

Katarzyna ADRIANOWICZ, Zbigniew RUDNICKI

## PRZYDATNOŚĆ GENERATORÓW LICZB PSEUDOLOSOWYCH DO ANALIZY PRZEPŁYWU CIEPŁA METODĄ MONTE CARLO

**Streszczenie.** Trzy generatory liczb pseudolosowych: Randu, Urand1 i Urand2, zostały poddane statystycznym testom zgodności rozkładu oraz testom wykorzystującym zadania kontrolne, w celu wybrania generatora najlepiej nadającego się do analizy przepływu ciepła metodą Monte Carlo. Na podstawie otrzymanych wyników za najbardziej przydatny uznano generator Urand2.

## USEFULNESS OF RANDOM NUMBER GENERATORS FOR THE ANALYSIS OF HEAT TRANSFER PROBLEMS USING THE MONTE CARLO METHOD

**Summary.** Three random number generators: Randu, Urand1, Urand2 were subject to statistical tests of goodness of fit as well as to tests that made use of control research. The aim of these tests was to select the generator which is most suitable for the heat transfer analysis using the Monte Carlo method. The results achieved showed that the most useful generator is Urand2.

## 1. Wstęp

Celem niniejszej pracy było przetestowanie wybranych generatorów liczb pseudolosowych (RANDU, URAND1, URAND2) przy rozwiązywaniu zagadnień z przepływu ciepła metodą Monte Carlo. Metoda ta – używana do przybliżonego rozwiązywania różnych zagadnień występujących w matematyce, fizyce i technice, polega na konstruowaniu dla każdego zadania odpowiedniego modelu probabilistycznego, którego parametry stanowią poszukiwane rozwiązanie zagadnienia. Przybliżoną wartość szukanej zmiennej otrzymuje się na podstawie statystycznego opracowania wyników wielokrotnych prób losowych, sprowadzających się w praktyce do obliczeń przeprowadzanych z wykorzystaniem liczb losowych pochodzących z odpowiednich generatorów. Dokładność rozwiązania zadania zależy w dużym stopniu od ilości przeprowadzonych prób oraz od jakości użytego generatora liczb pseudolosowych. W przypadku zastosowania metody Monte Carlo do zagadnień z przepływu ciepła przez przewodzenie i promieniowanie wygodne jest użycie generatora o rozkładzie równomiernym na przedziale  $(0, 1)$ .

W pracy przeprowadzono testy zgodności rozkładu weryfikujące hipotezę, że badana próbka losowa pochodzi z populacji o rozkładzie równomiernym oraz testy wykorzystujące zadania kontrolne, polegające na rozwiązywaniu określonych problemów metodą Monte Carlo przy zastosowaniu liczb pseudolosowych pochodzących z weryfikowanych generatorów i porównaniu otrzymanych wyników z wynikami uzyskanymi za pomocą dokładnych metod analitycznych.

Procedury wszystkich przeprowadzonych testów zostały napisane przy użyciu programu Microsoft FORTRAN, wersja 5.1. Programy testujące zgodność rozkładu generatorów z rozkładem równomiernym na przedziale  $(0, 1)$  zostały napisane zgodnie z opisem testów przedstawionym w pracy [1].



Każdy ciąg  $(x_n)$  liczb pseudolosowych otrzymanych z generatora jest ciągiem okresowym, tzn.:

$$\exists_{M,K \in \mathbb{N}} \quad \forall_{i \geq M} \quad x_i = x_{i+jK}, j = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Oznaczmy przez  $\nu$  najmniejszą liczbę  $M$  o podanej wyżej własności. Odcinek  $x_0, x_1, \dots, x_{\nu+K-1}$  nazywamy **odcinkiem aperiodyczności** ciągu  $(x_n)$ . Liczbę  $K$  nazywamy **okresem** tego ciągu. Pojęcie okresu i odcinka aperiodyczności można zilustrować w następujący sposób:

$$\underbrace{x_0, x_1, x_2, \dots, x_\nu, \overbrace{x_{\nu+1}, \dots, x_{\nu+K-1}}, x_{\nu+K}}_{\text{odcinek aperiodyczności}} \quad \text{okres ciągu} \quad (4)$$

Okres generatora RANDU wynosi 29180 dla dowolnej wartości parametru wejściowego  $IX$ . Natomiast odcinki aperiodyczności ciągów liczb losowych otrzymanych z generatora dla różnych wartości parametru wejściowego  $IX$  są różne.

Na przykład dla  $IX=101$  odcinek aperiodyczności wynosi 60641,

$IX=102$	60403,
$IX=123$	44623,
$IX=254$	33203,
$IX=371$	41261,
$IX=599$	29770,
$IX=777$	36660,
$IX=1234$	36076,
$IX=5978$	47441,
$IX=10000$	29495.

## 2.2. Urand1

Urand1<sup>2</sup> to generator liniowy, mieszany, który przy zadanym parametrze wejściowym  $ir$  generuje żadaną ilość ( $N$ ) liczb pseudolosowych z przedziału  $(0, 1)$ . Kolejne liczby pseudolosowe  $x_i$  obliczane są ze wzorów:

$$\forall_{i \geq 0} \quad x_i = \frac{r_i}{M} \quad (5)$$

$$\forall_{i \geq 1} \quad r_i = \lambda r_{i-1} + \mu \pmod{M} \quad (6)$$

- $r_0 = ir$  – parametr wejściowy zadawany przy pierwszym odwołaniu się do generatora, może to być dowolna liczba naturalna mniejsza od  $M$ .
- $\lambda, \mu, M$  – dane liczby:  $\lambda = 1229, \mu = 351750, M = 1664501$ .

Okres tego generatora jest równy  $M$ . Brak odcinka aperiodyczności.

## 2.3. Urand2

Urand2 jest generatorem liniowym, moltiplikatywnym. Tak jak Urand1, przy zadanej wejściowej liczbie  $ir$  generuje  $N$  liczb losowych z przedziału  $(0, 1)$ . Kolejne liczby losowe  $x_i$  otrzymywane są następująco:

$$\forall_{i \geq 0} \quad x_i = \frac{r_i}{M} \quad (7)$$

$$\forall_{i \geq 1} \quad r_i = \lambda r_{i-1} \pmod{M} \quad (8)$$

- $r_0 = ir$  – parametr wejściowy, dowolna, **nieparzysta** liczba naturalna.
- $\lambda, M$  – dane liczby:  $\lambda = 48828125, M = 2^{31}$ .

Okres tego generatora wynosi  $2^{29}$ . Brak odcinka aperiodyczności.

---

<sup>2</sup>Generatory Urand1 i Urand2 pochodzą z [5].

### 3. Testy

Testowanie hipotezy prostej  $H$  (jednoznacznie określającej rozkład populacji) może być przeprowadzane w kilku etapach. Najpierw wybieramy statystykę  $u_n$ , czyli pewną funkcję  $n$  zmiennych. Statystyka  $u_n$  wyznaczana jest tak, aby znany był rozkład zmiennej losowej  $u_n(X_1, \dots, X_n)$ , gdzie  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  jest daną próbką. Ponadto dobieramy pewną liczbę  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) zwaną poziomem istotności testu. Następnie dla wybranego  $\alpha$  i statystyki  $u_n$  wyznacza się tzw. zbiór krytyczny. Zbiorem krytycznym nazywa się taki zbiór wartości przyjętej statystyki, że jeżeli wartość statystyki wyznaczona za pomocą próbki należy do zbioru krytycznego, to odrzuca się hipotezę  $H$ . Poziom istotności  $\alpha$  jest równy prawdopodobieństwu tego, że wartość statystyki należąc będzie do obszaru krytycznego. Zwykle poziom istotności wybiera się równy 5%, 1% lub 0,1%. Przyjęcie  $\alpha = 1\%$  oznacza w praktyce, że przy wielokrotnym stosowaniu tego samego testu hipoteza zostanie odrzucona przeciętnie raz na sto przypadków, mimo że jest ona prawdziwa.

Na badanych generatorach zostały przeprowadzone przedstawione niżej testy.

#### 3.1. Testy zgodności rozkładu

##### 3.1.1. Test średniej

Jeśli próbka liczb  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  pochodzi z populacji o rozkładzie równomiernym na  $(0, 1)$ , to średnia z próbki:

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (9)$$

ma wartość oczekiwaną  $E\bar{X}_N = \frac{1}{2}$ . Procedura testowania hipotezy  $H: (E\bar{X}_N = \frac{1}{2})$  polega na obliczeniu prawdopodobieństwa:  $P\{\bar{X}_N \leq \bar{x}_N\}$ ,



gdzie  $\bar{x}_N$  jest zaobserwowaną wartością zmiennej losowej  $\bar{X}_N$  (czyli obliczoną średnią z wylosowanej próbki) i porównaniu go z założonym poziomem istotności testu  $-\alpha$ . Jeżeli prawdopodobieństwo jest mniejsze od  $\frac{\alpha}{2}$  albo większe od  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ , hipotezę **H** odrzucamy.

Prawdopodobieństwo  $P\{\bar{X}_N \leq \bar{x}_N\}$  obliczymy [1] z równania:

$$P\{\bar{X}_N \leq x\} = \phi \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{12N} \right] - \frac{1}{20N} \varphi^{(3)} \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{12N} \right] \quad (10)$$

- $\phi(x)$  – dystrybuanta rozkładu normalnego standaryzowanego  $N(0, 1)$ :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{2} \quad (11)$$

- $\varphi(x)$  – gęstość rozkładu normalnego standaryzowanego  $N(0, 1)$ :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (12)$$

Test średniej przeprowadzono przy założeniu poziomu istotności  $\alpha = 0,05$  dla różnych długości ciągów (próbek) liczb losowych. Dla ciągów o długości mniejszej od 2 000 000 testowano po 1000 różnych ciągów, otrzymywanych poprzez zmianę parametru wejściowego danego generatora. Ponieważ dla większych długości ciągów czas przeprowadzania testu znacznie się wydłużał, więc zmniejszono liczbę testowanych ciągów. Wybrane wyniki przedstawiono w tabeli 1.

Porównując wyniki przeprowadzonego testu można zauważyć, że dla mniejszych długości ciągów (do około 100 000) generator Randu ma przewagę nad pozostałymi generatorami. Na przykład dla ciągów o długości 20 000 (tabela 1 – wiersz 5) na 1000 przetestowanych ciągów liczb z generatora Randu tylko 1 został zdyskwalifikowany jako nie spełniający sprawdzanej hipotezy. Natomiast na 1000 ciągów liczb z generatorów Urand1 i Urand2 zostały odrzucone odpowiednio: 50 i 53 ciągi. Założony poziom istotności 0,05 oznacza, że dla 5% spośród testowanych ciągów hipoteza może zostać

Tabela 1

## Wyniki testu średniej

Lp.	Długość ciągu	Ilość test. ciągów	Ilość ciągów dla których hipoteza $H$ została odrzucona		
	$N$		$K$	Randu	Urand1
1	500	1000	50	64	61
2	1 000	1000	62	64	54
3	5 000	1000	46	58	52
4	10 000	1000	15	57	53
5	20 000	1000	1	50	53
6	30 000	1000	9	55	48
7	40 000	1000	30	53	51
8	50 000	1000	42	57	51
9	100 000	1000	48	34	46
10	200 000	1000	48	41	48
11	500 000	1000	48	0	47
12	1 000 000	1000	48	0	44
13	2 000 000	500	16	9	24
14	5 000 000	100	6	95	4
15	10 000 000	100	6	100	3

odrzucona nawet gdy jest prawdziwa. Dla generatora Randu granica 5% zostaje przekroczona w niewielu przypadkach: dla długości ciągów: 1000, 5 000 000, 10 000 000. Najlepsze wyniki testu generator Randu osiąga, gdy testowane ciągi mają długość zbliżoną do okresu tego generatora.

Podobnie dla generatora Urand1 hipoteza odrzucana jest najrzadziej, gdy testowane ciągi mają długość około 1 600 000 (okres generatora Urand1 wynosi 1 664 501). Dla ciągów o długościach mniejszych niż 100 000 i większych niż 5 000 000 przekroczony jest poziom 5% zdyskwalifikowanych ciągów.



Generator Urand2 zaczyna mieścić się w granicy wyznaczonej przez poziom istotności począwszy od ciągów o długości 10 000 i im dłuższe są testowane ciągi, tym wyniki testu tego generatora są coraz lepsze.

### 3.1.2. Test $\chi^2$

Podzielmy odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $s$  przedziałów:  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_s = 1$ . Niech  $p_j = a_j - a_{j-1}$  dla  $j = 1, 2, \dots, s$  i niech  $n_j$  oznacza liczbę tych wyrazów w ciągu  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ , które należą do przedziału  $\langle a_{j-1}, a_j \rangle$ . Wtedy statystyka:

$$\chi_{s-1}^2 = \sum_{j=1}^s \frac{(n_j - Np_j)^2}{Np_j} \quad (13)$$

ma w przybliżeniu rozkład  $\chi^2$  o  $s-1$  stopniach swobody. Hipotezę zgodności rozkładu liczb z testowanego generatora z rozkładem równomiernym sprawdzamy porównując otrzymane doświadczalnie liczby  $(n_i)$  wyrazów ciągu „wpadających” do przedziału  $\langle a_{i-1}, a_i \rangle$  dla  $i = 1, 2, \dots, s$  z teoretycznymi liczebnościami tych przedziałów, obliczonymi dla rozkładu równomiernego. Wykonuje się to poprzez obliczenie wartości statystyki  $\chi_{s-1}^2$  i porównanie jej z wartością krytyczną  $\chi_{\alpha}^2$  statystyki  $\chi^2$  dla  $s-1$  stopni swobody i założonego poziomu istotności  $\alpha$ . Wartości  $\chi_{\alpha}^2$  można odczytać z odpowiednich tablic zamieszczonych na przykład w pracy [3].

W przeprowadzonym teście odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$  został podzielony na 30 równych przedziałów:

$$\forall_{i=1,2,\dots,30} p_i = \frac{1}{30} = p \quad (14)$$

$$\chi_{29}^2 = \sum_{j=1}^{30} \frac{(n_j - Np)^2}{Np} \quad (15)$$

Wartość  $\chi_{\alpha}^2$  zaczerpnięta z [3] dla założonego poziomu istotności  $\alpha = 0,05$  i 29 stopni swobody wynosi: 42,557.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki przeprowadzonego testu. Można zaobserwować, że dla generatora Randu im dłuższe są testowane ciągi, tym gorsze są wyniki testu. Granica 5%, wyznaczona przez założony poziom istotności, jest dla tego generatora przekraczana już dla ciągów o długości 1000. Dla ciągów dłuższych niż 100 000 hipoteza zgodności rozkładu odrzucana jest w 100% przypadków.

Tabela 2

Wyniki testu  $\chi^2$ 

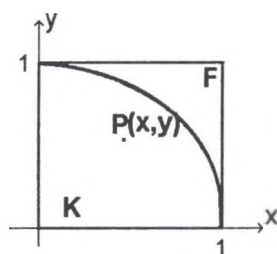
Lp.	Długość ciągu	Ilość test. ciągów	Ilość ciągów, dla których hipoteza H została odrzucona		
	$N$	$K$	Randu	Urand1	Urand2
1	500	1000	50	53	45
2	1 000	1000	51	44	64
3	5 000	1000	54	43	62
4	1 0000	1000	95	52	47
5	20 000	1000	81	51	50
6	30 000	1000	79	57	54
7	40 000	1000	312	35	50
8	50 000	1000	631	34	38
9	100 000	1000	1000	28	40
10	200 000	500	500	0	15
11	500 000	500	500	0	22
12	1 000 000	100	100	0	4
13	1 500 000	100	100	2	6
14	1 800 000	100	100	77	7
15	2 000 000	100	100	100	6
16	5 000 000	100	100	100	6
17	10 000 000	100	100	100	4

Generator Urand1, tak jak w przypadku testu średniej, dobre wyniki (w granicach 5%) uzyskuje dla ciągów o długościach większych niż 100 000, lecz nie większych niż okres tego generatora. Gdy długość ciągów przekroczy 1 700 000, wyniki testu gwałtownie się pogarszają i już od 2 000 000 hipoteza odrzucana jest w 100%.

Generator Urand2 począwszy od długości ciągów równej 50 000 ma mniej niż 5% odrzuconych ciągów. Dla ciągów o bardzo dużej długości (1 000 000 do 10 000 000) jego wyniki są wyraźnie lepsze od pozostałych.

## 3.2. Testy wykorzystujące zadania kontrolne

### 3.2.1. Test II



Rys. 1

Test ten polegał na obliczeniu przybliżenia liczby  $\pi$  metodą Monte Carlo jako pola koła o promieniu 1. Algorytm postępowania jest następujący:

1. Losowanie współrzędnych punktu  $P(x, y)$  z prostokąta  $F$ :

$$\begin{cases} x = R_1 \\ y = R_2, \end{cases} \quad (16)$$

gdzie  $R_1, R_2$  – liczby pseudolosowe pochodzące z testowanego generatora.

2. Sprawdzenie, czy punkt  $P$  należy do ćwiartki koła  $K$ , tzn. czy:  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Jako przybliżoną wartość  $\pi$  przyjmuje się stosunek liczby punktów, które „trafiły” w ćwiartkę koła ( $k$ ), do liczby wszystkich losowanych punktów ( $N$ ), pomnożony przez 4:

$$\pi \approx 4 \frac{k}{N} \quad (17)$$

Test II przeprowadzono dla różnych parametrów wejściowych generatorów (zapewnia to otrzymywanie różnych ciągów liczb pseudolosowych) oraz dla różnych ilości ( $N$ ) losowanych punktów  $P$ .

Rysunki 2, 3, 4 przedstawiają wyniki testów poszczególnych generatorów dla zmieniającej się liczby losowanych punktów:  $N \in (10\ 000; 10\ 000\ 000)$ . Poszczególne krzywe na rysunkach pokazują zależność przybliżenia liczby  $\pi$  od ilości losowanych punktów ( $N$ ), dla różnych parametrów wejściowych badanych generatorów. Grubszą linią zaznaczono „dokładną” wartość liczby  $\pi = 3,141593$ .

Dla generatora Randu (rys. 2) parametry wejściowe wynoszą:

$$IX = 101, 183, 204, 457, 645, 777, 868, 3302, 5494, 7621, 156417. \quad (18)$$

Dla generatora Urand1 (rys. 3) parametry wejściowe:

$$ir = 1, 337, 406, 661, 730, 1170, 3423, 6004, 16639, 82947. \quad (19)$$

Dla generatora Urand2 (rys. 4):

$$ir = 1, 145, 385, 691, 929, 1477, 3739, 7169, 12563, 95451. \quad (20)$$

Parametry  $IX=101$  dla generatora Randu oraz  $ir=1$  dla Urand1 i Urand2 są najmniejsze z dopuszczalnych parametrów wejściowych. Pozostałe zostały wybrane w sposób przypadkowy.

Z rys. 2 wynika, że dla generatora Randu wyniki otrzymywane z testu stosunkowo szybko się stabilizują. Dla  $N > 1\ 000\ 000$  odchylenie

standardowe wyników (przybliżenia liczby  $\pi$ ) będące miarą rozproszenia wartości próbki od wartości średniej nie przekracza wartości  $6 \cdot 10^{-5}$ , a dla  $N > 5\,400\,000$  odchylenie standardowe jest nie większe niż  $1 \cdot 10^{-5}$ .

Dla generatora Urand1 (rys. 3) stabilizacja jest słabsza. Dla  $N > 1\,000\,000$  odchylenie standardowe dochodzi do  $2 \cdot 10^{-4}$ , a dla  $N > 5\,000\,000$  wynosi od  $1,4 \cdot 10^{-5}$  –  $4,4 \cdot 10^{-5}$ .

Generator Urand2 ma jeszcze większe odchylenie standardowe: dla  $N > 1\,000\,000$  mieści się ono w granicach od  $2 \cdot 10^{-4}$  –  $9,5 \cdot 10^{-4}$ , a dla  $N > 5\,000\,000$  w granicach od  $9 \cdot 10^{-5}$  –  $2,7 \cdot 10^{-4}$ .

Wyniki testu  $\Pi$  otrzymane dla generatora Randu (rys. 2) można podzielić na dwie grupy:

**A** – dla  $IX=101, 204, 3302, 645, 15617$ , wraz ze wzrostem  $N$  wyniki dążą do wartości 3,14764. **Błąd względny** przybliżenia liczony jako:

$$\delta = \frac{|\pi - x|}{\pi} \cdot 100\%, \quad (21)$$

dla tych ciągów wynosi:

$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (0,18599 - 0,19439)\%$$

$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (0,19235 - 0,19265)\%$$

**B** – dla  $IX=183, 457, 868, 777, 5494, 7621$  wyniki dążą do „dokładnej” wartości  $\pi$ , a błąd względny przybliżenia wynosi:

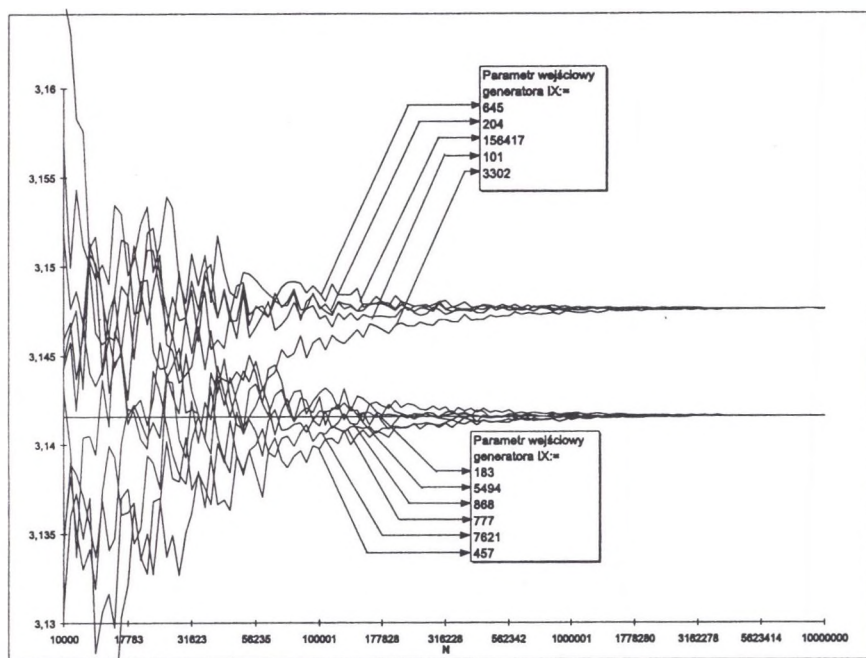
$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (0,000796 - 0,006653)\%$$

$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (0,00019 - 0,00073)\%.$$

Dla generatora Urand1 (rys. 3) błąd względny przybliżenia wynosi:

$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (0,00455 - 0,17173)\%$$

$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (0,025942 - 0,158359)\%.$$



Rys. 2

Dla generatora Urand2 (rys. 4):

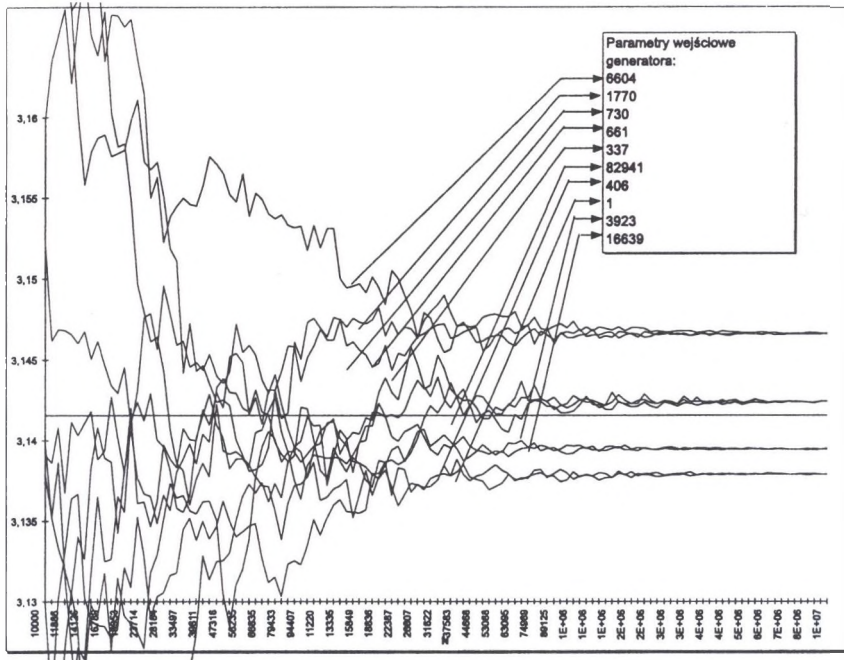
$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (0,00334 - 0,09813)\%$$

$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (0,000637 - 0,032054)\%.$$

### 3.2.2. Testy stosunków konfiguracji

Poniższe testy polegały na obliczaniu metodą Monte Carlo stosunków konfiguracji pomiędzy różnie usytuowanymi powierzchniami. Do rozważań zostały wybrane takie sytuacje, w których można podać równania algebraiczne pozwalające na dokładne obliczenie stosunków konfiguracji. Przybliżone wyniki otrzymane metodą Monte Carlo porównano z wynikami teoretycznymi.





Rys. 3

Przyjęto, że płaskie, izotermiczne oraz czarne powierzchnie umieszczone są w ośrodku przezroczystym. Zakłada się też, że spełnione jest prawo Lamberta.

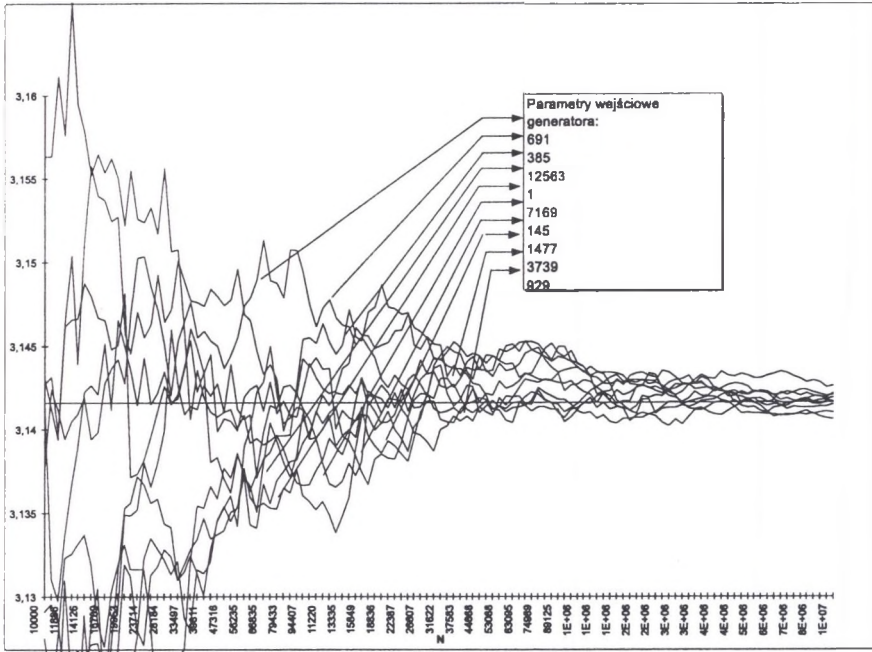
Stosunek konfiguracji  $\varphi_{ik}$  określa, jaka część emisji promieniowania  $i$ -tej powierzchni dociera bezpośrednio (bez odbić) do powierzchni  $k$ -tej:

$$\varphi_{ik} = \frac{\dot{E}_{ik}}{\dot{E}_i} \quad (22)$$

- $\dot{E}_{ik}$  – emisja powierzchni  $F_i$  docierająca do powierzchni  $F_k$ ,
- $\dot{E}_i$  – całkowita emisja powierzchni  $F_i$ .

Stosunek konfiguracji  $\varphi_{ik}$  określony jest [6] równaniem:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{\pi F_i} \int_{F_k} \int_{F_i} \frac{\cos \beta_k \cos \beta_i}{r^2} dF_k dF_i \quad (23)$$

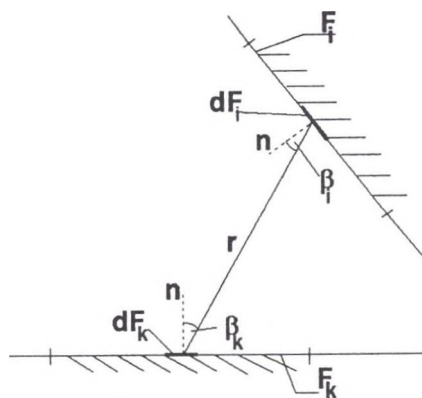


Rys. 4

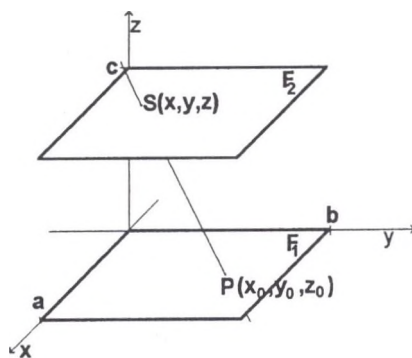
Obliczanie stosunku konfiguracji metodą Monte Carlo polega na śledzeniu skończonej liczby elementarnych porcji energii wysyłanych z losowo wybranego punktu powierzchni  $F_i$  i obliczaniu ilości porcji, które dotarły do powierzchni  $F_k$ . Stosunek  $N_{ik}$  – liczby porcji, które dotarły do  $F_k$ , do  $N$  – liczby wszystkich wysyłanych porcji, przyjmowany jest za przybliżoną wartość szukanego stosunku konfiguracji:

$$\varphi_{ik} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{ik}}{N} \approx \left( \frac{N_{ik}}{N} \right) \quad N \text{ skończone} \quad (24)$$

**Stosunek konfiguracji pomiędzy prostokątami równoległymi.** Postępowanie zmierzające do obliczenia stosunku konfiguracji pomiędzy równoległymi prostokątami o tych samych wymiarach metodą Monte Carlo można podzielić na trzy etapy:



Rys. 5



Rys. 6

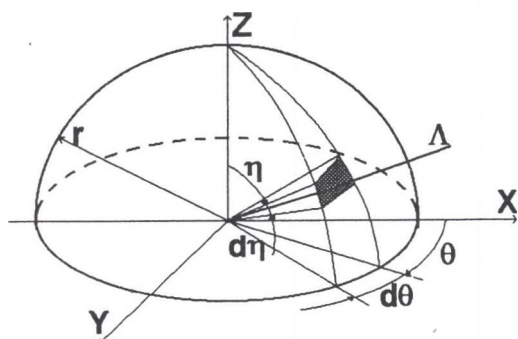
1. Losowanie współrzędnych punktu emisji  $P(x_0, y_0, z_0)$ .

Emisja energii odbywa się z elementu izotermicznego, wobec tego prawdopodobieństwo emisji jest jednakowe dla wszystkich punktów leżących wewnątrz prostokąta  $F_1$ . Współrzędne punktu  $P(x_0, y_0, z_0)$  wyznacza się następująco:

$$\begin{cases} x_0 = aR_1 \\ y_0 = bR_2 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

- $a, b$  – wymiary prostokątów,
- $c$  – odległość między prostokątami,
- $R_1, R_2$  – liczby pseudolosowe otrzymane z generatora.

2. Losowanie kierunku poruszania się porcji energii.



Rys. 7

Kierunek  $\Lambda$  poruszania się porcji energii określony jest przez kąty  $\eta$  i  $\theta$ . W celu ich wyznaczenia należy dwukrotnie odwołać się do generatora liczb pseudolosowych ( $R_3, R_4$ ) i skorzystać z zależności:

$$\begin{cases} \eta = \arcsin(\sqrt{R_3}) \\ \theta = 2\pi R_4 \end{cases} \quad (26)$$

Wyprowadzenie powyższych wzorów można znaleźć między innymi w [6].

Przy danych kątach  $\eta$  i  $\theta$  kierunek  $\Lambda$  wyznacza prostą  $k$  przechodzącą przez dany punkt  $P$  należący do  $F_1$ . Równanie parametryczne prostej  $k$ :

$$k : \begin{cases} x = x_0 + t \sin \eta \cos \theta \\ y = y_0 + t \sin \eta \sin \theta \\ z = z_0 + t \cos \eta \end{cases} \quad (27)$$

3. Sprawdzanie, czy śledzona porcja energii „trafi” w prostokąt  $F_2$ .

Korzystając ze wzorów (25) i (27) możemy obliczyć współrzędne punktu  $S(x_1, y_1, z_1)$  będącego punktem przebicia płaszczyzny  $z = c$  (zawierającej prostokąt  $F_2$ ), prostą  $k$ .

Ponieważ:

$$c = z_1 = t \cos \eta \quad \Rightarrow \quad t = \frac{c}{\cos \eta} \quad (28)$$

więc:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{c \sin \eta \cos \theta}{\cos \eta} \\ y_1 = y_0 + \frac{c \sin \eta \sin \theta}{\cos \eta} \\ z_1 = c \end{cases} \quad (29)$$

Jeżeli:

$$0 < x_1 < a \quad \text{ i } \quad 0 < y_1 < b, \quad (30)$$

to punkt  $S(x_1, y_1, z_1)$  należy do  $F_2$ .

Zliczając ilość porcji, które docierają do  $F_2$ , można obliczyć stosunek konfiguracji pomiędzy  $F_1$  i  $F_2$ :

$$\varphi_{12} = \frac{N_{12}}{N} \quad (31)$$

- $N_{12}$  – ilość porcji, które dotarły do  $F_2$ ,
- $N$  – ilość wszystkich śledzonych porcji.

Stosunek konfiguracji  $\varphi_{12}$  można obliczyć [6] za pomocą dokładnego wzoru:

$$\begin{aligned} \varphi_{12} = \frac{2}{\pi T Y} \left\{ \ln \left[ \frac{(1+T^2)(1+Y^2)}{1+T^2+Y^2} \right]^{\frac{1}{2}} + Y \sqrt{1+T^2} \arctan \left( \frac{Y}{\sqrt{1+T^2}} \right) + \right. \\ \left. + T \sqrt{1+Y^2} \arctan \left( \frac{T}{\sqrt{1+Y^2}} \right) - Y \arctan Y - T \arctan T \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

gdzie  $T = \frac{a}{c}$ ,  $Y = \frac{b}{c}$ .

Poniżej przedstawiono wyniki testu stosunku konfiguracji pomiędzy prostokątami równoległymi dla prostokątów o wymiarach:  $a = 200$ ,  $b = 50$  i odległości między nimi  $c = 100$ . Podobnie jak w przypadku testu  $\Pi$ , w przeprowadzonych testach ilość ( $N$ ) śledzonych porcji energii zmienia się:  $N \in (10^4; 10^7)$ . Testy zostały przeprowadzone dla parametrów wejściowych generatorów takich samych jak w teście  $\Pi$  (18), (19), (20).

Rysunki 8, 9, 10 przedstawiają wyniki testu dla odpowiednich generatorów. Dla generatora Randu (rys. 8) wyniki można pogrupować podobnie jak w teście  $\Pi$ :

**A** – dla  $IX=183, 457, 868, 777, 5494, 7621$ , z błędem względnym:

$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (1,37061 - 3,25518)\%$$

$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (1,37915 - 3,26268)\%.$$

**B** – dla  $IX=101, 204, 645, 3302, 156417$  ma błąd względny:

$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (0,180191 - 0,378171)\%$$

$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (0,19562 - 3,64376)\%.$$

Urand1 (rys. 9) ma błąd względny:

$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (0,00532 - 0,44945)\%$$

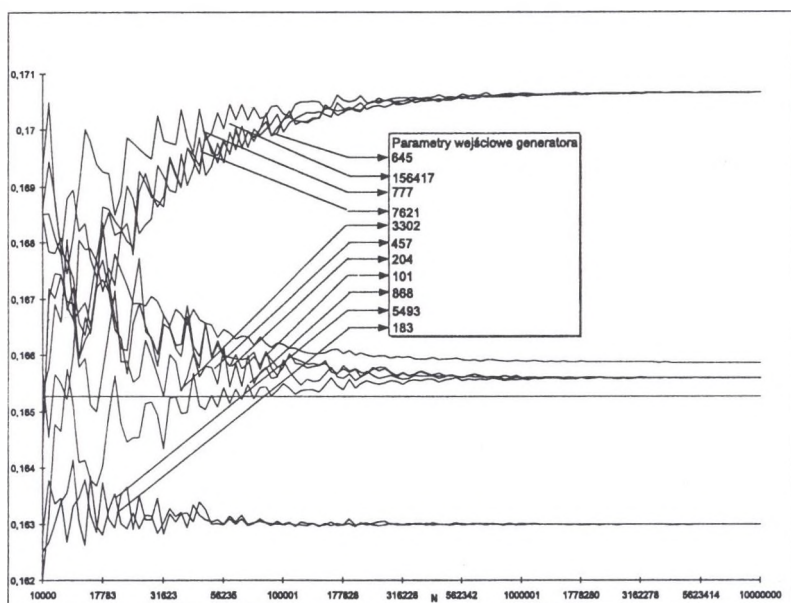
$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (0,060689 - 0,411753)\%.$$

Dla Urand2 (rys. 10) błąd względny wynosi:

$$\text{dla } N = 10^6 \quad \delta \in (0,03679 - 0,35264)\%$$

$$\text{dla } N = 10^7 \quad \delta \in (0,001997 - 0,163249)\%.$$



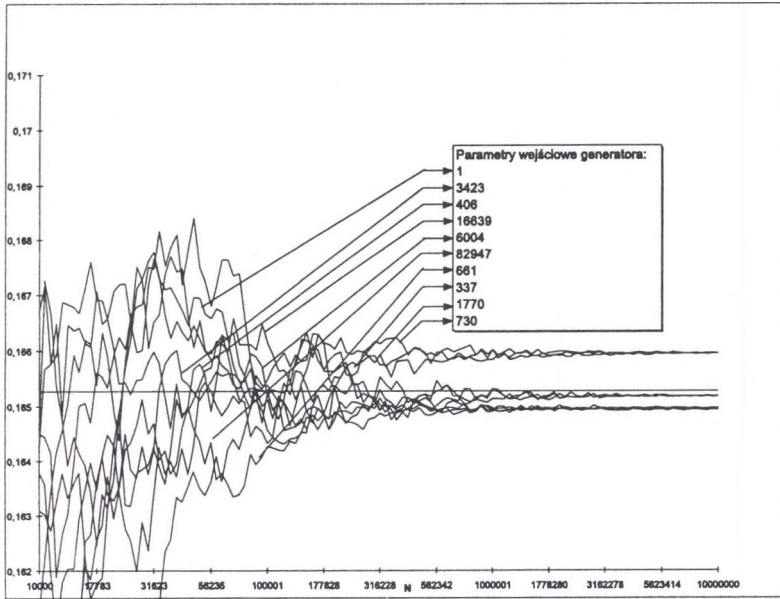


Rys. 8

## 4. Wnioski

Spośród trzech testowanych generatorów: Randu, Urand1 i Urand2 zdecydowano wybrać Urand2 jako najbardziej przydatny do rozwiązywania bardziej skomplikowanych zagadnień z przepływu ciepła.

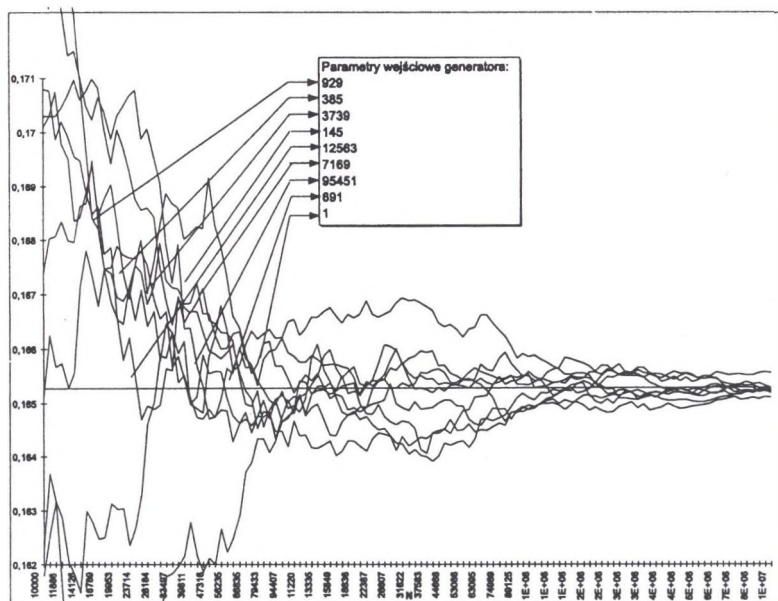
W teście średniej hipoteza, że wartość oczekiwana próbki jest równa  $\frac{1}{2}$ , była najrzadziej odrzucana dla generatora Randu. Jednak hipoteza zgodności rozkładu liczb pseudolosowych z rozkładem równomiernym na  $(0, 1)$ , testowana w teście  $\chi^2$ , była dla ciągów z tego generatora o długości  $N \geq 100\ 000$  odrzucana w 100%. Zarówno w teście II, jak i w teście stosunków konfiguracji, wyniki obliczeń przeprowadzonych przy użyciu liczb pseudolosowych z generatora Randu w sposób istotny zależą od wartości parametru wejściowego  $IX$  generatora. Dla niektórych wartości parametru  $IX$  rozwiązanie przybliżone, przy rosnącym  $N$  (liczbie śledzonych punktów



Rys. 9

lub porcji), stabilizuje się na wartości różnej od rozwiązania dokładnego (rys. 2. i rys. 8.). Nie zaobserwowano żadnych zależności, które pozwoliłyby z góry przewidzieć, czy dla określonego parametru wejściowego  $IX$  generatora Randu rozwiązanie przybliżone będzie zbieżne do wartości dokładnej. Również dla generatora Urand1, na podstawie testów wykorzystujących zadania kontrolne stwierdzono, że (rys. 3 i rys. 9) rozwiązania przybliżone ustalają się na wartościach różnych od obliczonych dokładnych rozwiązań.

Generator Urand2 ma wprawdzie większe odchylenie standardowe wyników (w zadaniach kontrolnych) niż pozostałe generatory, jednak widać wyraźnie (rys. 4 i rys. 10), że wraz ze wzrostem liczby śledzonych porcji (lub losowanych punktów) rozwiązania przybliżone coraz bardziej zbliżają się do wyniku dokładnego. Błąd względny liczony dla  $N > 10^6$  jest dla generatora Urand2 we wszystkich zadaniach kontrolnych mniejszy niż dla pozostałych generatorów.



Rys. 10

Testy wykorzystujące zadania kontrolne zostały przeprowadzone także dla  $N \in (10^7; 3 \cdot 10^7)$  i uzyskane wyniki w pełni potwierdzają powyższe wnioski.

## Literatura

1. R. Zieliński, *Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych*, WNT, Warszawa 1972.
2. W. Łukaszek, *Podstawy statystycznego opracowania pomiarów*, Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1995.
3. W. Oktaba, *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, PWN, Warszawa 1974.

4. S. Brandt, *Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych*, PWN, Warszawa 1974.
5. T. Watanabe, M. Natori, T. Oguni, *Mathematical Software for the P.C. and Work Stations. A collection of Fortran 77 Programs*, Elsevier, Amsterdam 1994.
6. Z. Rudnicki, *Radiacyjny przepływ ciepła w piecach przemysłowych*, Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1992.
7. Praca zbiorowa pod redakcją J. Szarguta, *Modelowanie numeryczne pól temperatury*, WNT, Warszawa 1992.
8. *System 360 Scientific Subroutine Package (360A-CM-03X) Version III. Programmer's Manual IBM*, Tech. Publ. Department, New York 1971.

Katarzyna Adrianowicz  
Instytut Matematyki  
Politechnika Śląska  
ul. Kaszubska 23  
44-100 Gliwice  
e-mail: [adrianka@zeus.polsl.gliwice.pl](mailto:adrianka@zeus.polsl.gliwice.pl)

Zbigniew Rudnicki  
Instytut Techniki Ciepłej  
Politechnika Śląska  
ul. Konarskiego 22  
44-100 Gliwice  
e-mail: [rudnicki@itc.ise.polsl.gliwice.pl](mailto:rudnicki@itc.ise.polsl.gliwice.pl)

## Abstract

The article presents the description as well as the results of a number of statistical tests carried out on three random number generators: Randu, Urand1, Urand2. The aim of the tests was to assess the usefulness of the generators in the analysis of heat transfer problems using the Monte Carlo method. The tests applied were used to check the hypothesis claiming that the random sample examined belongs to the population of uniform distribution in the interval  $(0, 1)$ . The control research tests consist in solving particular problems using the Monte Carlo method, where the random numbers from the generators examined are used, and in the comparison of the results achieved from the mathematical equations. The following tests were applied: the mean value test of goodness of fit to check the hypothesis claiming that the sample from the generator tested has the expected value of  $\frac{1}{2}$  as well as the  $\chi^2$  - Pearson's test which measures the uniformity of generated numbers distribution in the interval of  $(0, 1)$ . In the control tasks the estimate value of  $\pi$  and the configuration ratio between two parallel rectangles with one common edge and the angle of inclination  $\alpha$  were calculated.

The results achieved allowed to choose Urand2 generator as the most suitable for solving the heat transfer problems using the Monte Carlo method.