ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 84 Nr kol. 1411

Katarzyna KOMOROWSKA, Andrzej J. NOWAK

POSZUKIWANIE WARTOŚCI WŁASNYCH RÓWNANIA HELMHOLTZA ZA POMOCĄ WIELOKROTNEJ ZASADY WZAJEMNOŚCI

Streszczenie. W pracy zaprezentowano metodę obliczania wartości własnych w równaniu Helmholtza. Wykorzystuje ona wielokrotną zasadę wzajemności, która prowadzi do równania całkowego zawierającego całki tylko po brzegu ciała. Przedstawiono postać równania całkowego z funkcją Henkela jako rozwiązaniem podstawowym, oraz z rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a. Zaprezentowano również sposób przekształcenia całki objętościowej w całkę po brzegu ciała, a także sposób obliczania wartości własnych, co zilustrowano przykładem.

APPLICATION OF THE MULTIPLE RECIPROCITY METHOD TO EIGENVALUE ANALYSIS OF THE HELMHOLTZ EQUATION

Summary. The paper presents a method for calculation of the eigenvalues in the Helmholtz's equation. It applies the multiple reciprocity method, which leads to the integral equation consisting of the boundary integrals only. In the obtained integral equation utilization of either Henkel function or classical fundamental solution of Laplace equation is discussed. Also, the dissertation discusses in detail a manner of transformation of the volume integral into a boundary integral as well as the way of calculation of eigenvalues. Simple example has been chosen to illustrate the mentioned above aspects.

1. Wstęp

Obliczanie różnych pól fizycznych, jak np. pól temperatury, koncentracji, prędkości, ciśnienia itp., prowadzi się dzisiaj zwykle tzw. metodami numerycznymi. Uważa się powszechnie, że ugruntowana pozycja metody różnic skończonych (MRS) [12], elementów skończonych (MES) [13] czy też elementów brzegowych (MEB) [2, 3], pozwala na rozwiązywanie zagadnień brzegowych praktycznie w obszarach o dowolnych kształtach przy dowolnej kombinacji warunków brzegowych. Tymczasem numeryczne modelowanie jedynie ustalonych zagadnień brzegowych rzeczywiście nie nastręcza poważniejszych trudności ani merytorycznych, ani obliczeniowych. Wszystkie wymienione wyżej techniki numeryczne zapewniają podobny stopień dokładności rozwiązania oraz porównywalną efektywność algorytmów.

Z punktu widzenia użytkownika komercyjnych pakietów komputerowych szczególnie atrakcyjną metodą rozwiązywania zagadnień stacjonarnych jest metoda elementów brzegowych. Jej atrakcyjność wynika przede wszystkim z faktu, że do rozwiązania problemu wymagana jest dyskretyzacja jedynie brzegu obszaru. Tym samym siatka numeryczna w metodzie elementów brzegowych jest nieporównywalnie prostsza niż w metodzie różnic skończonych czy elementów skończonych.

Stopień komplikacji rozwiązań zagadnień niestacjonarnych jest nieporównanie większy niż problemów ustalonych i zależy w znacznym stopniu od zastosowanej metody numerycznej [12]. Problemy obliczeniowe pojawiają się zwykle wraz z koniecznością kroczenia w czasie oraz wraz z tzw. szokiem termicznym, na ogół wywołanym przez warunki brzegowe lub warunek początkowy. Na uwagę zasługuje także różny charakter zależności temperatury od czasu w pobliżu warunku początkowego oraz w późniejszych stadiach procesu.

Powyższe zjawiska powodują, że atrakcyjna możliwość obliczania nieustalonych pól fizycznych (np. pola temperatury) drogą dyskretyzacji jedynie brzegu obszaru nie może być łatwo zrealizowana [9, 12]. Tym samym metoda elementów brzegowych wymaga wciąż istotnych usprawnień.

Alternatywą dla metod numerycznych są, oczywiście, metody analityczne, oparte na metodzie rozdzielenia zmiennych czy metodzie skończonych transformacji całkowych [8, 11]. Traktują one zarówno zmienną przestrzenną jak i czas w sposób ciągły. Niestety, w swej obecnej formie techniki te mają wiele ograniczeń związanych z poszukiwaniem funkcji analitycznych zwanych *funkcjami własnymi.* W praktyce udaje się to zrobić tylko w układach współrzędnych umożliwiających tzw. *rozdzielenie zmiennych przestrzennych.* Wtedy też funkcje własne mają od dawna znaną i opublikowaną postać i spełniają tzw. *zagadnienie Sturma-Liouville'a,* czyli jednowymiarowe równanie Helmholtza.

Jednocześnie należy zwrócić uwagę na bardzo pożądaną cechę metod analitycznych, a mianowicie na fakt, że pozwalają one uzyskać ogólną postać rozwiązania zagadnienia brzegowego. Ponadto analiza funkcjonalna dostarcza dowodów na istnienie i jednoznaczność rozwiązań oraz zbieżność uzyskanych szeregów [8].

W niniejszym artykule podjęto próbę połączenia zalet obu metod, tj. numerycznych oraz analitycznych i zbudowania rozwiązania, w którym współrzędna przestrzenna jest wielkością dyskretną, podczas gdy czas pozostaje ciągły. Wykorzystano też tym samym główne cechy ogólnych rozwiązań analitycznych niestacjonarnego pola temperatury. Postępowanie odnoszące się do zmiennej przestrzennej wykorzystuje techniki typowe dla metody elementów brzegowych.

Najtrudniejszym etapem budowania rozwiązania jest znajdywanie wartości własnych, które w prosty sposób prowadzą do numerycznych wartości funkcji własnych. Tym też problemom poświęcony jest przede wszystkim niniejszy artykuł. Otwiera on też cykl publikacji, który kolejno omówi poszczególne etapy znajdowania niestacjonarnych pól temperatury oraz zaprezentuje uzyskane rezultaty.

2. Sformułowanie problemu

2.1. Ogólne rozwiązanie równania przewodnictwa

Rozważmy równanie Fouriera:

$$\nabla^2 T(\mathbf{x},t) = \frac{1}{a}\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{1}$$

gdzie: $T(\mathbf{x},t)$ jest temperaturą w punkcie $\mathbf{x}$ w chwili t, a dyfuzyjność cieplna ciała (współczynnik wyrównywania temperatury) oznaczona została przez a. Przyjmijmy teraz, że potrafimy wyznaczyć funkcję $u(k_n,\mathbf{x})$, za pomocą której zdefiniujmy transformatę temperatury $v(k_n,t)$ [11]:

$$v(k_n,t) = \int_\Omega T(\mathbf{x},t)\,u(k_n,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\Omega \tag{2}$$

gdzie: Ω – rozważany obszar, k_n – wartości własne.

Mnożąc obustronnie równanie (1) przez $u(k_n,\mathbf{x})$ i całkując po całym obszarze otrzymamy [6]:

$$\int_\Omega u(k_n,\mathbf{x})\,\nabla^2 T(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_\Gamma \left[u(k_n,\mathbf{x})\,\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial n} - T(\mathbf{x},t)\,\frac{\partial u(k_n,\mathbf{x})}{\partial n}\right]\mathrm{d}\Gamma +$$

$$+ \int_\Omega T(\mathbf{x},t)\,\nabla^2 u(k_n,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\Omega =$$

$$= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T(\mathbf{x}, t)\, u(k_n, \mathbf{x})\, \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{a} \frac{\partial v(k_n, t)}{\partial t} \tag{3}$$

gdzie: $\frac{\partial}{\partial n}$ – różniczkowanie wzdłuż normalnej zewnętrznej do brzegu ciała, Γ – brzeg obszaru Ω. Żądając teraz, aby funkcja $u(k_n, \mathbf{x})$ spełniała równanie Helmholtza, tj.:

$$\nabla^2 u(k_n, \mathbf{x}) + k_n^2\, u(k_n, \mathbf{x}) = 0 \tag{4}$$

zależność (3) przyjmie formę:

$$\int_{\Gamma} \left[u(k_n, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} - T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u(k_n, \mathbf{x})}{\partial n} \right] \mathrm{d}\Gamma - k_n^2\, v(k_n, t) =$$

$$= \frac{1}{a} \frac{\partial v(k_n, t)}{\partial t} \tag{5}$$

Aby funkcja $u(k_n, \mathbf{x})$ spełniała jednorodne warunki na brzegu ciała, powyższa całka powinna przyjąć następującą postać:

$$C(k_n, t, \mathbf{x}) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u(k_n, \mathbf{x})}{\partial n}\, \mathrm{d}\Gamma & \text{dla w.b. I rodz.} \\[2ex] \displaystyle\int_{\Gamma} u(k_n, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n}\, \mathrm{d}\Gamma & \text{dla w.b. II rodz.} \\[2ex] \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\alpha}{\lambda}\, u(k_n, \mathbf{x})\, T_f(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}\Gamma & \text{dla w.b. III rodz.} \end{cases} \tag{6}$$

gdzie: α – współczynnik wnikania ciepła, T_f – temperatura otoczenia, λ – współczynnik przewodzenia ciepła. Aby uprościć sytuację, założymy jeszcze, że warunki brzegowe nie zależą od czasu, wówczas cała funkcja $C(k_n, t, \mathbf{x})$ również nie zależy od czasu:

$$C(k_n,\mathbf{x}) = \begin{cases} -\displaystyle\int_\Gamma T(\mathbf{x})\,\frac{\partial u(k_n,\mathbf{x})}{\partial n}\,\mathrm{d}\Gamma & \text{dla w.b. I rodz.} \\[2ex] \displaystyle\int_\Gamma u(k_n,\mathbf{x})\,\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n}\,\mathrm{d}\Gamma & \text{dla w.b. II rodz.} \\[2ex] \displaystyle\int_\Gamma \frac{\alpha}{\lambda} u(k_n,\mathbf{x})\,T_f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\Gamma & \text{dla w.b. III rodz.} \end{cases} \tag{7}$$

Przy takich założeniach równanie (5) przyjmie następującą, ostateczną formę:

$$C(k_n,\mathbf{x}) - k_n^2\,v(k_n,t) = \frac{1}{a}\,\frac{\partial v(k_n,t)}{\partial t} \tag{8}$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego można łatwo uzyskać metodą uzmienniania stałej [6]. Ostatecznie otrzymuje się:

$$v(k_n,t) = \frac{C(k_n,\mathbf{x})}{k_n^2} + \left[v_0 - \frac{C(k_n,\mathbf{x})}{k_n^2}\right] \exp\left(-\,k_n^2\,a\,t\right) \tag{9}$$

gdzie: v_0 jest transformatą warunku początkowego:

$$v_0 = \int_\Omega T(\mathbf{x},0)\,u(k_n,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega T_0(\mathbf{x})\,u(k_n,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\Omega \tag{10}$$

Transformacja odwrotna do całki (2) pozwala obliczyć temperaturę $T(\mathbf{x},t)$ za pomocą następującej formuły [8,11]:

$$T(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(k_n,t)}{N(k_n)}\,u(k_n,\,\mathbf{x}) \tag{11}$$

gdzie: $N(k_n)$ jest tzw. kwadratem normy przekształcenia całkowego. Korzystając z warunku ortogonalności funkcji własnych, łatwo wykazać, że obowiązuje następująca zależność [8,11]:

$$N(k_n) = \int_\Omega u^2(k_n,\,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\Omega \tag{12}$$

Jak już wspomniano wcześniej, najtrudniejszym etapem przedstawionej metody jest etap rozwiązywania równania Helmholtza (4), a właściwie poszukiwanie wartości własnych k_n. Ten problem będzie dokładniej przedyskutowany w dalszej części niniejszego artykułu. Pozostałe szczegóły uzyskiwania rozwiązania (11) będą przedstawione w kolejnych publikacjach przygotowywanych do druku.

2.2. Równanie Helmholtza

Dla uproszczenia notacji równaniu Helmholtza nadano postać:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{13}$$

gdzie: ∇^2 jest operatorem Laplace'a, u – poszukiwane pole, k – wartości własne. Problem znalezienia wartości własnych zagadnienia brzegowego polega na poszukiwaniu takich wartości (zazwyczaj nieskończonego ciągu wartości) współczynnika k, które pozwalają otrzymać nietrywialne rozwiązania równania (13) spełniające jednorodne warunki brzegowe:

$$\begin{gathered} u = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_2 \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u \quad \text{na} \quad \Gamma_3 \end{gathered} \tag{14}$$

gdzie: Γ_1, Γ_2, Γ_3 – są odpowiednio brzegami obszaru Ω, na których sformułowane są warunki brzegowe odpowiednio I, II, III rodzaju.

2.3. Całkowa postać rozwiązania równania Helmholtza

Równanie całkowe można wyprowadzić z równań metody ważonej residualnej (MWR) [2, 3], przyjmując jako funkcje wagowe tzw. rozwiązanie podstawowe oraz jego pochodną wzdłuż normalnej do brzegu ciała.

Alternatywnie, równanie całkowe można uzyskać także poprzez wykorzystanie tzw. zasady wzajemności [6,7], czyli symetrycznej tożsamości Greena. Z matematycznego punktu widzenia zasada wzajemności jest formułą dwukrotnego całkowania przez części i stanowi związek między całką po obszarze i po jego brzegu. Zasada wzajemności jest spełniona przez dwa dowolne pola, np. u i u^*:

$$\int_\Omega \left(u\ \nabla^2 u^* - u^*\ \nabla^2 u\right) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \left(u\ \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\ \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\Gamma \tag{15}$$

Jako pole u przyjmiemy poszukiwane pole, zaś za u^* przyjmiemy tzw. rozwiązanie podstawowe. Wstawiając do równania (15) zależność:

$$\nabla^2 u = -k^2 u \tag{16}$$

otrzymamy:

$$\int_\Omega \left(u\ \nabla^2 u^* + u^*\ k^2 u\right) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \left(u\ \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\ \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\Gamma \tag{17}$$

Podstawiając dalej mamy:

$$\int_\Omega \left(u\ \nabla^2 u^* + k^2 u^* u\right) \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\lambda} \int_\Gamma (u^* q_u - u q^*)\, \mathrm{d}\Gamma \tag{18}$$

gdzie: q_u – jest to analog strumienia ciepła. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\int_\Omega \left(u\ \nabla^2 u^* + k^2 u^* u\right) \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{\lambda} \int_\Gamma u q^* \mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{\lambda} \int_\Gamma u^* q_u \mathrm{d}\Gamma \tag{19}$$

W zależności od wyboru rozwiązania podstawowego otrzymamy różne postaci równania całkowego.

2.4. Równanie całkowe z funkcją Henkela jako rozwiązaniem podstawowym

Weźmy pod uwagę rozwiązanie podstawowe z funkcją Henkela, następującej postaci:

$$u^*(\xi,x) = \begin{cases} -\frac{i}{4}{H_0}^{(2)}(kr) & 2-\text{wym} \\ \\ \frac{1}{4\pi r}\exp(-ikr) & 3-\text{wym} \end{cases} \tag{20}$$

które spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\nabla^2 u^* + k^2 u^* = \delta$$

gdzie δ – delta Diraca. Podstawiając powyższą zależność do (19) otrzymamy następującą postać równania całkowego:

$$c(\xi)u(\xi) + \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma q^*(\xi,x)u(x)\mathrm{d}\Gamma - \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma u^*(\xi,x)q_u(x)\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{21}$$

gdzie c to współczynnik zależny od położenia punktu ξ.

Wadą tego sformułowania jest zależność rozwiązania podstawowego od wartości własnych, które są przez nas poszukiwane, co wiąże się ze znacznym utrudnieniem obliczeń.

2.5. Równanie całkowe z rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a

Weźmy pod uwagę rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a, które ma postać:

$$u^*(\xi,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln r & 2-\text{wym} \\ \\ \frac{1}{4\pi r} & 3-\text{wym} \end{cases} \tag{22}$$

Wykorzystując fakt, że powyższe rozwiązanie podstawowe spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\nabla^2 u^* = \delta \tag{23}$$

otrzymamy rozwiązanie równania Helmholtza w postaci:

$$c(\xi)u(\xi) + \frac{1}{\lambda}\int_{\Gamma} q^{*}(\xi,x)u(x)\mathrm{d}\Gamma + \\ -\frac{1}{\lambda}\int_{\Gamma} u^{*}(\xi,x)q_{u}(x)\mathrm{d}\Gamma + k^{2}\int_{\Omega} u^{*}(\xi,x)u(x)\mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (24)$$

Ponieważ otrzymane równanie rozwiązywane jest numerycznie, co wymaga dyskretyzacji, główną trudnością jest występowanie całki objętościowej. W dalszym ciągu zostanie zastosowana metoda wielokrotnej zasady wzajemności przekształcającą tę całkę w całkę powierzchniową, znacznie prostszą do dyskretyzacji.

2.6. Wielokrotna zasada wzajemności

W tym rozdziale przedstawiono ideę wielokrotnej zasady wzajemności (WZW). Technika ta pozwala przekształcić całkę po obszarze Ω występującą w równaniu całkowym (24) w równoważne jej całki po brzegu ciała.

Oznaczmy indeksem „0" rozwiązanie podstawowe zdefiniowane równaniem (22). Wtedy całkę po obszarze zapiszemy w postaci:

$$D_0 = \int_{\Omega} u^{*(0)} u \mathrm{d}\Omega \qquad (25)$$

Zacznijmy od wprowadzenia rozwiązania podstawowego pierwszego rzędu, czyli funkcji $u^{*(1)}$ związanej z klasycznym rozwiązaniem podstawowym:

$$\nabla^2 u^{*(1)} = u^{*(0)} \qquad (26)$$

Jednocześnie mamy:

$$q^{*(1)} = -\lambda \frac{\partial u^{*(1)}}{\partial n} \qquad (27)$$

Wykorzystując symetryczną tożsamość Greena, przedstawimy całkę D_0

w następującej postaci:

$$D_0 = \int_\Omega u^{*(0)} u \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \nabla^2 u^{*(1)} u \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \tfrac{1}{\lambda} \int_\Gamma \left(u^{*(1)} q_u - q^{*(1)} u \right) \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega u^{*(1)} \nabla^2 u \mathrm{d}\Omega = \tag{28}$$

$$= \tfrac{1}{\lambda} \int_\Gamma \left(u^{*(1)} q_u - q^{*(1)} u \right) \mathrm{d}\Gamma + D_1$$

Zatem całkę D_0 możemy zapisać:

$$D_0 = \frac{1}{\lambda} \int_\Gamma (u^{*(1)} q_u - q^{*(1)} u) \mathrm{d}\Gamma + D_1 \tag{29}$$

Różnica między całkami D_1 i D_0 sprowadza się do innego mnożnika i nnego rzędu rozwiązania podstawowego:

$$D_1 = -k^2 \int_\Omega u^{*(1)} u \mathrm{d}\Omega \tag{30}$$

Przeprowadzając dalej proces całkowania przez części całka D_0 będzie sprowadzona do następującego szeregu całek po brzegu Γ [10]:

$$D_0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j k^{2j} \int_\Gamma (u^{*(j+1)} q_u - q^{*(j+1)} u) \mathrm{d}\Gamma \tag{31}$$

Po przekształceniach algebraicznych, uwzględniając równania (24) i (31), otrzymuje się następującą reprezentację brzegową rozwiąznia równania Helmholtza [9]:

$$\lambda c_i u_i + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j k^{2j} \int_\Gamma q^{*(j)} u \mathrm{d}\Gamma = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j k^{2j} \int_\Gamma u^{*(j)} q_u \mathrm{d}\Gamma \tag{32}$$

Dzieląc brzeg Γ na elementy brzegowe i wprowadzając tzw. macierze wpływu [9] przeprowadza się dyskretyzację równania (32). W ten sposób równanie całkowe (32) przekształca się w układ równań algebraicznych:

$$\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j k^{2j} \mathbf{H}^j \right\} \mathbf{U} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j k^{2j} \mathbf{G}^j \right\} \mathbf{Q}_u \tag{33}$$

„Zbierając" odpowiednio macierze wpływu $\mathbf{H}_j$ i $\mathbf{G}_j$, można równanie (33) zapisać w postaci:

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GQ}_u \tag{34}$$

W praktyce występujące szeregi obcina się, dbając o to, aby odrzucona reszta była niewielka, dlatego współczynniki macierzy są wyrażone jako:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{H}] &= [\mathbf{H}^0] - k^2[\mathbf{H}^1] + \ldots + (-k^2)^m[\mathbf{H}^m] \\
[\mathbf{G}] &= [\mathbf{G}^0] - k^2[\mathbf{G}^1] + \ldots + (-k^2)^m[\mathbf{G}^m]
\end{aligned} \tag{35}$$

3. Poszukiwanie wartości własnych

Jak już wspomniano wcześniej, obliczanie wartości własnych zagadnienia brzegowego polega na poszukiwaniu takich wartości współczynnika k, dla których istnieją nietrywialne rozwiązania równania Helmholtza spełniające jednorodne warunki brzegowe. Uwzględniając warunki brzegowe (14) w równaniu (34) otrzymamy:

$$[\mathbf{H}_1 \;\; \mathbf{H}_2 \;\; \mathbf{H}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_n \end{bmatrix} = [\mathbf{G}_1 \;\; \mathbf{G}_2 \;\; \mathbf{G}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n \\ \mathbf{0} \\ \alpha\mathbf{U}_n \end{bmatrix} \tag{36}$$

Przekształcając ten układ równań mamy:

$$[-\mathbf{G}_1 \;\; \mathbf{H}_2 \;\; (\mathbf{H}_3 - \alpha\mathbf{G}_3)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n \\ \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{37}$$

czyli:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0} \tag{38}$$

gdzie $A = \{-\mathbf{G}_1 \ \ \mathbf{H}_2 \ \ (\mathbf{H}_3 - \alpha\mathbf{G}_3)\}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n \\ \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \tag{39}$$

Warunkiem otrzymania nietrywialnych rozwiązań układu (38) jest zerowanie się wyznacznika głównego macierzy A:

$$\det \mathbf{A} = 0 \tag{40}$$

To pozwala nam wyznaczyć wartości własne.

4. Przykład obliczeniowy

Zagadnienie obliczania wartości własnych zilustrowano następującym przykładem. Jest rozpatrywane przewodzenie ciepła w prostokącie, o długościach boków $L_x = 1m$, $L_y = 1m$, z uwzględnieniem różnych warunków brzegowych. Bierzemy pod uwagę cztery przypadki, a mianowicie:

- przypadek 1 – ustalamy na całym brzegu warunek drugiego rodzaju $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$,
- przypadek 2 – na prawym brzegu ustalamy warunek pierwszego rodzaju $u = 0$, na pozostałym $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$,
- przypadek 3 – na prawym brzegu ustalamy jednorodny warunek trzeciego rodzaju, na pozostałym $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$,
- przypadek 4 – na prawym brzegu ustalamy jednorodny warunek trzeciego rodzaju, na lewym brzegu jednorodny warunek pierwszego rodzaju, na pozostałym $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Dla każdego z tych przypadków znane jest rozwiązanie analityczne. Pole temperatury w prostokącie można łatwo przedstawić jako szereg nieskończony funkcji własnych. Sumowanie przebiega po kolejnych wartościach własnych [4]. Dla przypadku 1 wartości własne mają następującą postać:

$$k = \pi\sqrt{\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2} \qquad i,j = 0,1,\ldots \tag{41}$$

W przypadku 2 wartości własne są następujące:

$$k = \pi\sqrt{\frac{1}{{L_x}^2}\left(\frac{1}{2} + i\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2} \qquad i,j = 0,1,\ldots \tag{42}$$

Dla przypadku 3 rozwiązanie analityczne zagadnienia na wartości własne ma postać:

$$k = \sqrt{{a_i}^2 + (j\pi)^2} \qquad i,j = 0,1,\ldots \tag{43}$$

gdzie a_i - to kolejne wartości własne dla symetrycznej płyty, przy warunku brzegowym trzeciego rodzaju.

Dla przypadku 4 rozwiązanie analityczne ma postać:

$$k = \sqrt{{b_i}^2 + (j\pi)^2} \qquad i,j = 0,1,\ldots \tag{44}$$

gdzie b_i – to kolejne wartości własne dla płyty, przy warunku brzegowym pierwszego i trzeciego rodzaju.

Ponieważ w przypadku WZW o dokładności metody decyduje odpowiedni dobór liczby wyrazów szeregu, początkowo przetestowano, jak zachowują się rozwiązania dla 5, 10, 15, 30 wyrazów w szeregu. Porównanie wartości wyznacznika, dla trzech wartości k, znajduje się w tabeli 1, dla większej ilości wartości jest przedstawione na wykresie 1.

Uznano, że dostateczną liczbą wyrazów w szeregu jest 15, przy tej wartości wyniki dość dobrze odpowiadają rozwiązaniom analitycznym. Zwiększenie tej liczby nie powodowało zmian wyników.

Sprawdzono również, jaki wpływ na rozwiązanie ma dyskretyzacja. Zostały określone trzy dyskretyzacje:

Tabela 1

Porównanie wartości wyznacznika dla różnych ilości wyrazów szeregu

k	Ilość wyrazów w szeregu			
	5	10	15	30
4.4476	2.4410E-32	1.1735E-34	1.0078E-34	1.0078E-34
4.4428	2.0429E-32	1.3907E-33	1.3743E-33	1.3743E-33
4.4487	2.5394E-32	-1.7367E-34	-1.9028E-34	-1.9028E-34

Tabela 2

Porównanie wartości własnych dla różnych dyskretyzacji

Rozw. analityczne	1 dyskretyzacja	2 dyskretyzacja	3 dyskretyzacja
3.1415	3.1419	3.1423	3.1427
6.2831	6.2837	6.2840	6.2853
7.0428	7.0180	7.0420	7.0361

- 1 dyskretyzacja – to 100 elementów brzegowych rozmieszczonych nierównomiernie, tzn. na lewym i prawym brzegu jest po 10 elementów brzegowych, na górnym i dolnym brzegu jest po 40 elementów brzegowych,
- 2 dyskretyzacja – to 100 elementów brzegowych rozmieszczonych równomiernie,
- 3 dyskretyzacja – to 80 elementów brzegowych rozmieszczonych równomiernie.

Porównanie wartości własnych dla tych dyskretyzacji znajduje się w tabeli 2.

Najlepsza okazała się dyskretyzacja pierwsza, dla której wyniki były najbliższe rozwiązaniom analitycznym. W rozważanym przykładzie wyznaczono

Tabela 3

Zestawienie wyników

Przypadek 1		Przypadek 2		Przypadek 3		Przypadek 4	
Rozw. anali.	Rozw. WZW	Rozw. anali.	Rozw. WZW	Rozw. anali.	Rozw. WZW	Rozw. anali.	Rozw. WZW
0	0	1.5708	1.5715	0.791	0.7911	1.9585	1.9613
-	2.1358	-	2.1370	-	2.1358	-	2.1350
3.1415	3.1423	3.5124	3.5133	3.2396	3.2403		3.7030
4.4428	4.4444	4.7128	4.7142	3.3743	3.3751	4.875	4.8775
-	5.2450	-	5.2457	4.6103	4.6120	-	5.2473
6.2831	6.2846	5.6636	5.6654	-	5.2450	5.799	5.8021
7.0248	7.0429	6.4766	6.4783	6.3327	6.3342	6.581	6.5827
		-	7.0465	6.4073	6.4091	-	7.0463
		7.854	7.8563	-	7.0430	7.9542	7.9565
				7.136	7.1350		

rozwiązania analityczne dla każdego z rozpatrywanych przypadków, co pozwoliło ocenić dokładność obliczeń.

Otrzymane wartości własne obliczane za pomocą WZW są przedstawione w tabeli 3, wraz z wartościami obliczonymi w sposób analityczny.

Otrzymane wyniki obliczone numerycznie dość dobrze odpowiadają wynikom otrzymanym w sposób analityczny. Niezależnie od warunków brzegowych, pojawiły się wartości, których nie ma w rozwiązaniu analitycznym.

Te „obce pierwiastki" mają w przybliżeniu tę samą wartość dla każdego rozpatrywanego przypadku. Świadczyć to może, że ich występowanie związane jest z postacią równania. Próby wyjaśnienia tego, skąd biorą się te obce pierwiastki, są przedmiotem dalszej analizy. Otrzymane wyniki będą przedstawione w następnych publikacjach.

5. Podsumowanie

Celem tej publikacji jest przedstawienie metody pozwalającej na znalezienie wartości własnych. Zastosowana została metoda WZW. Metodę tę przedstawiono w rozdziale 2.6. Z matematycznego punktu widzenia WZW polega na wykonaniu całkowania przez części nieskończoną liczbę razy, przy wykorzystaniu tzw. rozwiązań podstawowych wyższych rzędów. WZW wykorzystująca klasyczne rozwiązanie podstawowe pozwala na otrzymanie macierzy, która bezpośrednio zależy od wartości własnych. Prowadzi to do znacznego uproszczenia analizy i oszczędności czasu obliczeń. Oprócz głównej metody, która pozwala znaleźć wartości własne, porównano w przykładzie rozwiązania analityczne z rozwiązaniami numerycznymi. Mimo że wystąpiły różnice wyników, ich dokładność jest wystarczająca. Procedury wykorzystane w metodzie są efektywne, zbieżne, charakteryzują się dużą wydajnością. Opracowana metoda znajduje wartości własne, co jest zilustrowane przykładem, ale oprócz tego pojawiają się obce pierwiastki, które będą przedmiotem dalszej analizy. Otrzymane wyniki w przykładzie opisanym wcześniej odpowiadają w przybliżeniu wynikom otrzymanym w sposób analityczny. Można więc powiedzieć, że daje ona dobre efekty.

Literatura

1. C. A. Brebbia, *The Bundary Element Method for Engineers,* Pentech Press, London 1978.

2. C. A. Brebbia, J. Dominguez, *Boundary Elements – An Introductory Course,* Comp. Mech. Publ. and Mc Graw-Hill, Southampton 1992.

3. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering,* Springer-Verlag, Berlin 1984.

4. S. J. Gdula, *Przewodzenie ciepła*, PWN, Warszawa 1984.

5. M. A. Jaswon, G. T. Symm, *Integral Equation Method in Potential Theory and Elastostatics,* Academic Press, London 1977.

6. G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers,* McGraw-Hill, New York 1968.

7. O. M. Ladyzheuskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Imcompressible Flow,* Gordon and Breach, New York 1963.

8. P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics,* McGraw-Hill, New York 1953.

9. A. J. Nowak, *Metoda elementów brzegowych z zastosowaniem wielokrotnej zasady wzajemności,* Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Energ. **116**, Gliwice 1993.

10. A. J. Nowak, C. A. Brebbia, *Solving Helmholtz equation by Boundary Elements using the Multiple Reciprocity Method,* w: G. M. Carlomagno, C. A. Brabbia, ed., *Computers and Experiments in Fluid Flow,* Comp. Mech. Publ. and Springer-Verlag, Southampton 1989, 265-270.

11. M. N. Özişik, *Boundary Value Problems of Heat Conduction,* International Texbook Comp., Scranton 1968.

12. J. Szargut, ed., *Numeryczne modelowanie pól temperatury,* WNT, Warszawa 1992.

13. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method,* Mc Graw-Hill, New York 1977.

Katarzyna Komorowska
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice
e-mail: komorek@zeus.polsl.gliwice.pl

Andrzej J.Nowak
Instytut Techniki Cieplnej
Politechnika Śląska
ul.Konarskiego 22
44-100 Gliwice
e-mail: nowak@itc.ise.polsl.gliwice.pl

Abstract

The paper presents a method for calculation of the eigenvalues in the Helmholtz's equation. It applies the multiple reciprocity method, which leads to the integral equation consisting of the boundary integrals only. In the obtained integral equation utilization of either Henkel function or classical fundamental solution of Laplace equation is discussed. Also, the dissertation discusses in detail a manner of transformation of the volume integral into a boundary integral as well as the way of calculation of eigenvalues. Simple example has been chosen to illustrate the mentioned above aspects.