0 + \Delta t$ są wykorzystane do obliczania sił kontaktowych. W najprostszym przypadku przyrostowa zależność siła-przemieszczenie ma postać:

$$\Delta F_n = k_n \Delta n = k_n v \Delta t, \quad (1)$$

gdzie:

k_n - sztywność w kierunku normalnym,

ΔF_n - przyrost siły normalnej.

Przyjmując jako dodatni kierunek 1 (rys.1), siły działające na ziarna x i y w chwili czasu $t_1 = t_0 + \Delta t$ można określić następująco:

$$F_{(x)_1} = k_n(\Delta n)_{t_1}, \quad F_{(y)_1} = -k_n(\Delta n)_{t_1}, \quad (2)$$

Znając siły można wyliczyć nowe przyspieszenia ruchu ziaren posługując się drugim prawem Newtona:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_{(x)_1}}{m_{(x)}}, \quad \ddot{y}_1 = \frac{F_{(y)_1}}{m_{(y)}}, \quad (3)$$

gdzie:

\ddot{x}_1 i \ddot{y}_1 - oznaczają odpowiednie przyspieszenia ziaren x i y , a m , z odpowiednim indeksem, masę ziarna.

Przyspieszenie określone formułą (3) jest z założenia stałe w przedziale czasowym od $t_1 = t_0 + \Delta t$ do $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ i może być całkowane do wyliczenia prędkości:

$$[\dot{x}_1]_{t_2} = \left[\frac{F_{(x)_1}}{m_{(x)}} \right] \Delta t, \quad [\dot{y}_1]_{t_2} = \left[\frac{F_{(y)_1}}{m_{(y)}} \right] \Delta t \quad (4)$$

Względne przyrosty przemieszczeń w kontaktach A , B i C w chwili czasu $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ będą:

$$(\Delta n_{(A)})_{t_2} = (v - [F_{(x)_1} / m_{(x)}] \Delta t) \Delta t \quad (5)$$

$$(\Delta n_{(B)})_{t_2} = ([F_{(x)_1} / m_{(x)}] \Delta t - [F_{(y)_1} / m_{(y)}] \Delta t) \Delta t \quad (6)$$

$$(\Delta n_{(C)})_{t_2} = ([F_{(y)_1} / m_{(y)}] \Delta t - [-v]) \Delta t, \quad (7)$$

gdzie Δn jest dodatnie dla ściskania.

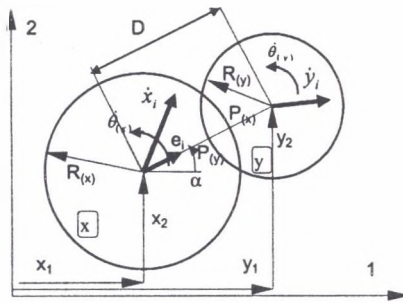
Ten cykl obliczeń może być powtarzany dowolną liczbę razy. Siły odpowiadające przemieszczeniom są znajdowane przy wykorzystywaniu prawa siła-przemieszczenie, zależność (2), a wypadkowa sił działających na ziarno, podstawiona do drugiego prawa Newtona, zależność (3), pozwala obliczyć nowe przemieszczenia.

Powyższy przykład jest ilustracją cyklu obliczeniowego przez prawo siła-przemieszczenie i prawo opisujące ruch ziarna. W ogólnym przypadku zbioru wielu ziaren prawo siła-przemieszczenie jest stosowane dla każdego kontaktu ziarna, a siłą działającą na ziarno jest suma wektorowa wszystkich sił kontaktowych działających na ziarno. Po obliczeniu sił kontaktowych dla wszystkich ziaren obliczane są nowe przyspieszenia z drugiego prawa Newtona. Należy zaznaczyć, że w konkretnych obliczeniach można się

opierać na różnych prawach siła-przemieszczenie, a nie tylko na prawie liniowym, jakie przyjęto powyżej. W takich obliczeniach (przydatnych w mechanice kruszenia) należy ponadto założyć model ciała (np. sprężysto-kruchoplastyczny) oraz warunek pęknięcia (warunek zniszczenia). Uzyskanie wartości sił kruszenia, energii i innych wielkości (np. pola odkształceń) nie przedstawia wówczas trudności.

2.2. Zależność siła-przemieszczenie

Rozpatrzmy dwa ziarna znajdujące się w kontakcie (rys.2). Współzrzednymi środków ziaren są odpowiednio $x_i = (x_1, x_2)$ i $y_i = (y_1, y_2)$. Składowymi wektora prędkości ziaren x i y są $\dot{x}_i = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ i $\dot{y}_i = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ oraz prędkość obrotu $\dot{\theta}_{(x)}$ i $\dot{\theta}_{(y)}$. Ziarna x i y mają promienie $R(x)$ i $R(y)$ oraz masy $m(x)$ i $m(y)$. Punkty $P(x)$ i $P(y)$ są punktami przecięcia linii łączącej środki ziaren z granicami ziaren.



Rys. 2. Dwa ziarna w kontakcie. Składowe prędkości i obrotu ziaren
Fig. 2. Two grains in contact. Grains velocity and rotation components

Dwa ziarna znajdują się w kontakcie tylko wtedy gdy odległość D pomiędzy ich środkami jest mniejsza od sumy ich promieni, tj. gdy:

$$D < R_{(x)} + R_{(y)} \quad (8)$$

Jeśli ten warunek jest spełniony, to względne przemieszczenie w punkcie kontaktu C (rys. 2) jest określone przez względną prędkość. Względna prędkość w kontakcie jest zdefiniowana jako prędkość punktu $P(x)$ względem punktu $P(y)$. Jednostkowy wektor $e_i = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ jest skierowany od środka ziarna x do środka ziarna y :

$$e_i = \frac{y_i - x_i}{D} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad (9)$$

a jednostkowy wektor t_i jest obróconym o $\pi/2$ wektorem e_i

$$t_i = (e_2, -e_1) \quad (10)$$

Względna prędkość punktu $P_{(x)}$ względem punktu $P_{(y)}$ jest:

$$\dot{X}_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) - (\dot{\theta}_{(x)}R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)}R_{(y)})t_i \quad (11)$$

Normalna (\dot{n}) i styczna (\dot{s}), składowe prędkości względnej są rzutami \dot{X}_i odpowiednio na e_i oraz t_i :

$$\dot{n} = \dot{X}_i e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i)e_i - (\dot{\theta}_{(x)}R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)}R_{(y)})t_i e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i)e_i \quad (12)$$

oraz

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{X}_i t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i)t_i - (\dot{\theta}_{(x)}R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)}R_{(y)})t_i t_i = \\ &= (\dot{x}_i - \dot{y}_i)t_i - (\dot{\theta}_{(x)}R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)}R_{(y)}) \end{aligned} \quad (13)$$

Całkowanie po czasie składowych prędkości względnych daje składowe Δn oraz Δs przyrostu względnego przemieszczenia:

$$\Delta n = (\dot{n})\Delta t = \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i)e_i\}\Delta t \quad (14)$$

oraz

$$\Delta s = (\dot{s})\Delta t = \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i)t_i - (\dot{\theta}_{(x)}R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)}R_{(y)})\}\Delta t \quad (15)$$

Względne przemieszczenia, łącznie z prawem siła-przemieszczenie, pozwalają wyliczyć przyrosty siły normalnej i siły stycznej w miejscu kontaktu:

$$\Delta F_n = k_n \Delta n = k_n \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i)e_i\}\Delta t \quad (16)$$

oraz

$$\Delta F_s = k_s \Delta s = k_s \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i)t_i - (\dot{\theta}_{(x)}R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)}R_{(y)})\}\Delta t \quad (17)$$

gdzie: k_n i k_s oznaczają odpowiednio sztywność normalną i styczną.

Na koniec, na każdym kroku czasowym przyrosty sił ΔF_n i ΔF_s dodawane są do sumy poprzednich przyrostów F_n i F_s obliczonych na poprzednich krokach:

$$(F_n)_N = (F_n)_{N-1} + \Delta F_n, \quad (F_s)_N = (F_s)_{N-1} + \Delta F_s \quad (18)$$

gdzie: indeksy N i $N-1$ odnoszą się do czasu t_N i t_{N-1} takich, że $t_N - t_{N-1} = \Delta t$. Tarcie między ziarnami przyjmuje się typu Coulombowskiego. Wielkość siły F_n określona zależnością (18) nie może przewyższać wartości $(F_s)_{\max}$ określonej jako:

$$(F_s)_{\max} = F_n \tan \phi_\mu + c \quad (19)$$

gdzie: ϕ_μ jest kątem tarcia między ziarnami, a c kohezją.

Całkowity moment sił działający na ziarno x jest sumą momentów sił stycznych wszystkich kontaktów ziarna $\sum M_{(x)} = \sum F_s R_{(x)}$. Moment wypadkowy i wypadkowa siła działające

na ziarno x są użyte w drugim prawie Newtona do obliczenia nowych przyspieszeń \ddot{x}_i oraz $\ddot{\theta}_{(x)}$.

2.3. Ruch ziaren

Prędkości \dot{x}_i oraz $\dot{\theta}_{(x)}$ wykorzystywane w zależności siła - przemieszczenie w równaniach (16) i (17) otrzymuje się jak następuje:

bieżąco obliczone wartości sił i momentów w chwili t_N działają na ziarno x przez odcinek czasu Δt od $t_{N-1/2}$ do $t_{N+1/2}$. Drugie prawo Newtona zastosowane do dysku x daje:

$$m_{(x)} \ddot{x}_i = \Sigma F_{(x)i} \quad (20)$$

$$I_{(x)} \ddot{\theta}_{(x)} = \Sigma M_{(x)} \quad (21)$$

gdzie $I_{(x)}$ jest momentem bezwładności ziarna x . Przyjmując wartości x_i oraz $\theta_{(x)}$ stałe w przedziale czasu Δt , z równań (20) i (21) otrzymamy następujące wyrażenia na prędkości:

$$(\dot{x}_i)_{N+1/2} = (\dot{x}_i)_{N-1/2} + [\Sigma F_{(x)i} / m_{(x)}]_N \Delta t \quad (22)$$

$$(\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} = (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} + [\Sigma M_{(x)} / I_{(x)}]_N \Delta t \quad (23)$$

Te równania zastosowane są do każdego ziarna oddzielnie. Nowe wartości prędkości mogą być użyte w zależności siła-przemieszczenie, a cykl obliczeń może być powtórzony w następnym kroku czasowym. Nowe wielkości prędkości przemieszczeń są także użyte do określenia nowych położeń ziaren i ich obrotów przez następne całkowanie:

$$(x_i)_{N+1} = (x_i)_N + (\dot{x}_i)_{N+1/2} \Delta t \quad (24)$$

$$(\theta_{(x)})_{N+1} = (\theta_{(x)})_N + (\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} \Delta t \quad (25)$$

Siły masowe, jak i siły grawitacyjne, też mogą być dodane. W tym przypadku człon $m_{(x)} g_i$ jest dodany do siły wypadkowej $\Sigma F_{(x)i}$ w równaniu (22), $g_i = (g_1, g_2)$ reprezentuje składowe wektora przyspieszenia zależnego od sił masowych.

2.4. Tłumienie

Tłumienie tarciami zachodzi w przypadku poślizgu ziaren wtedy, gdy absolutna wartość siły stycznej w jakimś kontakcie jest równa $(F_s)_{\max}$.

Można wprowadzić dwie formy tarcia typu wiskotycznego: tłumienie w miejscu kontaktu i tłumienie globalne. Tłumienie kontaktowe zależy od względnych prędkości ziaren będących

w kontakcie i może być utożsamiane z działaniem tłumika w kierunku normalnym i stycznym. W kierunku stycznym, przy tarcii rozwiniętym na kontakcie, zachodzi tylko tłumienie tarciiem.

Współczynniki lepkiego tłumienia w miejscu kontaktu są oznaczone przez c_n i c_s . Siły tłumienia wchodzi do równań ruchu (22) i (23) jak następuje:

$$(\dot{x}_i)_{N+1/2} = (\dot{x}_i)_{N-1/2} + \{[\Sigma F_{(x)i} + D_{(x)i}] / m_{(x)}\}_N \Delta t \quad (26)$$

$$(\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} = (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} + [\Sigma M_{(x)} / I_{(x)}]_N \Delta t \quad (27)$$

Całkowita siła tłumienia $D_{(x)i}$ jest znaleziona z normalnych (D_n) i stycznych (D_s) sił tłumienia w kontaktach ziarna. Te zaś z kolei określone są następującymi równaniami:

$$(D_n)_N = c_n \dot{n} = c_n [\dot{x}_i - \dot{y}_i]_{N-1/2} e_i \quad (28)$$

oraz

$$(D_s)_N = c_s \dot{s} = c_s [\dot{x}_i - \dot{y}_i]_{N-1/2} t_i - (\dot{\theta}_{(x)} R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} R_{(y)})_{N-1/2} \quad (29)$$

Jeżeli założyć, że współczynniki tłumienia c_n i c_s są proporcjonalne do sztywności k_n i k_s , to

$$c_n = \beta k_n, \quad c_s = \beta k_s, \quad \text{gdzie: } \beta \text{ - jest współczynnikiem proporcjonalności.} \quad (30)$$

Tłumienie globalne odnosi się do absolutnych prędkości ziaren i jest wprowadzone do równań ruchu. Może ono być utożsamiane z tłumieniem związanym z tarciiem ziarna o podłoże. Działa zarówno w ruchu posuwistym, jak i obrotowym ziarna.

Po wprowadzeniu tarcii globalnego równania ruchu ziaren (20) i (21) przybiorą postać:

$$m_{(x)} \ddot{x}_i = \Sigma [F_{(x)i} + D_{(x)i}] - C \dot{x}_i \quad (31)$$

$$I_{(x)} \ddot{\theta}_{(x)} = \Sigma M_{(x)} - C^* \dot{\theta}_{(x)} \quad (32)$$

gdzie C i C^* są współczynnikami globalnego tłumienia działającymi odpowiednio na \dot{x}_i oraz $\dot{\theta}_{(x)}$.

Z równań (31) i (32) po wstawieniu $[(\dot{x}_i)_{N+1/2} - (\dot{x}_i)_{N-1/2}] / \Delta t$ za \dot{x}_i oraz $[(\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} - (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2}] / \Delta t$ za $\dot{\theta}_{(x)}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} & [(\dot{x}_i)_{N+1/2} = \\ & = \left\{ (\dot{x}_i)_{N-1/2} \left[1 - \frac{C}{m_{(x)}} \frac{\Delta t}{2} \right] + \Sigma (F_{(x)i} + D_{(x)i})_N \frac{\Delta t}{m_{(x)}} \right\} / \left\{ 1 + \frac{C}{m_{(x)}} \frac{\Delta t}{2} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

oraz

$$\begin{aligned}
 [(\dot{\theta}_x)_{N+1/2}] &= \\
 &= \left\{ (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} \left[1 - \frac{C^*}{m_{(x)}} \frac{\Delta t}{2} \right] + (\Sigma M_{(x)})_N \frac{\Delta t}{I_{(x)}} \right\} / \left\{ 1 + \frac{C^*}{I_{(x)}} \frac{\Delta t}{2} \right\}
 \end{aligned} \quad (34)$$

Niech współczynniki C i C^* tłumienia globalnego będą proporcjonalne do masy i momentu bezwładności

$$C = \alpha m_{(x)}, \quad C^* = \alpha I_{(x)} \quad (35)$$

Posługując się równaniem (35), równania (33) i (34) można przedstawić w prostszej postaci:

$$\begin{aligned}
 [(\dot{x}_i)_{N+1/2}] &= \\
 &= \left\{ (\dot{x}_i)_{N-1/2} \left[1 - \alpha \frac{\Delta t}{2} \right] + \Sigma (F_{(x)i} + D_{(x)i})_N \frac{\Delta t}{m_{(x)}} \right\} / \left\{ 1 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \right\}
 \end{aligned} \quad (36)$$

oraz

$$[(\dot{\theta}_x)_{N+1/2}] = \left\{ (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} \left[1 - \alpha \frac{\Delta t}{2} \right] + (\Sigma M_{(x)})_N \frac{\Delta t}{I_{(x)}} \right\} / \left\{ 1 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \right\} \quad (37)$$

Powyższe równania dla ruchu i zależności siła-przemieszczenie w pełni opisują numeryczny model materiału ziarnistego. Energia w tym modelu dysypowana jest tylko przez tarcie oraz kontaktowe i globalne tłumienie. Użycie tłumienia innego niż tylko tarcie w miejscu kontaktu jest konieczne, aby zbiór ziaren mógł osiągnąć stan równowagi dla wszystkich warunków. W przypadku niestosowania tłumienia zbiór ziaren mógłby nie osiągnąć stanu równowagi, lecz w praktyce odstępstwo od stanu równowagi można uczynić niewielkim przez zmniejszenie prędkości obciążania.

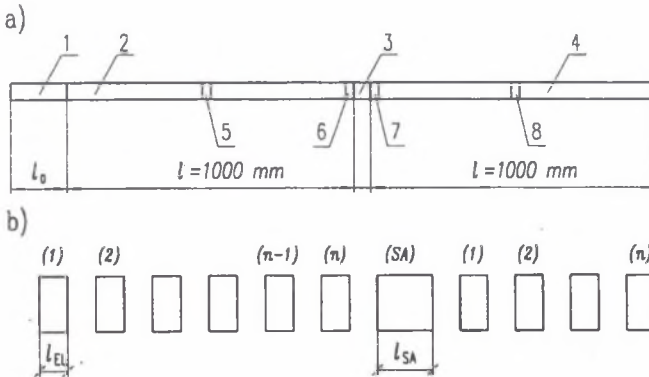
3. Przykład modelowania

Jako przykład zastosowania Metody Elementów Kontaktowych do modelowania procesu kruszenia podamy modelowanie procesu w pręcie Hopkinsona. Taki modelowy proces może odpowiadać, gdy chodzi o aspekt jakościowy, procesom zachodzącym w kruszarkach udarowych, w kruszarkach stożkowych czy nawet kruszarkach szczękowych (np. uderzeniowych „Krupp”).

3.1. Model numeryczny zmodyfikowanego pręta Hopkinsona

Do modelowania przyjęto schemat układu pręta Hopkinsona jak na rys 3. Składa się on z czterech zasadniczych części: 1 bijak, 2 pręt inicjujący, 3 próbka, 4 pręt odbierający (rys 3a). Wszystkie części podzielono na elementy (rys. 3b) wg zasad Metody Elementów Kontaktowych (MEK). Dla prętów przyjęto jednaki element MEK o masie 1/100 masy pręta inicjującego i długości $l_{ik} = 1/100 l$. Liczba elementów bijaka zależy od długości l_0 .

Sposób podziału próbki na elementy przedstawiony zostanie dalej.



Rys. 3. Zmodyfikowany pręt Hopkinsona: a) schemat układu, b) podział pręta na elementy
Fig. 3. Modified split Hopkinson bar: a) system configuration, b) bar partition

Do monitorowania przebiegu odkształceń w prętach użyto wielkości występujących w kontakcie 5 i 8 między elementami 50 i 51 jednako dla obu prętów: inicjującego 2 i odbierającego 4.

Siłami obciążającymi próbkę (SA) są siły kontaktowe 6 między n-tym (100) elementem pręta inicjującego 2 a czołem próbki (SA) - siła P1 oraz siły kontaktowe 7 między próbką (SA) a pierwszym elementem pręta odbierającego 4 - siła P2.

Fala zaburzenia (pochodząca od zderzenia bijaka z 1-szym elementem pręta inicjującego) rozchodzi się wzdłuż pręta z prędkością wzdłużnej fali sprężystej.

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (38)$$

Długość impulsu inicjującego jest czasem t_1 zderzenia (pozostawania w kontakcie) bijaka o długości l_0 z prętym inicjującym.

$$t_1 = 2 \frac{l_0}{c_0} \quad (39)$$

Odkształcenie sprężyste ε_i w pręcie, wywołane zderzeniem, można wyliczyć ze wzoru

$$\nu_0 = -2c_0 \varepsilon_i \frac{\rho_b}{\rho_p} \quad (40)$$

gdzie gęstość materiału bijaka ρ_b i pręta ρ_p przyjmujemy za jednakowe.

Obie wyliczone wielkości, tj. t_i i ε_i , są wielkościami kontrolnymi dla uzyskanych z modelu numerycznego, gdzie bezpośrednio występuje siła kontaktowa (między elementami).

Siła kontaktowa (w przypadku odkształceń sprężystych) wyliczana jest jako:

$$P_i = K_i \delta_n, \quad (41)$$

gdzie K_i jest sztywnością kontaktu, a δ_n przemieszczeniem względnym elementów (n-1) i (n). Ta sama siła jest rezultatem odkształceń ε_i

$$\varepsilon_i = \frac{P_i}{EF}, \quad (42)$$

gdzie EF jest sztywnością przekroju pręta.

Znając przebieg impulsu inicjującego ε_i , a także odbitego ε_r oraz przechodzącego ε_T , możemy wyliczyć siły działające na próbkę (przy założeniu nieodkształcalności próbki i pominięciu jej masy)

$$P_1(t) = EF[\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t)] \quad (43)$$

$$P_2(t) = EF\varepsilon_T(t) \quad (44)$$

lub uzyskać wartości tych sił bezpośrednio, jako sił kontaktowych elementu pręta z próbką, z uwzględnieniem masy próbki i jej odkształcalności.

Przemieszczenie końców pręta będzie

$$u_1(t) = c_0 \int_0^t [\varepsilon_i(\tau) - \varepsilon_r(\tau)] d\tau \quad (45)$$

$$u_2(t) = c_0 \int_0^t \varepsilon_T(\tau) d\tau \quad (46)$$

a odkształcenie próbki

$$\varepsilon_{SA}(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{l_{SA}} \quad (47)$$

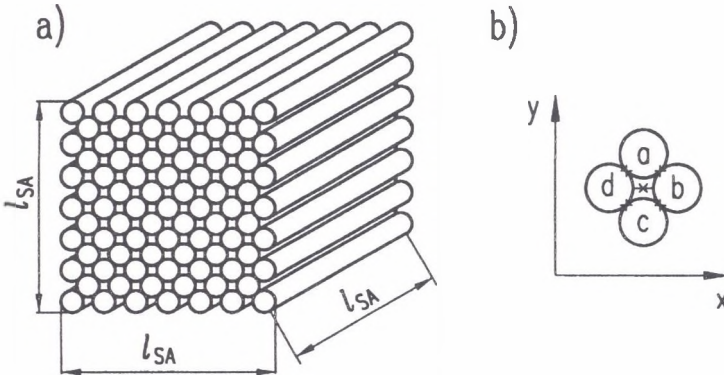
Do wyliczeń przyjmowano:

masa pręta inicjującego	$m = 2.465 \text{ kg}$
długość pręta (prętów)	$l = 1 \text{ m}$
średnica prętów	$d = 19.01 \text{ mm}$
pole przekroju pręta	$F = 2.835 \text{ cm}^2$
sztywność przekroju	$EF = 58.47E6 \text{ N}$

prędkość fali podłużnej	$c_0 = 5170 \text{ m/s}$
masa próbki	$m_{SA} = 0.031 \text{ kg}$
długość próbki	$l_{SA} = 22.7 \text{ mm}$

3.2. Sposób modelowania próbki

Próbkę przyjęto jako zbiór 85 elementów kontaktowych w postaci długich wałków o jednakowej średnicy i długości. Wzajemne usytuowanie elementów pokazuje rys.4a.



Rys. 4. Modelowanie próbki: a) podział na elementy, b) kontakty między ziarnami
Fig. 4. Modelling of the test piece: a) partition, b) contacts between grains

Układ kontaktów między ziarnami pokazano na rys.4b. Oddziaływają na siebie ziarna znajdujące się bezpośrednio w kontakcie oraz ziarna b i d. Ziarna a i c nie oddziaływają między sobą. Sztywność przekroju próbki przyjęto jako część λ sztywności przekroju pręta

$$E_{SA}F_{SA} = \lambda EF \quad (48)$$

stąd parametr λ (sztywność relatywna próbki) wyraża się wzorem

$$\lambda = \frac{E_{SA}F_{SA}}{EF} = \frac{E_{SA}}{E} 1.817 \quad (49)$$

lub

$$E_{SA} = \lambda E 0,55 \quad (50)$$

czyli zmiana parametru λ w granicach 0.05 - 0.2 odpowiada zmianie modułu sprężystości próbki w granicach (0.0275-0.11) E_{stali} , czyli 5.77E3 MPa - 2.31E4 MPa.

Warunek zniszczenia przyjęto w postaci parabolicznej

$$\tau^2 = (m-1) S_i(S_i - N) \quad (51)$$

gdzie $m = \sqrt{1+n}$, gdy $n \geq 3$, S_t jest graniczną wartością siły kontaktowej na rozciąganie, T jest siłą styczną, a N siłą normalną w miejscu kontaktu, współczynnik n jest miarą kruchości materiału próbki i można go określić jako $n = |S_c / S_t|$ stosunek wytrzymałości na ściskanie do wytrzymałości na rozciąganie.

Jako mechanizm zniszczenia przy obciążeniu granicznym przyjęto: zerwanie kontaktu dla siły normalnej rozciągającej, ścięcie - dla siły normalnej ściskającej.

Po osiągnięciu stanu granicznego sił ustają siły kohezji w miejscu kontaktu (tzn. w miejscu kontaktu, gdzie nastąpiło ścięcie lub zerwanie nie mogą pojawić się siły rozciągania).

Dla oznaczenia wartości S_t przyjęto, że zerwanie próbki następuje przez rozciąganie w kierunku x (rys. 4b). W przekroju rozrywającym znajdują się kontakty typu b-d i a-b. Zerwanie kontaktu a-b następuje przy sile $S = S_t$, zaś zerwanie kontaktu b-d przy sile $S = 0.828S_t$.

3.3. Przeprowadzone próby (symulacja numeryczna)

Parametrami prób były:

- od strony narzędzia obciążającego (pręta) - zmienna prędkość początkowa bijaka, dla uzyskania różnych wartości impulsu obciążającego próbkę,
- od strony badanego materiału - krytyczna wartość naprężeń rozciągających σ_{0z} oraz sztywność próbki w zakresie obciążeń sprężystych (moduł Younga E).

Do badań przyjęto model materiału sprężysto-krucho-plastyczny. Obliczenia wykonywane były przy użyciu specjalnie zbudowanego programu obliczeniowego BAR87 (dla próbki 87 ziaren), napisanego w języku programowania FORTRAN. Czas wykonywania jednego przebiegu symulacji 12 - 18 s.

Parametrami zmiennymi prób były:

v - prędkość początkowa bijaka, v_0 [m/s],

s - doraźna wytrzymałość na rozciąganie σ_r [MPa],

m - współczynnik tarcia między próbką a prętem μ ,

n - kruchość materiału S_c/S_t ,

e - sztywność relatywna $\lambda = 1.817 E_{SA}/E$.

Jako zasadę przyjęto zmianę tylko jednego parametru w jednym cyklu symulacji.

Jako parametry wyjściowe przyjęto:

$v = 5$ m/s; $s = 10$ MPa; $m = 0.3$; $n = 8$; $e = 0.1$.

Zestaw parametrów doświadczeń podano w tablicy 1.

Tablica 1

		Zestaw parametrów doświadczeń									
v	1.	2.	4.	5.	7.	10.					
s	2.	5.	8.	10.	12.	15.	16.	20.	25.	30.	
m			0.	.3	1.						
n			3	8	24						
e			.05	.1	.2						

Uzyskane wyniki po odpowiednich przeliczeniach zostały przedstawiane graficznie. Zawierają one informacje o zjawisku uderzenia oraz o procesie kruszenia. Mamy więc np.:

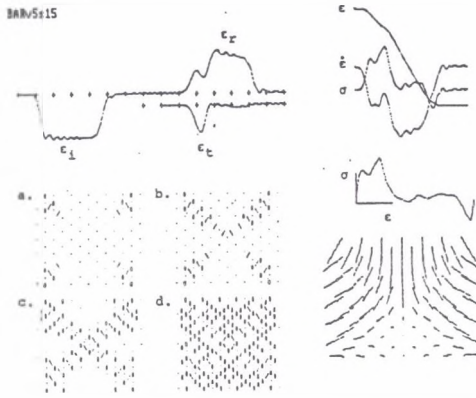
1. Przebiegi impulsów ε_i , ε_r , ε_t (ε_i – odkształcenie w pręcie transmitującym 2 (rys. 3), spowodowane przejściem ściskającej fali sprężystej, ε_r – odkształcenie w pręcie 2 spowodowane przejściem odbitej rozciągającej fali sprężystej, ε_t – odkształcenie w pręcie odbierającym spowodowane przejściem ściskającej fali sprężystej).
2. Przebiegi funkcji $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$, $\sigma(\varepsilon)$; funkcje te dotyczą próbki 3. $\dot{\varepsilon}(t)$ oznacza prędkość odkształcania.
3. Wykresy energii całkowitej pochłoniętej przez próbkę (energia ta jest utożsamiana z pracą kruszenia) w funkcji prędkości bijaka i wytrzymałości doraźnej na rozciąganie σ_r .
4. Siły kruszenia w funkcji odkształcenia próbki odpowiadające różnym prędkościom bijaka.

4. Niektóre wyniki badań numerycznych

Na rys. 5a pokazano charakter przebiegu impulsów ε_i , ε_r , ε_t w pręcie, a na rys. 5b przebiegi funkcji $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$, $\sigma(\varepsilon)$, na rys. 5c sekwencyjny proces pęknięcia w postaci czterech obrazów o narastającej liczbie uszkodzeń (uszkodzenia zaznaczono jako wyraźne czarne punkty), a na rys. 5d pole wektorów przemieszczeń elementów próbki. Widać, że przebiegi impulsów są podobne do przebiegów tych impulsów w doświadczeniach z rzeczywistym prętem Hopkinsona [2]. Interesujący jest proces zniszczenia. Postępuje on od brzegów próbki ku jej środkowi z wyraźną jego lokalizacją na liniach nieciągłości prędkości, tak jak w próbkach statycznych.

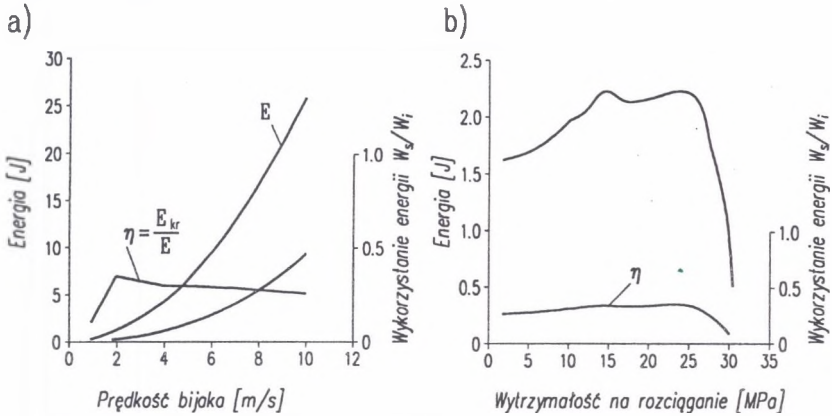
Energia kruszenia próbki E_k obliczana jako różnica między energią impulsu wejściowego E a sumą energii impulsu przechodzącego E_t i odbitego E_r . $E_{kr}=E-(E_t+E_r)$ wzrasta ze wzrostem prędkości uderzenia v_0 , natomiast sprawność kruszenia $\eta=E_{kr}/E$ jest wyższa w przedziale prędkości niższych (rys. 6a). Wzrost wytrzymałości materiału σ_r powoduje

zwiększone zapotrzebowanie na energię kruszenia, na sprawność oddziałuje on w małym stopniu (rys. 6b).



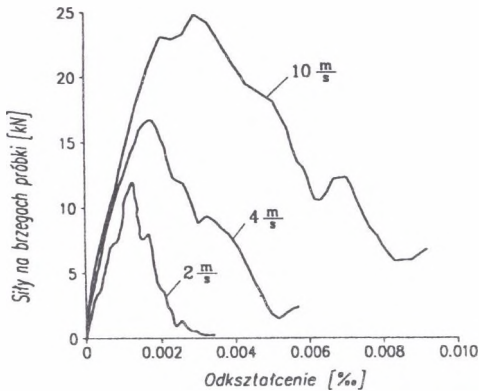
Rys. 5. Przykład badań numerycznych $v_0=5$ m/s, $\sigma_r=10$ MPa, $\mu=0.3$, $S_d/S_t=8$: a) przebiegi impulsów w pręcie, b) przebiegi funkcji naprężeń i odkształceń w próbce, c) proces pęknięcia próbki, d) pole przemieszczeń próbki

Fig. 5. Example of numerical tests $v_0=5$ m/s, $\sigma_r=10$ MPa, $\mu=0.3$, $S_d/S_t=8$: a) Impulse courses in the bar, b) courses of stress and strain functions within the bar, c) test piece fracture process, d) test piece displacement field



Rys. 6. Energia kruszenia i sprawność kruszenia w funkcji prędkości bijaka i wytrzymałości na rozciąganie
 Fig. 6. Crushing energy and crushing efficiency versus beater velocity and tension strength

Na zakończenie pokazemy jeszcze przebieg sił P_1 i P_2 na brzegach próbki. Otóż siły te rosną wraz ze wzrostem prędkości v_0 ; obserwujemy jednocześnie zwiększanie się odkształceń próbki przy zwiększających się wytrzymałościach granicznych. Jest to widoczne na rys. 7.



Rys. 7. Siły na brzegach próbki w funkcji odkształcenia przy zmiennej prędkości v_0 .
 Fig. 7. Forces on test piece edges versus displacement with variable speed v_0 .

LITERATURA

1. Cundall P.A., Strack O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 1, 1979.
2. Zawada J., Supel J. i in.: *Badania skał w warunkach obciążeń dynamicznych i niskocyklowych*, Politechnika Warszawska, Instytut Maszyn Roboczych Ciężkich, 1986.

Recenzent: Dr hab. inż. Krystian Kalinowski, prof. Pol. Śl.

Abstract

The paper presents the assumptions and fundamental relations of one of the less known techniques, i.e. the numerical contact element method. Application of the method in the mechanics of grinding processes should lead to valuable results since this method allows for analysing the grinding process from the beginning of its initiation, through the intermediate phases up to the limit state and post-critical phase.

As an example of modelling with this method a numerical model of the modified split Hopkinson bar was provided. Thorough numerical simulations with different parameters, such as beater velocity, test piece tension strength and brittleness, etc. were performed. Computations were performed using the computer program BAR87. Obtained results (forms of elastic waves impulses, courses of material functions, fracture process representations, vector field for a test piece elements, crushing energy, crushing forces, etc.) in terms of quality do not vary from the results obtained using the real Hopkinson bar.