ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 84 Nr kol. 1411

Krzysztof DŁUTEK

O PEWNYM UOGÓLNIENIU RÓWNANIA FUNKCJONAŁÓW KWADRATOWYCH

Streszczenie. W pracy poszukuje się rozwiązań uogólnionego równania funkcjonałów kwadratowych postaci:

$$A(x) + B(y) = C(x + y) + D(x - y)$$

gdzie funkcje $A, B, C, D : G_1 \to G_2$, oraz G_1, G_2 są grupami abelowymi. W drugiej części pracy badamy rozwiązania równania funkcjonałów kwadratowych o dziedzinie będącej przedziałem prostej rzeczywistej.

ON CERTAIN GENERALISATION OF QUADRATIC FUNCTIONAL EQUATION

Summary. In the article we are concerned with the problem of the solutions of pexider quadratic functional equation

$$f(x) + g(y) = h(x + y) + k(x - y) \quad \text{for all} \quad x, y \in X.$$

Next, we are going to study the problem of the solutions of quadratic functional equation with the restricted domain.

1. Pexideryzacja równania funkcjonałów kwadratowych

Zdefiniujemy następujące pojęcia:

Definicja 1. *Niech $(G_1, +, -)$ będzie zbiorem z dwoma działaniami, natomiast $(G_2, +)$ oraz $(G_3, +)$ zbiorami z działaniem. Wtedy funkcję $F : G_1 \to G_2$ spełniającą równanie:*

$$2F(x) + 2F(y) = F(x+y) + F(x-y) \tag{1}$$

dla dowolnych x, y, będziemy nazywać kwadratową, natomiast funkcję $G : G_2 \to G_3$ spełniającą równanie:

$$G(x+y) = G(x) + G(y) \tag{2}$$

dla dowolnych x, y, addytywną. Równanie (1) nazywamy równaniem funkcjonałów kwadratowych, natomiast równanie (2) równaniem Cauchy'ego.

Uogólnienia równania (1) dla więcej niż jednej funkcji będziemy nazywać pexideryzacjami. Równaniem funkcjonałów kwadratowych oraz jego uogólnieniami zajmowano się od dawna. W pracy [2] otrzymano postać rozwiązań uogólnienia równania (1) do trzech funkcji, a w pracy [3] podano metody poszukiwań rozwiązań przy pewnych dodatkowych założeniach.

O postaci rozwiązań uogólnionego równania funkcjonałów kwadratowych mówi:

Twierdzenie 1. *Niech G_1, G_2 będą grupami abelowymi, G_1 – dwupodzielna, G_2 – jednoznacznie dwupodzielna. Funkcje $A, B, C, D : G_1 \to G_2$ spełniają równanie:*

$$A(x) + B(y) = C(x+y) + D(x-y) \qquad \textit{dla wszystkich} \;\; x, y \in G_1. \tag{3}$$

Wtedy istnieją funkcje $K : G_1 \to G_2$ - kwadratowa, $E, F : G_1 \to G_2$ - addytywne oraz stałe $S_1, S_2, S_3, S_4 \in G_2$, takie że:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= S_3 + S_4, \\ A(x) &= 2K(x) + E(x) + F(x) + S_1, \\ B(x) &= 2K(x) + E(x) - F(x) + S_2, \\ C(x) &= K(x) + E(x) + S_3, \\ D(x) &= K(x) + F(x) + S_4, \end{aligned}$$

dla wszystkich $x \in G_1$.

Dowód. Dla dowolnej funkcji $F : G_1 \to G_2$ wprowadźmy oznaczenia $F^+(x) := \frac{F(x)+F(-x)}{2}$ oraz $F^-(x) := \frac{F(x)-F(-x)}{2}$. Zauważmy, że spełnione są następujące równości:

$$A^+(x) + B^+(y) = C^+(x+y) + D^+(x-y), \tag{4}$$

$$A^-(x) + B^-(y) = C^-(x+y) + D^-(x-y). \tag{5}$$

Rozpatrzymy najpierw równość (4). Niech $S_1 = A^+(0)$, $S_2 = B^+(0)$, $S_3 = C^+(0)$ oraz $S_4 = D^+(0)$. Z (4) wynika, że $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= A^+(x) - S_1, \\ B_0(x) &= B^+(x) - S_2, \\ C_0(x) &= C^+(x) - S_3, \\ D_0(x) &= D^+(x) - S_4. \end{aligned}$$

Wtedy A_0, B_0, C_0, D_0 są funkcjami parzystymi, $A_0(0) = B_0(0) = C_0(0) = D_0(0) = 0$ oraz spełniona jest równość:

$$A_0(x) + B_0(y) = C_0(x+y) + D_0(x-y). \tag{6}$$

Do (6) podstawmy odpowiednio $y = 0$, oraz $x = 0$ i $y = x$. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= C_0(x) + D_0(x), \\ B_0(x) &= C_0(x) + D_0(-x), \end{aligned}$$

czyli $A_0 = B_0$. Tak więc:

$$A_0(x) + A_0(y) = C_0(x+y) + D_0(x-y). \tag{7}$$

Do (7) podstawmy odpowiednio $x = \frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2}$ oraz $x = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2}$. Otrzymamy następujące równości:

$$\begin{aligned} A_0(\frac{x}{2}) + A_0(\frac{x}{2}) &= C_0(x), \\ A_0(\frac{x}{2}) + A_0(-\frac{x}{2}) &= D_0(x). \end{aligned}$$

Stąd $C_0 = D_0$. Otrzymujemy równanie:

$$A_0(x) + A_0(y) = C_0(x+y) + C_0(x-y). \tag{8}$$

Podstawiając do (8) $y = 0$, otrzymamy:

$$A_0(x) + A_0(0) = C_0(x) + C_0(x) \quad \text{czyli} \quad A_0(x) = 2C_0(x).$$

Oznaczmy $C_0 = K$. Z (8) otrzymamy:

$$2K(x) + 2K(y) = K(x+y) + K(x-y),$$

czyli K jest kwadratowa, oraz

$$\begin{aligned} A^+(x) &= 2K(x) + S_1, \\ B^+(x) &= 2K(x) + S_2, \\ C^+(x) &= K(x) + S_3, \\ D^+(x) &= K(x) + S_4. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy teraz równość (5). Do (5) podstawmy $y = 0$ oraz $x = 0$ i $y = x$. Otrzymamy równości:

$$A^-(x) = C^-(x) + D^-(x), \tag{9}$$

$$B^-(x) = C^-(x) - D^-(x). \tag{10}$$

Oznaczmy $C^- = E$ i $D^- = F$. Do zakończenia dowodu wystarczy udowodnić, że E i F są addytywne. Do (5) podstawmy (9) i (10) oraz $y = x$, otrzymując równość:

$$E(x) + F(x) + E(x) - F(x) = E(2x) \quad \text{czyli} \quad 2E(x) = E(2x).$$

Podstawiając odpowiednio otrzymamy:

$$\begin{aligned} A^-(x) + B^-(x) &= 2E(x), & (11)\\ A^-(y) + B^-(y) &= 2E(y), & (12)\\ A^-(x) + B^-(y) &= E(x+y) + F(x-y), & (13)\\ A^-(y) + B^-(x) &= E(x+y) + F(y-x). & (14) \end{aligned}$$

Dodając i odejmując stronami (11)+(12)-(13)-(14) otrzymamy:

$$2E(x) + 2E(y) - 2E(x+y) = 0, \quad \text{czyli} \quad E(x) + E(y) = E(x+y).$$

Tak więc E jest addytywna.

Ostatnią częścią dowodu jest sprawdzenie addytywności F. Do (5) podstawmy (9) i (10) oraz $y = -x$, otrzymując:

$$E(x) + E(-x) + F(x) - F(-x) = F(2x), \quad \text{czyli} \quad F(2x) = 2F(x).$$

Podstawiając odpowiednio otrzymamy:

$$\begin{aligned} A^-(x) + B^-(-x) &= 2F(x), & (15)\\ A^-(y) + B^-(-y) &= 2F(y), & (16)\\ A^-(x) + B^-(-y) &= E(x-y) + F(x+y), & (17)\\ A^-(y) + B^-(-x) &= E(y-x) + F(x+y). & (18) \end{aligned}$$

Dodając i odejmując stronami (15)+(16)-(17)-(18), otrzymamy:

$$2F(x) + 2F(y) = 2F(x+y) + F(x-y) + F(y-x),$$

czyli:

$$F(x) + F(y) = F(x+y),$$

co kończy dowód. ∎

Następne dwa twierdzenia stanowią pewnego rodzaju twierdzenia odwrotne do Twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. *Niech G_1 będzie grupą, G_2 grupą abelową oraz $K, E, F : G_1 \to G_2$ będą funkcjami, K kwadratową oraz E, F addytywnymi. Niech S_1, S_2, S_3, S_4 będą stałymi z G_2, takimi że $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Wtedy funkcje:*

$$\begin{aligned} A(x) &:= 2K(x) + E(x) + F(x) + S_1, \\ B(x) &:= 2K(x) + E(x) - F(x) + S_2, \\ C(x) &:= K(x) + E(x) + S_3, \\ D(x) &:= K(x) + F(x) + S_4 \qquad \text{dla } x \in G_1 \end{aligned}$$

spełniają równanie:

$$A(x) + B(y) = C(x+y) + D(x-y) \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in G_1. \tag{19}$$

Dowód. Korzystając z równości:

$$\begin{aligned} 2K(x) + 2K(y) &= K(x+y) + K(x+y), \\ E(x+y) &= E(x) + E(y), \\ F(x+y) &= F(x) + F(y) \end{aligned}$$

oraz z addytywności:

$$F(x-y) = F(x) - F(y).$$

Po dodaniu stronami powyższych równości otrzymujemy:

$$A(x) + B(y) = C(x + y) + D(x - y)$$

co kończy dowód.■

Twierdzenie 3. *Niech G_1 będzie grupą, G_2 zbiorem z działaniem łącznym i przemiennym, $K : G_1 \to G_2$ funkcją kwadratową i $E : G_1 \to G_2$ funkcją addytywną, oraz $S_1, S_2, S_3, S_4 \in G_2$ stałymi, takimi że $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Wtedy odwzorowania określone wzorami:*

$$\begin{aligned} A(x) &:= 2K(x) + E(x) + S_1, \\ B(x) &:= 2K(x) + E(x) + S_2, \\ C(x) &:= K(x) + E(x) + S_3, \\ D(x) &:= K(x) + S_4 \end{aligned}$$

spełniają równanie:

$$A(x) + B(y) = C(x + y) + D(x - y) \qquad \text{dla } x, y \in G_1.$$

Dowód. Korzystając z definicji A, B, C, D otrzymujemy,

$$A(x) + B(y) = 2K(x) + E(x) + S_1 + 2K(y) + E(y) + S_2 =$$

$$= K(x + y) + K(x - y) + E(x + y) + S_3 + S_4 = C(x + y) + D(x - y)$$

co kończy dowód.■

Problemem otwartym pozostaje nadal pytanie, czy przy założeniach twierdzeń 2 lub 3 mogą istnieć inne rozwiązania równania (19).

2. Równanie funkcjonałów kwadratowych na przedziale

Rozwiazania równania Cauchy'ego dla dziedziny będącej przedziałem podał M. Kuczma w [1]. Rozwiążemy teraz ten problem dla równania funkcjonałów kwadratowych.

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem postaci $I = [a, a+b]$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, G – grupą abelową bez elementów rzędu dwa, funkcje $A : I \to G$, $B : 2I \to G$, $C : I - I \to G$ spełniają równanie:

$$A(x) + A(y) = B(x+y) + C(x-y) \qquad x, y \in I. \tag{20}$$

Oczywiście $2I = [2a, 2a+2b]$, $I - I = [-b, b]$.

Udowodnimy teraz szereg lematów.

Lemat 1. *Jeśli $C : I - I \to G$ spełnia równanie (20), to spełnia również równanie:*

$$C(x+y) + C(x-y) = 2C(x) + 2C(y) - 2C(0) \tag{21}$$

dla wszystkich $x, y \in [0, b]$, takich że $x + y < b$.

Dowód. Jeśli w równaniu (20) zamienimy x i y miejscami, to otrzymamy:

$$A(y) + A(x) = B(x+y) + C(y-x)$$

czyli $C(x) = C(-x)$, a więc C jest parzysta.

Oznaczmy przez $k = a + \frac{b}{2}$ – środek przedziału I.

Niech $x \in [0, \frac{b}{2}]$. Po odpowiednich podstawieniach do równości (20) otrzymamy:

$$A(k) + A(k+x) = B(2k+x) + C(-x), \tag{22}$$

$$A(k) + A(k-x) = B(2k-x) + C(x), \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
A(k+x)+A(k-x) &= B(2k)+C(2x), & (24)\\
A(k)+A(k) &= B(2k)+C(0), & (25)\\
A(k+x)+A(k+x) &= B(2k+2x)+C(0), & (26)\\
A(k-x)+A(k-x) &= B(2k-2x)+C(0), & (27)
\end{aligned}
$$

Dodając stronami (22)+(23)+(24)-(25)-(26)-(27) otrzymamy:

$$B(2k+x)+B(2k-x)+2C(x)+C(2x)=$$

$$=B(2k+2x)+B(2k-2x)+3C(0). \tag{28}$$

Podstawiając do równości (20) w właściwy sposób otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
A(k+x)+A(k-x) &= B(2k)+C(2x), & (29)\\
A(k-x)+A(k+x) &= B(2k)+C(-2x), & (30)\\
A(k+x)+A(k+x) &= B(2k+2x)+C(0), & (31)\\
A(k-x)+A(k-x) &= B(2k-2x)+C(0). & (32)
\end{aligned}
$$

Dodając stronami (29)+(30)-(31)-(32) otrzymamy:

$$2C(2x)+2B(2k)=2C(0)+B(2k+2x)+B(2k-2x),$$

czyli dla każdego $y\in[0,b]$:

$$2C(y)=2C(0)-2B(2k)+B(2k+y)+B(2k-y). \tag{33}$$

Podstawiając (33) do (28) dostajemy:

$$2C(x)-2C(0)+2C(x)+C(2x)=2C(2x)-2C(0)+3C(0)$$

czyli

$$C(2x)=4C(x)-3C(0) \qquad \text{dla każdego } x\in[0,\frac{b}{2}]. \tag{34}$$

Weźmy dowolne $x, y \in [0, \frac{b}{2}]$ i podstawmy odpowiednio do (20). Uzyskamy równania:

$$\begin{aligned}
A(k+x)+A(k+y) &= B(2k+x+y)+C(x-y), && (35)\\
A(k-x)+A(k-y) &= B(2k-x-y)+C(-x+y), && (36)\\
A(k+x)+A(k-y) &= B(2k+x-y)+C(x+y), && (37)\\
A(k-x)+A(k+y) &= B(2k+y-x)+C(-x-y), && (38)\\
A(k+x)+A(k+x) &= B(2k+2x)+C(0), && (39)\\
A(k-x)+A(k-x) &= B(2k-2x)+C(0), && (40)\\
A(k+y)+A(k-y) &= B(2k+2y)+C(0), && (41)\\
A(k-y)+A(k-y) &= B(2k-2y)+C(0). && (42)
\end{aligned}$$

Dodając stronami (35)+(36)+(37)+(38)-(39)-(40)-(41)-(42) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
B(2k+x+y)+B(2k-x-y)+B(2k+x-y)+B(2k+y-x)+\\
+2C(x+y)+C(x-y)=B(2k+2x)+B(2k-2x)+\\
+B(2k+2y)+B(2k-2y)+4C(0). \qquad (43)
\end{aligned}$$

Podstawiając (33) do (43), otrzymamy:

$$2C(x+y)-2C(0)+2C(x-y)-2C(0)+2C(x+y)+2c(x-y)=$$

$$=2C(2x)+2C(2y)$$

czyli:

$$4C(x+y)+4C(x-y)=2C(2x)+2C(2y)+4C(0).$$

Korzystając z równości (34) mamy:

$$4C(x+y)+4C(x-y)=8C(x)+8C(y)-8C(0)$$

czyli:

$$C(x+y)+C(x-y)=2C(x)+2C(y)-2C(0) \qquad \text{dla } x, y \in [0, b/2].$$

Stąd i z równości (34) uzyskujemy również (21), co kończy dowód lematu. ■

Lemat 2. *Niech $I = [a, a+b] \subset \mathbb{R}$ oraz niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu dwa. Niech $A : I \to G$, $B : 2I \to G$, $C : I - I \to G$ spełniają równanie $A(x)+A(y) = B(x+y)+C(x-y)$ dla wszystkich $x, y \in I$. Wtedy istnieją funkcje $A' : [a - \frac{b}{2}, a+b] \to G$, $B' : [2a-b, 2a+2b] \to G$, $C' : [-\frac{3b}{2}, \frac{3b}{2}] \to G$, takie że:*

$$A'(x) + A'(y) = B'(x+y) + C'(x-y) \tag{44}$$

dla wszystkich $x, y \in [a - \frac{b}{2}, a+b]$ oraz $A'|_I = A$, $B'|_{2I} = B$, $C'|_{I-I} = C$. Funkcje A', B', C' są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. Niech $x \in [a - \frac{b}{2}, a]$, wtedy istnieje $p \in [0, \frac{b}{2}]$, taka że $x = a - p$. Zdefiniujmy funkcje:

$$A'(a-p) := B(2a) + C(2p) - A(a+p) \qquad \text{dla } p \in [0, \frac{b}{2}], \tag{45}$$

$$B'(a-p) := 2B(2a) + 2C(p) - 2C(0) - B(2a+p) \qquad \text{dla } p \in [0, b], \tag{46}$$

$$\begin{aligned} C'(b+p) = C'(-b-p) := A(a+b) + B(2a)+ \\ + C(2p) - A(a+p) - B(2a+b-p) \end{aligned} \tag{47}$$

dla $p \in [0, \frac{b}{2}]$.

Dla pozostałych punktów dziedziny funkcje A', B', C' określamy następująco: $A' := A$, $B' := B$ oraz $C' := C$.

Najpierw sprawdzimy jednoznaczność rozszerzeń.

Podstawiając do (44) za $x = a+p$ oraz za $y = a-p$ otrzymujemy:

$$A'(a-p) + A'(a+p) = B'(2a) + C'(-2p),$$

czyli:

$$A'(a-p) = B(2a) + C(2p) - A(a+p),$$

a więc ostatecznie jednoznaczność A'.

Podstawiając do (44) $x = a - \frac{p}{2}$ i $y = a - \frac{p}{2}$, otrzymamy:

$$A'(a - \frac{p}{2}) + A'(a - \frac{p}{2}) = B'(2a - p) + C'(0).$$

Z jednoznaczności i postaci A' otrzymamy następujący ciąg równości:

$$2B(2a) + 2C(p) - 2A(a + \frac{p}{2}) = B'(2a - p) + C(0),$$

$$2B(2a) + 2C(p) - B(2a + p) - C(0) = B'(2a - p) + C(0),$$

$$B'(2a - p) = 2B(2a) + 2C(p) - 2C(0) - B(2a + p).$$

Z powyższych równości wynika jednoznaczność B'.

Podstawiając do (44) $x = a - p$ i $y = a + b$ oraz na odwrót $x = a + b$ i $y = a - p$, otrzymamy:

$$A'(a - p) + A'(a + b) = B'(2a + b - p) + C'(-p - b).$$

Korzystając z jednoznaczności i postaci A' otrzymamy:

$$B(2a) + C(2p) - A(a + p) + A(a + b) = B(2a + b - p) + C'(-p - b).$$

Ostatecznie więc jednoznaczność C'.

Aby zakończyć dowód, należy sprawdzić równość (44) dla dowolnych $x, y \in [a - \frac{b}{2}, a + b]$. Jeśli $x > a$ i $y > a$, równość jest oczywista.

Z symetrii x i y możemy założyć, że $x < a$. Rozpatrzymy następujące przypadki.

1) $x = a - p$, $y = a - q$, $0 \leqslant p, q \leqslant \frac{b}{2}$.

Wtedy:

$$A'(a - p) + A'(a - q) = B'(2a - p - q) + C'(q - p) \Leftrightarrow$$

$$2B(2a) + C(2p) + C(2q) - A(a - p) - A(a - q) =$$

$$= 2B(2a) + 2C(p + q) - 2C(0) - B(2a + p + q) + C(q - p) \Leftrightarrow$$

$$C(2p) + C(2q) - B(2a + p + q) - C(p - q) =$$
$$= 2C(p + q) - 2C(0) + C(p - q) - B(2a + p + q) \Leftrightarrow$$
$$C(2p) + C(2q) = 2C(0) + 2C(p - q) + 2C(p + q).$$

Ostatnia równość jest prawdziwa na podstawie lematu 1.

2) $x = a - p$, $y = a + q$, $0 \leqslant q < p \leqslant \frac{b}{2}$.

Wtedy:

$$A'(a - p) + A'(a + q) = B'(2a + q - p) + C'(-p - q) \Leftrightarrow$$

$$A(a + q) + B(2a) + C(2p) - A(a + p) =$$
$$= 2B(2a) + 2C(q - p) - 2C(0) - B(2a + q - p) + C(p + q) \Leftrightarrow$$
$$A(a + q) + A(a + p - q) + A(a) - C(p - q) + C(2p) =$$
$$= 2A(a) - C(0) + 2C(q - p) - 2C(0) + A(a + p) + C(p + q) \Leftrightarrow$$
$$B(2a + p) + C(2q - p) =$$
$$= 3C(p - q) - 3C(0) + C(p + q) + B(2a + p) + C(p) - C(2p) \Leftrightarrow$$
$$C(2q - p) + 3C(0) + C(2p) = 3C(p - q) + C(p + q) + C(p) \Leftrightarrow$$
$$C(2q-p)+3C(0)+C(2p) = 2C(p-q)+C(p)+2C(p)+2C(q)-2C(0) \Leftrightarrow$$
$$C(2q - p) + 5C(0) + C(2p) = 2C(q - p) + 3C(p) + 2C(q) \Leftrightarrow$$
$$C(2q - p) + 5C(0) + C(2p) = 3C(p) + C(2q - p) + C(p) + 2C(0) \Leftrightarrow$$
$$C(2p) + 3C(0) = 4C(p),$$

co jest prawdą z (34).

3) $x = a - p$, $y = a + q$, $0 \leqslant p \leqslant q$, $p + q \leqslant b$.

Wtedy:

$$A'(a-p) + A'(a+q) = B'(2a+q-p) + C'(-p-q) \ \Leftrightarrow$$

$$B(2a) + C(2p) - A(a+p) + A(a+q) = B(2a+q-p) + C(p+q) \ \Leftrightarrow$$

$$2A(a) - C(0) + C(2p) - A(a+p) + A(a+q) =$$

$$= C(p+q) + A(a) + A(a+q-p) - C(p-q) \ \Leftrightarrow$$

$$A(a) + A(a+q) + C(2p) - C(0) =$$

$$= A(a+q-p) + A(a+p) + C(p+q) - C(p-q) \ \Leftrightarrow$$

$$B(2a+q) + C(-q) + C(2p) - C(0) =$$

$$= B(2a+q) + C(q-2p) + C(p+q) + C(p-q) \ \Leftrightarrow$$

$$C(q) + C(2p) + C(p-q) = C(0) + C(p+q) + C(q-2p) \ \Leftrightarrow$$

$$C(q) + 4C(p) - 3C(0) + 2C(p-q) =$$

$$= C(0) + C(p+q) + C(p-q) + C(q-2p) \ \Leftrightarrow$$

$$C(q) + 2C(p) - C(0) + C(2p-q) + C(q) =$$

$$= C(0) + C(p+q) + C(p-q) + C(2p-q) \ \Leftrightarrow$$

$$2C(p) + 2C(q) - 2C(0) = C(p+q) + C(p-q).$$

4) $x = a - p$, $y = a + q$, $p + q > b$.

Wtedy:

$$A'(a-p) + A'(a+q) = B'(2a+q-p) + C'(-p-q) \ \Leftrightarrow$$

$$B(2a) + C(2p) - A(a+p) + A(a+q) = B(2a+q-p) + A(a+b) +$$

$$+ B(2a) + C(2p+2q-2b) - A(a+p+q-b) - B(2a+2b-p-q) \ \Leftrightarrow$$

$$C(2p) - A(a+p) + A(a+q) = A(a+q-p) + A(a) -$$

$$-C(q-p)+A(a+b)+C(2p+2q-2b)-$$

$$-A(a+p+q-b)-A(a+b-p)-A(a+b-q)+C(q-p) \Leftrightarrow$$

$$C(2p)+A(a+q)+A(a+b-q)+A(a+p+q-b)+A(a+b-p)=$$

$$A(a+q-p)+A(a+p)+A(a+b)+A(a)+C(2p+2q-2b) \Leftrightarrow$$

$$C(2p)+B(2a+b)+C(2q-b)+B(2a+q)+C(2b-2p-q)=$$

$$B(2a+q)+C(q-2p)+B(2a+b)+C(b)+C(2p+2q-2b) \Leftrightarrow$$

$$C(2p)+C(2q-b)+C(2b-2p-q)=C(q-2p)+C(b)+C(2p+2q-2b) \Leftrightarrow$$

$$4C(p)+C(2q-b)+C(2b-2p-q)=C(q-2p)+C(b)+4C(p+q-b) \Leftrightarrow$$

$$4C(p)+C(2q-b)+C(2b-2p-q)+2C(q-p)=$$

$$=C(q-2p)+C(b)+4C(p+q-b)+2C(q-p) \Leftrightarrow$$

$$2C(p)+C(2b-2p-q)+C(q)+C(2p-q)=$$

$$=2C(p+q-b)+C(2p-b)+C(q-2p)+C(b) \Leftrightarrow$$

$$2C(p)+C(2b-2p-q)+C(q)+C(2p-q)+2C(b-p)=$$

$$2C(p+q-b)+2C(b-p)+C(2p-b)+C(q-2p)+C(b) \Leftrightarrow$$

$$C(b)+C(b-2p)+C(2b-2p-q)+C(q)+C(2p-q)=$$

$$C(q)+C(2b-2p-q)+C(2p-b)+C(q-2p)+C(b),$$

co kończy dowód.∎

Lemat 3. *Niech* $I=[a,a+b]\subset\mathbb{R}$. *Niech* G *będzie grupą abelową jednoznacznie dwupodzielną, oraz* $A:I\to G$, $B:2I\to G$, $C:I-I\to G$ *spełniają równanie* $A(x)+A(y)=B(x+y)+C(x-y)$ *dla wszystkich* $x,y\in I$. *Wtedy istnieją funkcje* $A':[a,a+\frac{3b}{2}]\to G$, $B':[2a,2a+3b]\to G$, $C':[-\frac{3b}{2},\frac{3b}{2}]\to G$, *takie że* $A'|_I=A$, $B'|_{2I}=B$, $C'|_{I-I}=C$ *oraz* $A'(x)+A'(y)=B'(x+y)+C'(x-y)$ *dla wszystkich* $x,y\in[a,a+\frac{3b}{2}]$.

Dowód można przeprowadzić tak jak w przypadku lematu 2.

Na podstawie powyższych lematów udowodnimy twierdzenie o rozszerzaniu.

Twierdzenie 4. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, G grupą abelową jednoznacznie dwupodzielną, $A : I \to G$, $B : 2I \to G$, $C : I - I \to G$ funkcjami, takimi że $A(x) + A(y) = B(x+y) + C(x-y)$ dla wszystkich $x, y \in I$. Wtedy istnieją funkcje $A^*, B^*, C^* : \Re \to G$, takie że $A^*|_I = A, B^*|_{2I} = B$, $C^*|_{I-I} = C$ oraz $A^*(x) + A^*(y) = B^*(x+y) + C^*(x-y)$ dla wszystkich x, y rzeczywistych. Funkcje te są wyznaczone jednoznacznie.*

Dowód

1. I – przedział skończony. Zdefiniujmy ciągi funkcji A_i, B_i, C_i jako kolejne rozszerzenia na zmianę w lewo i w prawo funkcji z lematów 2 i 3 ($A_{i+1} = A_i'$ z lematu 2, gdy i parzyste lub z lematu 3, gdy i nieparzyste, analogicznie B_i i C_i).

   Definiujemy:

   $$A^*(x) = A_i(x) \qquad i = \min\{j \in N;\ A_j \text{ określone dla } x\}$$

   i analogicznie B^* oraz C^*.

   W oczywisty sposób tak zdefiniowane funkcje spełniają tezę twierdzenia.

2. I – przedział nieskończony. Zawężamy przedział wyjściowy do skończonego przedziału i korzystając z części pierwszej oraz jednoznaczności uzyskujemy tezę. ∎

Na podstawie dotychczasowych rezultatów otrzymujemy twierdzenie o postaci rozwiązań pewnej pexideryzacji równania funkcjonałów kwadratowych na przedziale.

Twierdzenie 5. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, G grupą abelową jednoznacznie dwupodzielną oraz niech $A : I \to G$, $B : 2I \to G$, $C : I - I \to G$ będą danymi funkcjami. Następujące warunki są równoważne:*

(A) $A(x) + A(y) = B(x+y) + C(x-y)$ *dla wszystkich* $x, y \in I$,

(B) Istnieją funkcje $K : \mathbb{R} \to G$ – kwadratowa, $E : \mathbb{R} \to G$ – addytywna oraz stałe $S_1, S_2, S_3 \in G$, $2S_1 = S_2 + S_3$, takie że:

$$\begin{array}{rcll} A(x) & = & 2K(x) + E(x) + S_1 & \text{dla} \quad x \in I, \\ B(x) & = & K(x) + E(x) + S_2 & \text{dla} \quad x \in 2I, \\ C(x) & = & K(x) + S_3 & \text{dla} \quad x \in I - I. \end{array}$$

Dowód. Dowód jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 4 oraz twierdzenia 1, jeśli zauważymy że w twierdzeniu 1 dla $A = B$ otrzymamy $F \equiv 0$. W ten sposób otrzymujemy tezę. ∎

Prostym wnioskiem z twierdzenia 5 jest twierdzenie o postaci rozwiazań równania funkcjonałów kwadratowych na przedziale.

Twierdzenie 6. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, oraz G grupą abelową jednoznacznie dwupodzielną, i niech $A : I \cup 2I \cup I - I \to G$ spełnia równanie*

$$2A(x) + 2A(y) = A(x+y) + A(x-y) \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in I. \tag{48}$$

Wtedy jeśli $I \cap 2I$ jest przedziałem niezdegenerowanym, to istnieje funkcja kwadratowa $K : \mathbb{R} \to G$, taka że $K(x) = A(x)$ dla $x \in I \cup 2I \cup I - I$, lub gdy $I \cap 2I$ jest zbiorem jednopunktowym $\{2a\}$, to istnieją funkcje $K : \mathbb{R} \to G$ – kwadratowa oraz $E : \mathbb{R} \to G$ – addytywna, takie że:

$$\begin{array}{rcll} A(x) & = & K(x) + E(x) - 1/2E(a) & \text{dla} \quad x \in I, \\ A(x) & = & K(x) + 2E(x) - 5/2E(a) & \text{dla} \quad x \in 2I, \\ A(x) & = & K(x) + 1/2E(a) & \text{dla} \quad x \in I - I. \end{array}$$

Gdy $I \cap 2I = \emptyset$ *wtedy istnieją funkcje* $K : \mathbb{R} \to G$ *- kwadratowa,* $E : \mathbb{R} \to G$ *- addytywna oraz stałe* $S_1, S_2, S_3 \in G$*, takie że* $4S_1 = S_2 + S_3$*, oraz:*

$$\begin{array}{rclll} A(x) & = & K(x) + E(x) + S_1 & \textit{dla} & x \in I, \\ A(x) & = & K(x) + 2E(x) + S_2 & \textit{dla} & x \in 2I, \\ A(x) & = & K(x) + S_3 & \textit{dla} & x \in I - I. \end{array}$$

Dowód. Twierdzenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia 5. Należy tylko zauważyć, że z rozłączności przedziałów I oraz $2I$ wynika wzajemna rozłącznosć całej trójki przedziałów I, $2I$ oraz $I - I$. Analogicznie z przecinania się dwóch przedziałów wynika przecinanie trzeciego z jednym z pozostałych, co kończy dowód.■

Literatura

1. M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equation and inequalities,* PWN and Silesian University, Warszawa 1985.

2. S. Kurepa, *On the quadratic functional,* Publ. Inst. Math. **13**(1959), 57-72.

3. L. Szekelyhidi, *Convolution type functional equations on topological abelian groups,* Teaneck, World Scientific Publishers, New York 1991.

Krzysztof Dłutek
Institute of Mathematics
Silesian Technical University
Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

In the article we are concerned with the problem of the solutions of pexider quadratic functional equation:

$$f(x) + g(y) = h(x + y) + k(x - y) \quad \text{for all } x, y \in X.$$

We prove, that functions f, g, h, k satisfy pexider quadratic functional equation are in form $A+B+C$, where A is quadratic function, B is additive function and C is constans.

Next, we are going to study the problem of the solutions of quadratic functional equation with the restricted domain. In this case we prove that function f satisfy equation:

$$2f(x) + 2f(y) = f(x + y) + f(x - y) \quad \text{for all } x, y \in I,$$

(where I is interval) have form $A + B + C$, where A is quadratic function, B is additive function and C is constans.