ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 84 Nr kol. 1411

Mikołaj BRATIYCHUK, Barbara BOROWSKA

DŁUGOŚĆ KOLEJKI W SYSTEMIE $E/G/1/N$

Streszczenie. Rozpatrywany jest system obsługi $E/G/1/N$ z ograniczaną kolejką. Nas interesują dokładne wzory dla rozkładu długości kolejki w okresie nasilenia oraz w każdej chwili czasu. Podany został także stacjonarny rozkład długości kolejki.

QUEUE LENGTH IN THE SYSTEM $E/G/1/N$

Summary. The paper deals with the system $E/G/1/N$ with the limited queue. We are interested in the explicite formulae for the distribution of the number of the customers in the system on the busy period and at any moment of time. The stationary distribution of the queue length is stated as well.

1. System $E/G/1/N$. Równanie podstawowe

Niech będzie dany system obsługi typu $E/G/1/N$. To znaczy, że zgłoszenia wpływają zgodnie ze strumieniem Poissona z parametrem λ. Czas obsługi ma rozkład $F(x)$, a dyscyplina obsługi następująca: pierwsze zgłoszenie jako pierwsze obsługiwane. Nie obsłużone zgłoszenia tworzą kolejkę,

która nie przekracza $N-1$ i jeśli kolejne zgłoszenie wpłynęło w chwili gdy $N-1$ zgłoszeń czeka w kolejce, to ono zostanie nie obsłużone, albo inaczej – stracone. Do obsługi mamy jedno miejsce, obsłużone zgłoszenie opuszcza system i zaczyna się niezwłocznie obsługa kolejnego zgłoszenia. Nas będą interesowały następujące charakterystyki takich systemów: rozkład długości kolejki w okresie nasilenia i w dowolnej chwili t, okres nasilenia systemu oraz średnia długość okresu nasilenia. Takie funkcjonały są dobrze zbadane dla $N=\infty$, tzn. kiedy kolejka jest nieograniczona. Sytuacja, gdy $N<\infty$ jest bardziej skomplikowana, ponieważ wtedy mamy do czynienia z zagadnieniami na przedziale z warunkami brzegowymi na obu końcach.

Niech $\xi(t)$ oznacza ilość zgłoszeń w systemie w chwili t, a $\nu(t)$ będzie odległością od t do pierwszej chwili, kiedy kolejne zgłoszenie zostanie obsłużone. Jeśli t pokrywa się z zakończeniem obsługi zgłoszenia, to uważamy, że $\nu(t)=0$.

Na początku pracy system może zawierać $2 \leqslant n \leqslant N$ zgłoszeń. W sytuacji, kiedy system zaczyna pracować w chwili wpływu pierwszego zgłoszenia, będziemy mówili, że mamy do czynienia ze standardowym systemem.

Niech $\tau = \inf\{t : \xi(t)=0\}$ będzie okresem nasilenia danego systemu obsługi.

Oznaczmy dla $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(n,k,t,x) &= \mathbf{P}\{\xi(t)=k, t<\tau/\xi(0)=n, \nu(0)=x\},\ 0<n\leqslant N,\ x>0,\\
\varphi_2(n,k,t) &= \mathbf{P}\{\xi(t)=k, t<\tau/\xi(0)=n, \nu(0)=0\},\ n\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Zdarzenie $\{\xi(0)=n, \nu(0)=0\}$ oznacza, że system zaczyna pracować w chwili $t=0$ z n zgłoszeniami, a pierwsze zgłoszenie wyjdzie z systemu po czasie o rozkładzie $F(\cdot)$.

Zdarzenie $\{\xi(0)=n, \nu(0)=x\}$, dla $x>0$ oznacza to samo z różnicą, że zakładamy, że pierwsze zgłoszenie wyjdzie z systemu po czasie x.

Dla $\varphi_1(n,k,t,x)$, gdzie $0<n\leqslant N$ mamy:

$$\varphi_1(n,k,t,x) = I\{t<x\}\varphi_1(n,k,t,x) + I\{t\geqslant x\}\varphi_1(n,k,t,x).$$

Ponieważ strumień wejściowy jest Poissona, to po czasie x do systemu wpłynie $\eta(x)$ zgłoszeń i $\mathbf{P}\{\eta(x)=k\}=\exp(-\lambda x)(\lambda x)^k/k!$ dla $k=0,1,\ldots$. Więc mamy:

$$\varphi_1(n,k,t,x)=I\{t>x\}e^{-\lambda x}\Big\{\sum_{i=0}^{N-n-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\varphi_2(n+i-1,k,t-x)+$$

$$+\sum_{i=N-n}^{\infty}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\varphi_2(N-1,k,t-x)\Big\}+I\{t<x,n\leqslant k<N\}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!}+$$

$$+I\{t<x,k=N\}e^{-\lambda t}\sum_{i=N-n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}. \tag{1}$$

Analogicznie dla $0<n<N$ mamy:

$$\varphi_2(n,k,t)=$$

$$=\lambda\int_0^t e^{-\lambda u}\int_u^{+\infty}\mathbf{P}\{\xi(t-u)=k,t-u<\tau/\xi(0)=n+1,\nu(0)=v-u\}dF(v)du+$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda v}\mathbf{P}\{\xi(t-v)=k,t-v<\tau\xi(0)=n-1,\nu(0)=0\}dF(v)+$$

$$+I\{k=n\}e^{-\lambda t}(1-F(t))=\lambda\int_0^t e^{-\lambda u}\int_u^{+\infty}\varphi_1(n+1,k,t-u,v-u)dF(v)du+$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda v}\varphi_2(n-1,k,t-v)dF(v)+I\{k=n\}e^{-\lambda t}(1-F(t)), \tag{2}$$

z warunkiem brzegowym:

$$\varphi_2(0,k,t)=0,\qquad t\geqslant 0 \tag{3}$$

i

$$\varphi_2(N,k,t)=\int_0^t\mathbf{P}\{\xi(t-v)=k,t-v<\tau/\xi(0)=N-1,\nu(0)=0\})dF(v)+$$

$$+ I\{k = N\}(1 - F(t)). \tag{4}$$

Dla Re $s > 0$ oznaczmy:

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}_1(n, s, x) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-st}\varphi_1(n, k, t, x)dt, \\ \widehat{\varphi}_2(n, s) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-st}\varphi_2(n, k, t)dt. \end{cases}$$

Mamy:

$$\widehat{\varphi}_1(n, s, x) = e^{-(s+\lambda)x} \sum_{i=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\widehat{\varphi}_2(n + i - 1, s) +$$

$$+ e^{-(s+\lambda)x} \sum_{i=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\widehat{\varphi}_2(N - 1, s) +$$

$$+ I\{n \leqslant k < N\}\frac{e^{-(s+\lambda)x}\lambda^{k-n}}{(s + \lambda)^{k-n+1}} \sum_{i=k-n+1}^{\infty} \frac{\big((s + \lambda)x\big)^i}{i!} +$$

$$+ I\{k = N\}\frac{e^{-(s+\lambda)x}}{s} \sum_{i=N-n+1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\Big\{\Big(\frac{s + \lambda}{\lambda}\Big)^{i-N+n} - 1\Big\}, \tag{5}$$

a

$$\widehat{\varphi}_2(n, s) - \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\lambda+s)u} \int\limits_0^{+\infty} \widehat{\varphi}_1(n+1, s, v-u)dF(v)du - f(\lambda+s)\widehat{\varphi}_2(n-1, s) =$$

$$= \frac{I\{k = n\}(1-f(\lambda+s))}{\lambda + s}, \tag{6}$$

gdzie $f(s) = \int_0^\infty \exp(-sx)dF(x)$. Niech:

$$\begin{aligned} \psi_1(n, x) &\stackrel{def}{=} e^{sx}\widehat{\varphi}_1(n, s, x), \qquad x \geqslant 0, \\ \psi_2(n) &\stackrel{def}{=} \widehat{\varphi}_2(n, s) \end{aligned}$$

(ponieważ dalej s będzie ustalone, to dla skrótu w oznaczeniach dla ψ_i nie będzimy pisali argument s), wtedy z (3), (5), (6) wynika następujace zagadnienie brzegowe:

$$\psi_2(n)-\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u}\int_u^{+\infty} e^{-sv}\psi_1(n+1,v-u)dF(v)du-f(\lambda+s)\psi_2(n-1)=$$

$$=\frac{I\{k=n\}(1-f(s+\lambda))}{s+\lambda},\qquad 1\leqslant n\leqslant N-1, \tag{7}$$

$$\psi_2(0)=0, \tag{8}$$

gdzie:

$$\psi_1(n,x)=e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{N-n-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\psi_2(n+i-1)+e^{-\lambda x}\sum_{i=N-n}^{\infty}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\psi_2(N-1)+$$

$$+I\{n\leqslant k<N\}\frac{e^{-(s+\lambda)x}\lambda^{k-n}}{(s+\lambda)^{k-n+1}}\sum_{i=k-n+1}^{\infty}\frac{\big((s+\lambda)x\big)^i}{i!}\times$$

$$\times\frac{I\{k=N\}e^{-\lambda x}}{s}\sum_{i=N-n+1}^{\infty}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\Big\{\Big(\frac{s+\lambda}{\lambda}\Big)^{i-N+n}-1\Big\}, \tag{9}$$

a z (4) wynika:

$$\psi_2(N)=f(s)\psi_2(N-1)+I\{k=N\}\frac{1-f(s)}{s}. \tag{10}$$

2. Przedstawienie dla charakterystyk

Celem tego paragrafu jest znalezienie rozwiązania zagadnienia brzegowego (7)–(9), co pozwoli odzyskać przedstawienia dla interesujących nas cech.

Twierdzenie 2.1. *Rozwiązanie zagadnienia* (7), (8) *ma postać:*

$$\psi_2(n) = \frac{f(s) + (1 - f(s)) \sum\limits_{l=1}^{N-1-n} R_l(s)}{f(s) + (1 - f(s)) \sum\limits_{l=1}^{N-1} R_l(s)} \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k) -$$

$$- \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s,k), \qquad 1 \leqslant n \leqslant N-1, \tag{11}$$

gdzie:

$$g_n(s,k) = \frac{I\{n \leqslant k < N\}}{s+\lambda} \sum_{i=k-n}^{\infty} \Big(\frac{s+\lambda}{\lambda}\Big)^{n-k+i+1} p_i(s) +$$

$$+ \frac{I\{k = N\}}{s} \sum_{i=N-n}^{\infty} p_i(s) \Big\{ \Big(\frac{s+\lambda}{\lambda}\Big)^{i-N+n+1} - 1 \Big\}, \tag{12}$$

a wartości $p_i(s)$, $R_i(s)$ *są określone odpowiednie wzorami* (13), (20) *podanymi niżej.*

Dowód. Po podstawieniu wzoru (9) do (7) otrzymamy:

$$\psi_2(n) - \lambda \sum_{i=0}^{N-n-2} \psi_2(n+i) \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} e^{-(s+\lambda)v} \frac{\big(\lambda(v-u)\big)^i}{i!} dF(v)du - \lambda \psi_2(N-1) \times$$

$$\times \sum_{i=N-n-1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} e^{-(s+\lambda)v} \frac{\big(\lambda(v-u)\big)^i}{i!} dF(v)du - f(\lambda+s)\psi_2(n-1) = g_n^*(s,k),$$

gdzie:

$$g_n^*(s,k) = \frac{I\{n \leqslant k < N\}}{s+\lambda} \Big(\frac{\lambda}{s+\lambda}\Big)^{k-n} \times$$

$$\times \sum_{i=k-n}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda)v} \frac{\big((s+\lambda)v\big)^{i+1}}{(i+1)!} dF(v)du + \frac{I\{k=N\}}{s} \Big\{ \Big(\frac{s+\lambda}{\lambda}\Big)^{i-N+n+1} - 1 \Big\} \times$$

$$\times \sum_{i=N-n}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda)v} \frac{(\lambda v)^{i+1}}{(i+1)!} dF(v)du + \frac{I\{k=n\}(1 - f(s+\lambda))}{s+\lambda}.$$

Oznaczmy:

$$p_i(s) \stackrel{def}{=} f^{-1}(s) \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)v} \frac{(\lambda v)^{i+1}}{(i+1)!} dF(v), \qquad i \geqslant -1. \tag{13}$$

Ponieważ jak łatwo sprawdzić:

$$p_i(s) > 0, \quad \sum_{i=-1}^{\infty} p_i(s) = 1, \quad p_{-1}(s) = \frac{f(s+\lambda)}{f(s)}, \qquad s > 0,$$

to $p_i(s)$ z $s > 0$ można traktować jako prawdopodobieństwa skoków niektórego przypadkowego błądzenia $\xi_n(s)$ ciągłego z dołu, dla którego:

$$\mathbf{E} z^{\xi_n(s) - \xi_{n-1}(s)} = \frac{f(s + \lambda(1-z))}{z f(s)}, \quad 0 < |z| \leqslant 1.$$

Teraz mamy:

$$\lambda \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} e^{-(s+\lambda)v} \frac{\big(\lambda(v-u)\big)^i}{i!} dF(v) du = f(s) p_i(s) \tag{14}$$

i

$$g_n^*(s,k) = \frac{f(s) I\{n \leqslant k < N\}}{s+\lambda} \sum_{i=k-n}^{\infty} \Big(\frac{s+\lambda}{\lambda}\Big)^{n-k+i+1} p_i(s) +$$

$$+ \frac{f(s) I\{k = N\}}{s} \sum_{i=N-n}^{\infty} p_i(s) \Big\{ \Big(\frac{s+\lambda}{\lambda}\Big)^{i-N+n+1} - 1 \Big\} = f(s) g_n(s,k),$$

gdzie $g_n(s,k)$ określono w (12).

Więc mamy takie równanie:

$$\psi_2(n) - f(s) \sum_{i=0}^{N-n-2} \psi_2(n+i) p_i(s) - f(s) \psi_2(n-1) p_{-1}(s) -$$

$$- \psi_2(N-1) f(s) \sum_{i=N-n-1}^{\infty} p_i(s) = f(s) g_n(s,k). \tag{15}$$

Teraz z (8), (15) wynika takie zagadnienie brzegowe:

$$\begin{cases} \psi_2(n) - f(s)\sum\limits_{i=-1}^{\infty} \psi_2(n+i)p_i(s) = f(s)g_n(s,k), & 1 \leqslant n \leqslant N-1, \\ \psi_2(0) = 0, & \\ \psi_2(n) = \psi_2(N-1), & n \geqslant N-1. \end{cases} \tag{16}$$

Osobliwość tego zagadnienia polega na tym, że wartość $\psi_2(N-1)$ jest niewiadoma.

Przekształćmy (16) w następujący sposób:

a) $\hat{\psi}_2(n) \stackrel{def}{=} \psi_2(n) - \psi_2(N-1), \quad n = 0, 1, \ldots,$

b) $m \stackrel{def}{=} N - 1 - n,$

c) $\tilde{\psi}_2(k) \stackrel{def}{=} \hat{\psi}_2(N-1-k),$

po czym uzyskamy takie równanie:

$$f(s)\sum_{i=-1}^{\infty} \tilde{\psi}_2(k-i)p_i(s) - \tilde{\psi}_2(k) =$$

$$= \psi_2(N-1)(1-f(s)) - f(s)g_{N-1-k}(s,k), \tag{17}$$

$0 \leqslant k \leqslant N-2$, z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi}_2(k) = 0, && k \leqslant 0, \\ &\tilde{\psi}_2(N-1) = -\psi_2(N-1). \end{aligned}$$

Do rozwiązania tego zagadnienia możemy stosować metodę z [1, 2]. Niech teraz $R_k(\mu, s)$ będzie rezolwentą, która odpowiada błądzeniu $\xi_n(s)$. To znaczy, że ciąg $R_k(\mu, s)$, $k = 0, 1, \ldots$ jest jednoznacznie określony dla $\mu > 0$ za pomocą takiej równości:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k(\mu, s) = \frac{zf(s)}{f(s+\lambda(1-z)) - (1+\mu)zf(s)}, \quad |z| < z_\lambda(\mu, s), \tag{18}$$

gdzie $z_\lambda(\mu, s)$ jest jedynym rozwiązaniem równania:

$$f(s + \lambda(1 - z)) = (1 + \mu)f(s)z,$$

na odcinku $[0, 1]$.

Z (18) wynika, że $R_0(\mu, s) = 0$, $R_1(\mu, s) = f(s)/f(s + \lambda)$.

Teraz ogólne rozwiązanie równania (17) ma postać [2, s. 197]:

$$\tilde{\psi}_2(k) = C(s)R_{k+1}(u, s) - \sum_{l=0}^{k-1} R_{k-l}(u, s)g_{N-1-l}(s, k) +$$

$$+ (f^{-1}(s) - 1)\psi_2(N - 1)\sum_{l=1}^{k} R_l(u, s), \tag{19}$$

gdzie $u = f^{-1}(s) - 1$. Dla takich szczególnych μ mamy $R_l(f^{-1}(s) - 1, s) \stackrel{def}{=} R_l(s)$ i równanie (18) przybiera postać:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k(s) = \frac{zf(s)}{f(s + \lambda(1 - z)) - z}, \quad |z| < z_\lambda(s), \tag{20}$$

gdzie $z_\lambda(s)$ jest jedynym rozwiązaniem równania:

$$f(s + \lambda(1 - z)) = z, \tag{21}$$

na odcinku $[0, 1]$. Dla tego w (19) zamiast $R_k(\mu, s)$ będzimy pisać $R_k(s)$, które są określone równościami (20), (21). Więc ogólne rozwiązanie równania (17) ma postać:

$$\tilde{\psi}_2(k) = C(s)R_{k+1}(s) - \sum_{l=0}^{k-1} R_{k-l}(s)g_{N-1-l}(s, k) +$$

$$+ (f^{-1}(s) - 1)\psi_2(N - 1)\sum_{l=1}^{k} R_l(s). \tag{22}$$

Ponieważ $\tilde{\psi}_2(0) = 0$, to z (22) dla $k = 0$ dostajemy $0 = C(s)R_1(s)$, co daje $0 = C(s)$. Dlatego:

$$\tilde{\psi}_2(k) = -\sum_{l=0}^{k-1} R_{k-l}(s)g_{N-1-l}(s, k) +$$

$$+ (f^{-1}(s) - 1)\psi_2(N-1) \sum_{l=1}^{k} R_l(s). \tag{23}$$

Z tego przedstawienia dla $k = N - 1$ mamy:

$$-\psi_2(N-1) = (f^{-1}(s)-1)\psi_2(N-1) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) - \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k).$$

Skąd:

$$\psi_2(N-1) = \frac{\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k)}{1 + (f^{-1}(s) - 1) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}.$$

Mamy:

$$\psi_2(n) = \tilde{\psi}_2(N-1-n) + \psi_2(N-1) = -\sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s,k) +$$

$$+ \frac{1 + (f^{-1}(s) - 1) \sum_{l=1}^{N-1-n} R_l(s)}{1 + (f^{-1}(s) - 1) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)} \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k)$$

dla $1 \leqslant n \leqslant N-1$, co jest równoważne (11).

Zapiszemy (11) w takiej postaci:

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau > t / \xi(0) = n\} dt = -\sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s,k) +$$

$$+ \frac{f(s) + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1-n} R_l(s)}{f(s) + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)} \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k), \tag{24}$$

dla $1 \leqslant n \leqslant N-1$, a dla $n = N$ z (10) mamy:

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau > t/\xi(0) = N\}dt = \frac{f^2(s)\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)g_l(s,k)}{f(s) + (1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)} +$$

$$+ I\{k = N\}\frac{1-f(s)}{s}. \tag{25}$$

Żeby znaleźć rozkład okresu nasilenia, trzeba znaleźć $\sum_{k=1}^{N}$ w obu stronach równości (24) (albo (25)), a potem skorzystać z oczywistej tożsamości:

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\tau}/\xi(0) = n\right\} = 1 - s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\tau > t/\xi(0) = n\}dt.$$

Mamy:

$$\sum_{k=1}^{N} g_n(s,k) = \frac{1-f(s)}{sf(s)}.$$

Teraz z (24) dostajemy:

Wynik 2.1. *Dla okresu nasilenia sprawiedliwe przedstawienie:*

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\tau}/\xi(0) = n\right\} = 1 - \frac{(1-f(s))\sum_{l=N-n}^{N-1} R_l(s)}{f(s) + (1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)} \tag{26}$$

dla $1 \leqslant n \leqslant N-1$ *i:*

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\tau}/\xi(0) = N\right\} = 1 - \frac{\left(1-f(s)\right)\left(f(s) + \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)\right)}{f(s) + (1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}. \tag{27}$$

W szczególności dla standardowego systemu mamy:

$$\mathbf{E}e^{-s\tau} = 1 - \frac{(1 - f(s)R_{N-1}(s)}{f(s) + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}. \tag{28}$$

Niech η będzie czasem między dwoma kolejnymi wpływami zgłoszenia do pustego systemu. Ponieważ strumień wejściowy jest Poissona, to oczywiście, że $\eta = \tau + \nu$, gdzie zmienna losowa ν jest niezależna od τ i ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Zgodnie z (28) mamy:

$$\mathbf{E}e^{-s\eta} = \frac{\lambda}{s+\lambda}\left(1 - \frac{(1 - f(s))R_{N-1}(s)}{f(s) + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}\right). \tag{29}$$

Jeśli $\Phi(x)$ jest funkcją odnowy, która odpowiada zmiennej losowej $\tau + \nu$, to dla standardowego systemu mamy:

$$\mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = \int_0^t \mathbf{P}\{\xi(t-u) = k, \tau \geqslant t-u\} d\Phi(u), \quad 1 \leqslant k \leqslant N \tag{30}$$

i

$$\mathbf{P}\{\xi(t) = 0\} = \int_0^t \mathbf{P}\{\tau < t-u, \tau + \nu \geqslant t-u\} d\Phi(u). \tag{31}$$

Ponieważ jak łatwo sprawdzić:

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\tau < t, \tau + \nu \geqslant t\} dt = (s+\lambda)^{-1}\mathbf{E}e^{-s\tau},$$

to z (30), (31) wynika:

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t) = k\} dt = \frac{\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau > t\} dt}{1 - \mathbf{E}e^{-s\eta}} =$$

$$= \frac{Q(N,s)\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)g_l(s,k) - \sum_{l=1}^{N-2} R_l(s)g_{l-1}(s,k)}{1-\lambda(s+\lambda)^{-1}Q(N,s,k)}, \tag{32}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t)=0\}dt = \frac{\mathbf{E}e^{-s\tau}}{s+\lambda(1-\mathbf{E}e^{-s\tau})} =$$

$$= \frac{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-2} R_l(s)}{s\Big(f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)\Big)+\lambda(1-f(s))R_{N-1}(s)}, \tag{33}$$

gdzie:

$$Q(N,s,k) = \frac{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-2} R_l(s)}{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}.$$

Z (29) dostajemy:

$$\mathbf{E}\eta = \lim_{s\to+0}\frac{1-\mathbf{E}e^{-s\eta}}{s} = \lambda^{-1} + mR_{N-1},$$

gdzie $m = \int_0^\infty x\,dF(x)$, a R_k, $k \geqslant 0$ jest potencjałem błądzenia $\xi_n(0)$. To znaczy, że ciąg R_k jest taki, że [1]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k = \frac{z}{f(\lambda(1-z))-z}, \qquad |z| < z_\lambda,$$

gdzie z_λ jest najmniejszym pierwiastkiem równania:

$$f(\lambda(1-z)) - z = 0,$$

na odcinku $(0,1]$. Teraz z (32) i twierdzenia Taubera łatwo wynika:

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\xi(t)=k\} = \lim_{s\to+0} s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t)=k\}dt =$$

$$= \frac{\sum_{l=1}^{N-1} R_l g_l(k) - \sum_{l=1}^{N-2} R_l g_{l-l}(k)}{\lambda^{-1} + mR_{N-1}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

gdzie:

$$g_l(k) = \lambda^{-1}\Big\{I\{n \leqslant k \leqslant N\} \sum_{i=k-n}^{\infty} p_i + I\{k = N\} \sum_{i=N-n}^{\infty} (i - N + n)p_i\Big\},$$

a

$$p_i = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{i+1}}{(i+1)!} dF(x).$$

Analogicznie z (33) wynika:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{1 + \lambda m R_{N-1}}.$$

Otrzymane wyniki zapiszemy w postaci takiego twierdzenia:

Twierdzenie 2.2. *Wartość oczekiwania okresu nasilenia standardowego systemy wyraża się wzorem:*

$$\mathbf{E}\tau = mR_{N-1}.$$

Twierdzenie 2.3. *Dla ergodycznego rozkładu długości kolejki są prawdziwe następujące wzory:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = \frac{\sum_{l=1}^{N-1} R_l g_l(k) - \sum_{l=1}^{N-2} R_l g_{l-1}(k)}{\lambda^{-1} + mR_{N-1}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{1 + \lambda m R_{N-1}},$$

gdzie:

$$g_l(k) = \lambda^{-1}\Big\{I\{n \leqslant k \leqslant N\} \sum_{i=k-n}^{\infty} p_i + I\{k = N\} \sum_{i=N-n}^{\infty} (i - N + n)p_i\Big\}.$$

Uwaga 2.1. Ze wzoru (9) można znaleźć przedstawienia dla wszystkich wymienionych wyżej cech, jeśli początek pracy systemu nie pokrywa się z chwilą wpływu zgłoszenia do systemu, a pierwsze zgłoszenie opuści system po czasie x. Odpowiednie wzory są bardzo skomplikowane i dla tego nie są tu przytoczone.

Literatura

1. V. S. Korolyuk, *Granicnye zadaci dlja sloznych puassonovskih processov,* Naukowa Dumka, Kijów 1975.

2. V. S. Korolyuk, N. S. Bratiiczuk, B. Pirdjanow, *Granicnye zadaci dlja sluczajnych bluzdanij,* YLYM, Aszhabad 1987.

Mikołaj Bratiychuk
Barbara Borowska
Institute of Mathematics
Silesian Technical University
Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

The paper deals with the standard queueing system $E/G/1/N$ with limited queue. We are interested in the explicit formulae for distributions of the queue length on the busy period and at any moment of time. The

studying is based on the boundary problems for random walks with two boundaries. In the case we deal with the specific feature consists in the fact that the boundary condition on the one boundary is connected with the value of unknown function on the half axis and this value itself is unknown. As it turned out the potential method, proposed by V. Korolyk, can be applied to such a case. The all formulae are expressed in terms of rezolvent of some random walk and can by basis for the future asymptotical analysis.