ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

JÓZEF PARCHAŃSKI

POMIAR SIŁY ZMIENNEJ W CZASIE

ELEKTRYKA

Z. 89
GLIWICE
1984

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 782

JÓZEF PARCHAŃSKI

POMIAR SIŁY ZMIENNEJ W CZASIE

GLIWICE 1983

OPINIODAWCY:
Prof. zw. dr inż. Adam Morecki
Prof. zw. mgr inż. em. Edmund Romer
Doc. dr hab. inż. Józef Czajkowski

KOLEGIUM REDAKCYJNE
Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), *Zofia Cichowska* (redaktor działu),
Elżbieta Stinzing (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
Anna Błażkiewicz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4688

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+80 Ark. wyd. 7,8 Ark. druk. 7 75 Papier offset. kl. III. 70x100 70 g
Oddano do druku 17.11.1983 Podpis. do druku 22.12.1983 Druk ukończ. w styczniu 1984
Zam. 1725/83 Z-23
Cena zł 78,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A_n	- amplituda n-tej postaci ustalonego przemieszczenia
A_o	- amplituda drgań w czasie t = 0
A_t	- amplituda drgań po czasie t
a	- przyspieszenie
$a_n(x)$	- n-ta postać funkcji zmiennej przestrzennej przyspieszenia
$a^*(x)$	- unormowana wartość przyspieszenia w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego
$a^*(x,t)$	- chwilowa wartość $a^*(x)$
B	- tłumienie wiskotyczne
B_n	- stałe zależne od warunków brzegowych
b	- stopień tłumienia
C	- pojemność
C_n	- stałe zależne od warunków początkowych
c	- prędkość propagacji fali odkształceniowej w elemencie sprężystym
D_n	- stałe zależne od warunków początkowych
E	- moduł sprężystości wzdłużnej (moduł Younga)
F	- siła
F_m	- maksymalna wartość siły
F(t)	- chwilowa wartość siły
F(x,t)	- chwilowa wartość siły w przekroju o współrzędnej x elementu sprężystego
$F^*(x,t)$	- unormowana F(x,t)
$F(\omega)$	- widmo częstotliwościowe siły
$F^*(\omega)$	- unormowane widmo częstotliwościowe siły
f	- częstotliwość
f_g	- częstotliwość graniczna górna
$G(j\omega)$	- transmitancja widmowa
G(s)	- transmitancja operatorowa

$G(\omega)$ – charakterystyka częstotliwościowa amplitudowa

$g(t)$ – odpowiedź impulsowa

$H(s)$ – transformata odpowiedzi skokowej

$h(t)$ – odpowiedź skokowa

$K_1,\ K_2$ – współczynniki odbicia fal od początku i od końca

$k, k_1, k_2, \ldots$ – współczynniki proporcjonalności

k_d – współczynnik dynamiczny

k_s – sztywność elementu sprężystego

L – indukcyjność; długość bazy tensometru

l – długość elementu sprężystego

m – masa

$P(\omega)$ – gęstość widmowa mocy wyrażona za pomocą pulsacji dodatnich

R – rezystancja

r – promień krzywizny

S – pole powierzchni przekroju poprzecznego

S_F – powierzchnia impulsu siły

T – okres; stała czasowa

T_o – okres drgań naturalnych układu nietłumionego

t – czas

$u(t)$ – chwilowa wartość napięcia

$u(x,t)$ – chwilowa wartość napięcia na wyjściu przetwornika siły, którego przetwornik pośredniczący zamocowano w otoczeniu współrzędnej x elementu sprężystego

$u^*(x,t)$ – unormowana $u(x,t)$

v – prędkość

$v_n(x)$ – n-ta postać funkcji zmiennej przestrzennej prędkości

$v^*(x)$ – unormowana wartość prędkości w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego

$v^*(x,t)$ – chwilowa wartość $v^*(x)$

w – przemieszczenie względem stałego punktu odniesienia

$w_n(x)$ – n-ta postać funkcji zmiennej przestrzennej przemieszczenia

$w^*(x)$ – unormowana wartość przemieszczenia w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego

$w^*(x,t)$ – chwilowa wartość $w^*(x)$

x – zmienna przestrzenna

X_m – reaktancja mechaniczna

Z – impedancja

Z_f – impedancja falowa

Z_m – impedancja mechaniczna

Z_{mf} – impedancja mechaniczna falowa

$1(t)$ – skok jednostkowy

δ^o_{dop} – błąd względny dopuszczalny

$\delta_d(t)$ – błąd dynamiczny chwilowy

$\delta^*_d(t)$ – unormowany $\delta_d(t)$

Δ – niedokładność; różnica skończona

ε – odkształcenie względne

$\varepsilon(x,t)$ – chwilowa wartość odkształcenia względnego w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego

ν – pulsacja własna elementu sprężystego; stała Poissona materiału

ν_o – pulsacja naturalna elementu sprężystego

ν_1 – pulsacja pierwszej postaci drgań własnych

ν_n – pulsacja n-tej postaci drgań własnych

ν_{on} – pulsacja n-tej postaci drgań naturalnych

ρ – gęstość

σ – naprężenie mechaniczne

$\sigma_n(x)$ – n-ta postać funkcji zmiennej przestrzennej naprężenia mechanicznego

$\sigma^*(x)$ – unormowana wartość naprężenia mechanicznego w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego

$\sigma^*(x,t)$ – chwilowa wartość $\sigma^*(x)$

τ – opóźnienie; czas trwania impulsu

τ_n – czas narastania skoku rzeczywistego

φ – kąt przesunięcia fazowego; argument transmitancji

ω – pulsacja

ω_o – pulsacja naturalna

ω_d – pulsacja graniczna dolna przetwornika

ω_g – pulsacja graniczna górna przetwornika

ω_{gs} - pulsacja graniczna górna sygnału

ω_{τ} - pulsacja podstawowa pojedynczego impulsu

1. WSTĘP

1.1. Stan zagadnienia

Temat pracy "Pomiar siły zmiennej w czasie" obejmuje problemy metrologiczne pomiaru siły zmiennej, tj. odwzorowanie jej zmienności w funkcji czasu lub odwzorowanie wybranego funkcjonału takiej zmienności na podstawie wyniku pomiaru. Problemy takie mogą być opisywane i skutecznie analizowane za pomocą uproszczonych modeli, tj. liniowych układów fizycznych o stałych skupionych, czyli elementarnej teorii pomiarów dynamicznych, gdy zmiany siły są względnie wolne (górna częstotliwość graniczna siły jest mała). Formułowane kryteria warunków dokładnego przetwarzania i oceny dokładności wyników są wówczas dostatecznie ścisłe do celów praktycznych. Gdy jednak szybkość zmian siły zwiększa się (górna częstotliwość graniczna rośnie), rozbieżność między ocenami formułowanymi w oparciu o uproszczoną teorię a wynikami otrzymanymi doświadczalnie powiększa się i osiąga tak wysoki poziom, że teoria staje się nieużyteczna (nawet myląca). Modele elementarnej teorii oparte są na założeniu, że fizyczne obiekty materialne, które przenoszą siły, są układami doskonale sztywnymi. Z założenie wynika możność np. skupienia masy w odpowiednich punktach czy możność przesuwania siły wzdłuż jej kierunku działania. Modele takie nie prowadzą do błędów przy pomiarach statycznych, są użyteczne i potwierdzają się przy pomiarach sił wolnozmiennych. Natomiast pomiary sił szybkozmiennych planowane i interpretowane w oparciu o takie modele dają wyniki niezgodne z rzeczywistością. Inne uproszczenie modeli polegają na przyjęciu założenia o jednorodności obiektów materialnych ze względu na rozkład naprężeń mechanicznych oraz ich izotropowość.

Pomiar siły zmiennej jest pełny, gdy dotyczy miary chwilowej (przebiegu siły w funkcji czasu), tj. wyznaczenia chwilowej wartości siły w funkcji czasu. Może być ograniczony do badania wybranego funkcjonału jako miary, tj. pomiaru wybranej charakterystyki przebiegu, np. siły maksymalnej, stromości lub innej charakterystyki.

Potrzeba pomiaru czasowego przebiegu siły szybkozmiennej nabiera znaczenia w ostatnich kilkunastu latach. Pomiary siły zmiennej są szczególnie przydatne do optymalizacji dynamicznie obciążanych konstrukcji w takich urządzeniach, jak: młoty pneumatyczne, kowarki hydrauliczne, walcarki [64], koła zębate [40], górnicze urządzenia wyciągowe, maszyny zmęczeniowe [38], samoloty [35], rakiety itp.

Przetworniki i układy pomiarowe sił statycznych osiągnęły względnie wysoki poziom doskonałości. Opracowane zostały zasady konstrukcji czujników i przetworników. Podano sposoby minimalizowania błędu podstawowego i błędów dodatkowych. Opracowano system wzorców i procedurę wzorcowania. Niedokładność pomiarów siły statycznej może być rzędu ± 0,5%, ± 0,2%, a nawet mniejsza.

Dotychczasowe uproszczone modele zjawisk dynamicznych uniemożliwiały dostatecznie dokładną analizę zjawisk istotnych dla rzetelnego pomiaru siły zmiennej. Nie powstały wzorcowe przetworniki siły zmiennej ani nie opracowano zasad wzorcowania dynamicznego przetworników. Nie ma generatorów wzorcowych przebiegów siły o dużej częstotliwości i zadowalającej dokładności.

W publikowanych pracach podejmowane są jedynie opracowania cząstkowych zagadnień pomiaru siły zmiennej, chociaż ważne z punktu widzenia dokładności pomiaru. Poprawnie określono błędy dynamiczne spowodowane uśredniającymi właściwościami tensometrów [19] oraz spowodowane warstwą kleju łączącego tensometry z powierzchnią sprężystego elementu przetwornika siły [1]. Wystarczająco dokładnie oszacowano błędy wprowadzane przez wzmacniacz pomiarowy i przez przewody łączące mostek tensometryczny ze wzmacniaczem i przyrządami wskazującymi lub rejestrującymi [36]. Poprawnie oszacowano błędy rejestracji czasowego przebiegu siły za pomocą oscylografu i graficznej analizy oscylogramów [4]. Wyczerpująco przeanalizowano wpływ na błąd dynamiczny nieliniowej charakterystyki statycznej materiału rdzenia [16], wpływ wymiarów rdzenia [31] oraz wpływ tłumienia drgań przetwornika [13]. Na podstawie pracy [26], w sposób uproszczony (rozważanie poprawne tylko dla półnieskończonego elementu sprężystego), analitycznie określono amplitudę oraz czas trwania generowanego impulsu siły [23]. Przedstawiono praktyczną metodę pomiaru energii żerdzi wiertarek udarowych [24, 30]. Eksperymentalne wyniki wpływu odkształceń lokalnych w miejscu działania siły na dokładność pomiaru krótkotrwałych impulsów siły przedstawiono w pracy [25] bez podania uzasadnienia teoretycznego.

W literaturze [2, 5, 13, 19, 59, 65] przetworniki siły opisuje się jako obiekty liniowe drugiego rzędu. Przy takim uproszczonym modelu przetwornika zakłada się, że masa, sztywność i tłumienie są przestrzennie skupione, a matematyczny opis jest równaniem różniczkowym zwyczajnym o stałych współczynnikach. Właściwości dynamiczne przetworników siły w stanie ustalonym charakteryzuje się w dziedzinie częstotliwości za pomocą transmitancji przetwornika lub charakterystyk częstotliwościowych amplitudowej i fazowej. Zachowanie się przetwornika w stanach nieustalonych charakteryzuje się za pomocą charakterystyki skokowej lub impulsowej.

Wyniki analizy przedstawione w wymienionych pracach otrzymane zostały przy założeniu, że siły są generowane i przenoszone przez obiekty doskonale sztywne, a tylko w przetwornikowym elemencie sprężystym występuje odkształcenie. Odkształcenie tego elementu sprężystego jest przetwarzane na

sygnał elektryczny (np. za pomocą tensometru rezystancyjnego). Istnieje zatem niekonsekwencja. W analizie statycznej zakłada się odkształcenie sprężyste elementu przetwornikowego (czujnika) wprost proporcjonalne do działającej siły. Natomiast w analizie dynamicznej zakłada się idealnie sztywne elementy układu mechanicznego, a model przetwornika siły opisuje się za pomocą zastępczej masy skupionej, sprężyny o zastępczej sztywności i zastępczego tłumienia drgań masy.

Szczegółowo analizowane są układy oraz systemy pomiarowe stosowane do pomiarów wielkości dynamicznych. Wykazano, że obecnie programowane systemy pomiarowe, wykorzystujące elementy scalone, o dużej skali integracji i o częstotliwości granicznej rzędu wielu MHz, praktycznie nie powodują błędów dynamicznych w torze przesyłu, przetwarzania, rejestrowania i opracowania wyników pomiarowych, gdy są stosowane w pomiarach siły zmiennej o częstotliwości kilkunastu a nawet kilkudziesięciu kHz. Natomiast w stopniu niewystarczającym zbadano zjawiska zachodzące w przetworniku oraz na styku: pole zjawiska badanego - przetwornik. W przytoczonych publikacjach nie podjęto opracowania procedur wzorcowania przetworników siły zmiennej, ani nie uwzględniono zaburzenia dynamicznego, spowodowanego zainstalowaniem przetwornika siły w badanym obiekcie fizycznym.

Z literatury [18, 62] oraz materiałów konferencji naukowych [35, 50, 54, 55] wynika, że wg jednych autorów niedokładność pomiarów wybranych miar krótkotrwałych impulsów siły (udarów) nie przekracza (2...5)%, a wg innych wynosi (25...40)%, a nawet więcej. Nie rozstrzygnięte jest pytanie, czy znaczne różnice między przewidywanymi a zmierzonymi wielkościami wygenerowanego impulsu siły są skutkiem niedokładności teorii opisującej zachodzące zjawiska, czy też wynikają z błędnych zasad pomiarów odpowiednich wielkości takiego impulsu siły.

Analizę wpływu zjawiska falowego na błąd dynamiczny zarówno przy generowaniu, jak i przy pomiarze krótkotrwałego impulsu siły, skoku siły oraz szybkozmiennej siły harmonicznej po raz pierwszy podjął autor pracy [48, 50,...,56].

1.2. Cel pracy

Duże rozbieżności w ocenie dokładności pomiarów siły o dużej częstotliwości granicznej, np. krótkotrwałych impulsów siły (udarów), skłoniły autora pracy do podjęcia dokładniejszej analizy zjawisk fizycznych, występujących przy takich pomiarach.

W pracy będą - ze względu na kompletność analizy - scharakteryzowane również pomiary siły o małej częstotliwości zmian (quasi-statyczny rozkład naprężenia i odkształcenia). Znajdzie tu zastosowanie elementarna teoria pomiarów dynamicznych, ponieważ układ mechaniczny przetwornika siły można w tym przypadku z wystarczającą dokładnością opisać modelem o stałych skupionych i równaniem różniczkowym zwyczajnym. Takie uproszczenie ma zastosowanie, gdy częstotliwość graniczna zmian siły jest co najmniej o rząd mniejsza niż częstotliwość drgań własnych układu mechanicznego przetwornika siły i fizycznego obiektu badanego. Ta część pracy ma na celu scharakteryzowania specyficznych zagadnień, występujących przy pomiarze siły dynamicznej zgodnie z elementarną teorią pomiarów dynamicznych, a więc gdy teoria ta jest dostatecznie ścisła do opisu występujących zjawisk. Materiał tej części usprawiedliwiony jest ze względu na monograficzność opracowania i również dlatego, że granica zastosowania jednej i drugiej teorii nie jest ostra. Równocześnie oceny formułowane w pracy w oparciu o elementarną teorię są odniesieniem do wniosków, które są formułowane przy wykorzystaniu teorii falowej.

Głównym zagadnieniem pracy jest analiza zjawisk występujących w układach mechanicznych przy pomiarach siły o dużej częstotliwości zmian, powodującej dużą szybkość narastania naprężenia. Analiza ta będzie zmierzać do sformułowania warunków fizycznych, których spełnienie zapewni mierzenie siły ze znaną dokładnością. Do rozwiązania takiego zadania pomiarowego należy przyjąć dokładniejszy model zjawisk fizycznych, który uwzględni zjawiska falowe w materiałach konstrukcyjnych układu mechanicznego i ich właściwości przestrzenne (np. ciągły rozkład masy, sztywności, tłumienie, izotropowość materiału, warunki brzegowe oraz warunki początkowe). Właściwym modelem matematycznym jest w tym przypadku równanie różniczkowe cząstkowe liniowe, drugiego rzędu, o współczynnikach zależnych od zmiennej przestrzennej.

Analizowane zjawiska obejmują zagadnienie pomiarów wielkości nieelektrycznych dynamicznych metodami elektrycznymi, a konkretnie pomiarów siły zmiennej w czasie (okresowej, nieokresowej, udaru).

Wyniki pracy osiągnięto głównie dzięki teoretycznej analizie dokładniejszego modelu zjawisk fizycznych, występujących w układach mechanicznych podczas pomiaru siły zmiennej w czasie. Wybrane zjawiska badano doświadczalnie na fizycznych modelach w celu potwierdzenia zgodności z przewidywaniami teoretycznymi.

2. METROLOGICZNE MODELE PROPAGACJI SIŁY ZMIENNEJ W CZASIE

2.1. Wprowadzenie

W dziedzinie częstotliwości zmienność siły o przebiegu zdeterminowanym określa widmo amplitudowe [19, 37]. Na rys. 2.1a przedstawiono przykładowo wykresy unormowanego widma amplitudowego impulsu trójkątnego (wykres 1):

$$F^*(\omega) = \frac{F(\omega)}{F_m \tau} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{si}\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\omega}{\omega_\tau}\right)\right]^2, \tag{2.1}$$

impulsu sinusoidalnego (wykres 2):

$$F^*(\omega) = \frac{2}{\pi}\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_\tau}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_\tau}\right)^2}\right|, \tag{2.2}$$

impulsu prostokątnego (wykres 3):

$$F^*(\omega) = \left|\mathrm{si}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_\tau}\right)\right|, \tag{2.3}$$

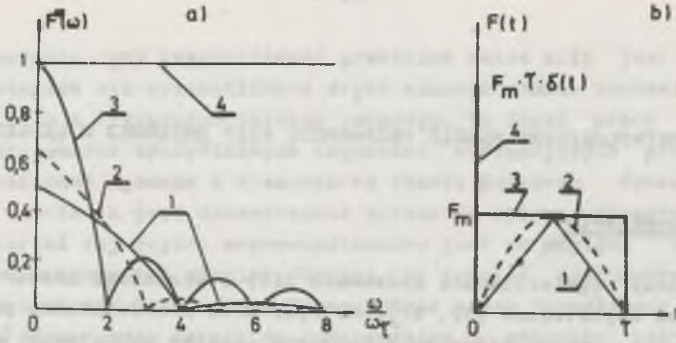
impulsu jednostkowego idealnego (wykres 4):

$$F^*(\omega) = 1. \tag{2.4}$$

We wzorach oznaczono przez F_m, τ odpowiednio wartość maksymalną i czas trwania impulsu siły, a przez ω_τ - podstawową pulsację widma impulsu siły, obliczoną ze wzoru:

$$\omega_\tau = \frac{\pi}{\tau}. \tag{2.5}$$

W tablicy 2.1 zestawiono maksima rzędnych widma amplitudowego impulsów siły, wyrażone w procentach odpowiednich składowych o pulsacji zerowej, przebiegów trójkątnego, sinusoidalnego i prostokątnego przy wybranych wartościach ω/ω_τ.



Rys. 2.1

a) wykresy unormowanego widma amplitudowego impulsów siły, b) przebiegi impulsów siły odpowiednio

1 - trójkątnego, 2 - sinusoidalnego, 3 - prostokątnego, 4 - idealnego

Tablica 2.1

Maksima rzędnych widma amplitudowego, wyrażone w % składowych przy $\omega = 0$

ω/ω_τ	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15	23	33
Przebieg trójkątny (wykres 1)	100				4,5				1,6			0,83			
Przebieg sinusoidalny (wykres 2)	100		6,7		2,8		1,6		1,0						
Przebieg prostokątny (wykres 3)	100	21,2		12,7		9,1		7,1		5,8	4,9		4,2	2,8	1,9

Stochastyczny, stacjonarny i ergodyczny przebieg siły charakteryzuje (w dziedzinie częstotliwości) gęstość widmowa mocy:

$$P_F(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\Delta\omega T} \int_0^T F^2(\omega,t)\,dt, \qquad (2.6)$$

gdzie:

$F(\omega,t)$ - chwilowa wartość siły stochastycznej o pulsacji ω,

$\Delta\omega$ - analizowane pasmo pulsacji,

T - czas uśredniania.

Na podstawie widma amplitudowego siły zdeterminowanej lub gęstości widmowej mocy siły stochastycznej wyznacza się częstotliwość graniczną siły[1]. Częstotliwość graniczna mierzonej siły determinuje wymaganie dynamiczne stawiane przetwornikom siły i układom pomiarowym. Częstotliwość graniczna przetwornika siły[2] i układu pomiarowego powinna być nie mniejsza niż częstotliwość graniczna mierzonej siły. Istotne dla tego modelu jest wprowadzenie zastępczej masy skupionej, zastępczej sztywności i zastępczego tłumienia drgań tej masy, co jest dokładnym modelem układów zbudowanych z elementów sztywnych.

Górną częstotliwość graniczną przetwornika przyjmuje się 5...10 razy mniejszą niż częstotliwość drgań mechanicznych własnych przetwornika, zależnie od stopnia tłumienia drgań mechanicznych i wymaganej dokładności pomiaru.

W dziedzinie czasu zmienność siły charakteryzuje amplituda i czas trwania impulsu siły lub maksymalna szybkość narastania naprężenia mechanicznego w obiekcie badanym. Wydaje się celowe dokonanie ilościowego podziału siły o określonej zmienności i sformułowanie kryteriów, których spełnienie zapewni pomiar siły o znanej dokładności. Uwzględniając szybkość i czas narastania siły (rys. 2.1) oraz maksymalne naprężenie dopuszczalne elementów obiektu, jak również wzory (2.1)...(2.5) i tabl. 2.1, autor proponuje rozróżnić:

a) siłę wolnozmienną (quasi-statyczną) o czasie narastania $\tau_n > 1$ s, co odpowiada szybkości narastania naprężenia mechanicznego $d\sigma/dt < 1$ GPa/s i granicznej częstotliwości siły $f_{gs} < 1{,}2$ Hz,

b) siłę szybkozmienną o czasie narastania $\tau_n = (1...10^{-3})$ s, co odpowiada szybkości narastania naprężenia $d\sigma/dt = (1...10^3)$ GPa/s i granicznej częstotliwości siły $f_{gs} = (1{,}2...1200)$ Hz,

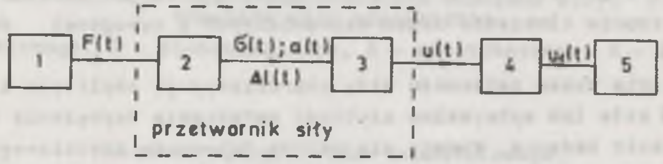
c) udar siły (krótkotrwały impuls siły) o czasie narastania $\tau_n < 1$ ms, co odpowiada szybkości narastania naprężenia $d\sigma/dt > 1$ TPa/s i granicznej częstotliwości siły $f_{gs} > 1{,}2$ kHz.

---

[1] Częstotliwością graniczną sygnału (siły) [19, 37, 65] nazywa się częstotliwość, powyżej której wartości rzędnych widma amplitudowego lub gęstości widmowej mocy sygnału są mniejsze niż umownie przyjęta wartość Δ_s. W pomiarach siły zmiennej autor proponuje $\Delta_s^o = 10{,}5$ lub 2% maksymalnej rzędnej widma.

[2] Częstotliwości graniczne (dolna i górna) przetwornika siły [19, 37] wyznaczają przedział, wewnątrz którego błąd dynamiczny przetwarzania nie przekracza określonej wartości Δ. W pomiarach siły zmiennej autor proponuje przyjąć błąd amplitudowy $\Delta_F^o = \pm 10$; ± 5 lub ± 2% i odpowiednio błąd fazowy $\Delta\varphi = 30$; 15 lub 5^o.

Siła jest wielkością fizyczną, którą mierzy się przez pomiar skutków, jakie wywołuje np. naprężenie mechaniczne, odkształcenia lub przyspieszenia. Pomiar przebiegu siły o krótkim czasie trwania lub o dużej częstotliwości granicznej jest możliwy tylko metodami elektrycznymi. Elektryczne zasady pomiaru siły polegają na tym, że te wielkości mechaniczne przetwarza się na sygnał elektryczny za pomocą odpowiednich przetworników pośredniczących (rys. 2.2). Na przykład do przetwarzania naprężenia mechanicznego na napięcie elektryczne stosuje się pośredniczące przetworniki magnetosprężyste, do odkształcenia powierzchniowego - przetworniki tensometryczne, do przetwarzania przemieszczenia - przetworniki pojemnościowe lub indukcyjnościowe, do prędkości - przetworniki elektromagnetyczne, a do przyspieszenia - przetworniki piezoelektryczne.



Rys. 2.2. Układ pomiaru siły metodą elektryczną
1 - obiekt badany, 2 - element sprężysty (czujnik), 3 - przetwornik pośredniczący, 4 - wzmacniacz, 5 - miernik, a(t) - przyspieszenie, F(t) - siła mierzona, Δl(t) - odkształcenie; u(t), $u_1(t)$ - napięcie elektryczne, σ(t) - naprężenie mechaniczne

Pierwszym członem przetwarzającym (czujnikiem) typowego przetwornika przydatnego do pomiaru siły zmiennej jest element sprężysty, który pod wpływem działającej siły jest odkształcany sprężyście (ściskany, rozciągany, zginany lub skręcany). Konstrukcyjnie element sprężysty może być rdzeniem przetwornika siły albo częścią konstrukcji mechanicznej badanego obiektu (urządzenia).

W punkcie 2.2, ze względu na kompletność analizy, przedstawione będą modele znane i tradycyjnie używane do opisu zjawisk dynamicznych. Modele te, stosowane dotychczas bez ograniczeń w dziedzinie pomiarów siły zmiennej, mogą być jednak tylko dostatecznie dokładne do opisu sił wolnozmiennych. W punkcie 2.3 i 2.4 przedstawione będą modele ogólne, które są konieczne do dokładnego opisu zjawisk zachodzących w pomiarach siły szybkozmiennej i udaru siły.

2.2. Model propagacji siły wolnozmiennej

Analizując właściwości dynamiczne przetwornika siły, sprężysty element przetwornika przedstawia się w literaturze [19, 37, 65, 67] tradycyjnie

za pomocą modelu pokazanego na rys. 2.3a, a ruch masy skupionej opisuje się za pomocą równania różniczkowego zwyczajnego:

$$m\ddot{w}(t) + B\dot{w}(t) + k_s w(t) = F(t), \tag{2.7}$$

gdzie:

B - oznacza tłumienie wiskotyczne drgań masy,
F(t) - zewnętrzną siłę wymuszającą,
k_s - sztywność sprężyny (zastępczą sztywność elementu sprężystego),
m - masę skupioną elementu sprężystego,
w(t) - chwilową wartość przemieszczenia masy skupionej.

Oznaczając $\nu_0 = \sqrt{\frac{k_s}{m}}$ - pulsacja naturalna drgań własnych nietłumionych masy m, $b = \frac{B}{2\sqrt{k_s m}} = \frac{B}{2m\nu_0}$ - stopień tłumienia, $k = \frac{1}{k_s}$ - wzmocnienie statyczne, otrzymuje się wyrażenie na transmitancję operatorową przetwornika siły przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(s) = \frac{W(s)}{F(s)} = \frac{k\nu_0^2}{s^2 + 2b\nu_0 s + \nu_0^2} \tag{2.8}$$

oraz wzory określające charakterystyki częstotliwościowe unormowaną amplitudową i fazową:

$$\left.\begin{aligned} G^*(\omega) &= \frac{W_m(\omega)}{kF_m(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\nu_0}\right)^2\right]^2 + \left(2b\frac{\omega}{\nu_0}\right)^2}} \\ \varphi(\omega) &= -\mathrm{arctg}\,\frac{2b\nu_0\omega}{\nu_0^2 - \omega^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

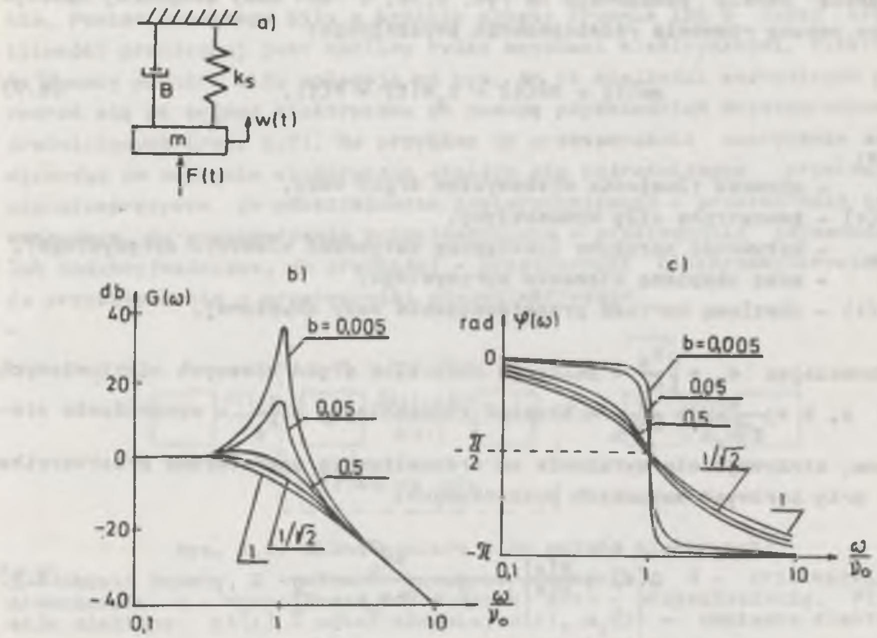
gdzie:

$F_m(\omega)$, $W_m(\omega)$ - oznaczają amplitudy odpowiednio siły i przemieszczenia o pulsacji $\omega = 2\pi f$.

Przykładowe charakterystyki częstotliwościowe przetwornika siły przedstawia rys. 2.3b,c.

Ze wzoru (2.9) oraz z rys. 2.3b wynika, że ekstremum (maksimum) charakterystyki amplitudowej przetwornika siły występuje tylko dla $b < 1/\sqrt{2}$ i zachodzi, gdy $\omega/\nu_0 = \sqrt{1-2b^2} < 1$. Maksymalna wartość $G(\omega)$ wynosi:

$$G_{max}(\omega) = \frac{1}{2b\sqrt{1 - b^2}}, \tag{2.10}$$



Rys. 2.3

a) model przetwornika drugiego rzędu o stałych skupionych, b) charakterystyki częstotliwościowe amplitudowe, c) fazowe

przy czym

gdy $b \to 0$, $G_{max}(\omega) \to \infty$ przy $\omega/\nu_o = 1$.

Na wymuszenie idealnym skokiem siły

$$F(t) = F_m 1(t), \tag{2.11}$$

dla tłumienia $b < 1$, jest odpowiedź [19]:

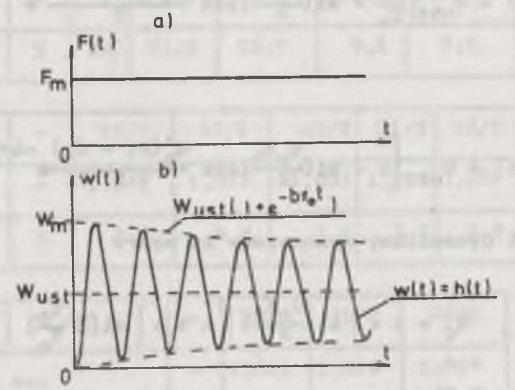
$$h(t) = w(t) = w_{ust}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} e^{-b\nu_o t} \sin(\nu t + \varphi)\right] 1(t), \tag{2.12}$$

gdzie:

$w_{ust} = \frac{F_m}{k_s}$ - oznacza ustaloną przemieszczenie skupionej masy m przy działaniu siły o wartości F_m,

$\nu = \nu_o \sqrt{1 - b^2}$ - pulsacje drgań własnych tłumionych,

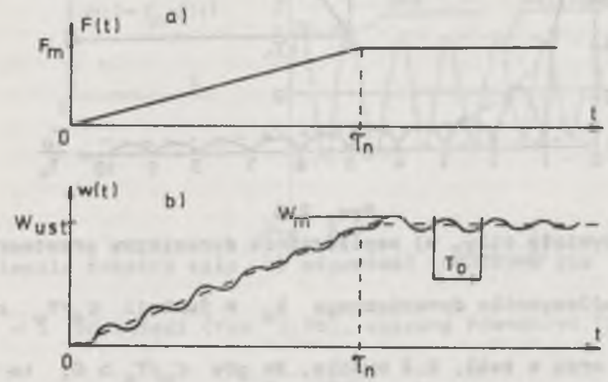
$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1 - b^2}}{b}$ - kąt przesunięcia przemieszczenie względem działającej siły.



Rys. 2.4

a) skok idealny siły, b) odpowiedź skokowa dla b<<1

Przykładowe czasowe przebiegi przedstawia rys. 2.4, gdzie a) idealny skok siły i b) odpowiedź skokowa (przemieszczenie masy słabo tłumionego przetwornika siły). W tym przypadku współczynnik dynamiczny [3] $k_d \approx 2$.



Rys. 2.5

a) skok rzeczywisty siły, b) odpowiedź skokowa dla b<<1

[3] Współczynnikiem dynamicznym k_d [19, 22] nazywa się stosunek maksymalnego przemieszczenia W_{max} (lub naprężenia σ_{max}) do przemieszczenia ustalonego W_{ust} (lub naprężenia ustalonego σ_{ust}), spowodowanego skokiem siły:

$$k_d = \frac{W_{max}}{W_{ust}} \quad \text{lub} \quad k_d = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ust}}.$$

Wymuszenie rzeczywistym skokiem siły (rys. 2.5a) o czasie narastania τ_n daje odpowiedź (rys. 2.5b) opisaną równaniem [22]:

gdy $0 < t < \tau_n$:

$$w(t) = W_{ust}\left[\frac{t}{\tau_n} - si\left(\frac{\nu_o\tau_n}{2}\right)\cos\frac{\nu_o(2t-\tau_n)}{2}\,e^{-b\nu_o t}\right], \qquad (2.13)$$

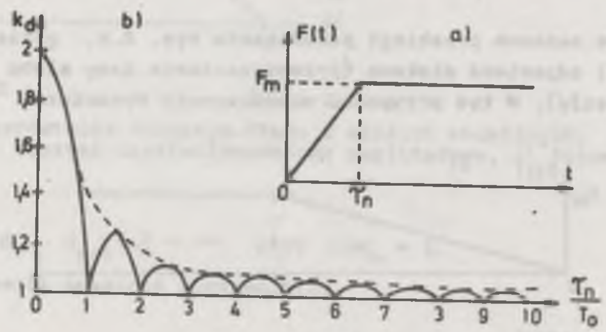
gdy $t > \tau_n$:

$$w(t) = W_{ust}\left[1 - si\left(\frac{\nu_o\tau_n}{2}\right)\cos\frac{\nu_o(2t-\tau_n)}{2}\,e^{-b\nu_o t}\right]. \qquad (2.14)$$

Współczynnik dynamiczny wyznaczony ze wzoru

$$k_d = 1 + \left|\, si\left(\frac{\nu_o\tau_n}{2}\right)\right| = 1 + \left|\, si\left(\pi\,\frac{\tau_n}{T_o}\right)\right| \qquad (2.15)$$

przedstawia rys. 2.6b.



Rys. 2.6

a) skok rzeczywisty siły, b) współczynnik dynamiczny przetwornika siły

Maksima współczynnika dynamicznego k_d w funkcji τ_n/T_o zestawiono w tablicy 2.2.

Z rys. 2.6 oraz z tabl. 2.2 wynika, że gdy $\tau_n/T_o > 6$, to wzrost amplitudy przemieszczenia ponad przemieszczenie ustalone nie przekracza 5% W_{ust}, a gdy $\tau_n/T_o > 17$, nie przekracza 2% W_{ust}.

Wymuszenie idealnym impulsem siły (rys. 2.7a) o postaci

$$F(t) = F_m\,\delta(t) \qquad (2.16)$$

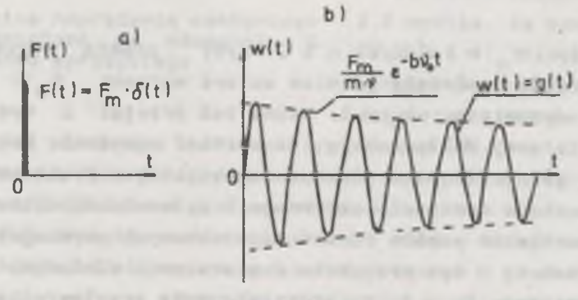
Tablica 2.2

Maksima współczynnika dynamicznego k_d

τ_n/T_o	-	0	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2
$k_{d\,max}$	-	2	1,212	1,127	1,091	1,071	1,058	1,049
$(k_{d\,max}-1)\,100$	%	100	21,2	12,7	9,1	7,1	5,8	4,9

τ_n/T_o	-	15/2	17/2	19/2	21/2	23/2	25/2	27/2
$k_{d\,max}$	-	1,042	1,037	1,034	1,030	1,028	1,025	1,024
$(k_{d\,max}-1)\,100$	%	4,2	3,7	3,4	3,0	2,8	2,5	2,4

τ_n/T_o	-	29/2	31/2	33/2
$k_{d\,max}$	-	1,022	1,021	1,019
$(k_{d\,max}-1)\,100$	%	2,2	2,1	1,9



Rys. 2.7

a) impuls idealny siły, b) odpowiedź impulsowa dla $b \ll 1$

daje dla $b < 1$ odpowiedź (rys. 2.7b), opisaną równaniem [22]:

$$g(t) = w(t) = \left(\frac{F_m}{m}\,e^{-b\nu_o t}\sin\nu t\right)\,1(t) \qquad (2.1$$

Odpowiedzi: skokowa $h(t)$ oraz impulsowa $g(t)$ umożliwiają oblicz ze pomocą całki Duhamela odpowiedzi przetwornika na dowolne wymuszeni łą $F(t)$, ze wzorów [20]:

$$w(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau \tag{2.18}$$

lub

$$w(t) = \int_0^t g(t-\tau)F(\tau)d\tau. \tag{2.19}$$

W literaturze podano też zależności umożliwiające przekształcanie poszczególnych wzorów, np.:

$$h(t) = \int_0^t g(t)dt,$$

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt,$$

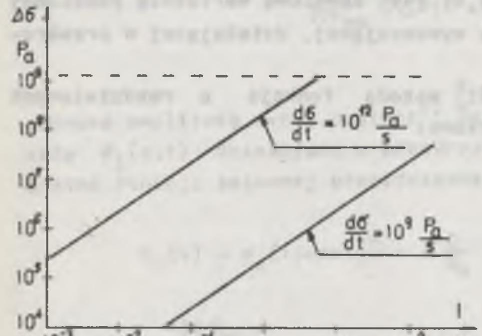
$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = j\omega\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt.$$

W zakresie $\tau_n > 1$ s($d\sigma/dt < 1$ G Pa/s) prawie wszystkie dostępne przetworniki siły spełniają zdaniem autora warunek $\tau_n >> T_o$, a tym samym współczynnik dynamiczny $k_d \approx 1$. Można też przyjąć z wystarczającą dla techniki pomiarowej dokładnością, że wartość naprężenia mechanicznego jest jednakowa na całej długości elementu sprężystego. Traktowanie przetwornika siły jako ciała doskonale sztywnego i opisanie właściwości dynamicznych przetwornika za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach są w tym przypadku dostatecznie dokładne. Ponieważ współczynnik dynamiczny $k_d \approx 1$, to zainstalowanie przetwornika siły w obiekcie fizycznym, niezależnie od impedancji mechanicznej przetwornika (punkt 5.3.2), praktycznie nie wpływa na przebieg zjawisk dynamicznych.

Do poprawnego przetwarzania siły o przebiegu sinusoidalnym czy trójkątnym, o czasie narastania $\tau_n \geq 1$ s ($d\sigma/dt \leq 1$ GPa/s, $f_{ga} < 1{,}2$ Hz), należy zgodnie z tabl. 2.1 i rys. 2.1 zastosować przetwornik siły o częstotliwości granicznej $f_g \geq 1{,}2$ Hz. W zależności od stopnia tłumienia drgań mechanicznych przetwornika, odpowiada to częstotliwości drgań własnych $\nu_o = (6...12)$Hz. Wymaganie to spełnia większość używanych przetworników siły.

2.3. Model propagacji siły szybkozmiennej

Współczynnik dynamiczny przetwornika przy pomiarze siły o czasie narastania $\tau_n = (1...10^{-3})$s ($d\sigma/dt = 1...10^3$ GPa/s, $f_{ge} = 1{,}2...1200$ Hz) będzie bliski jedności (tzn. $k_d = 1 \pm \Delta_k$), gdy zgodnie z punktem 2.2 częstotliwość drgań swobodnych przetwornika siły będzie większa niż odpowiednio $(12...12.10^3)$Hz. Dolną wartość częstotliwości spełniają prawie wszystkie przetworniki siły. Natomiast górną granicę spełniają jedynie przetworniki specjalnie konstruowane do pomiaru siły szybkozmiennej.



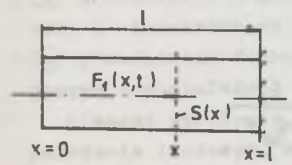
Rys. 2.8. Różnica naprężenia mechanicznego $\Delta\sigma$, istniejąca na długości l elementu sprężystego

Dla rozważanego zakresu szybkości narastania naprężenia $d\sigma/dt$ i znanej prędkości c propagacji fali naprężenia różnicę $\Delta\sigma$ naprężenia mechanicznego istniejącą na długości l elementu sprężystego, obliczoną ze wzoru

$$\Delta\sigma = \frac{l}{c}\cdot\frac{d\sigma}{dt}, \tag{2.20}$$

przedstawia rys. 2.8.

Ze wzoru (2.20) oraz z rys. 2.8 wynika, że nawet dla małej ($l \leq 0{,}1$ m) długości elementu sprężystego naprężenie nie będzie mieć jednakowej wartości na całej długości elementu, zwłaszcza przy dużej ($d\sigma/dt \geq 1$ TPa/s) szybkości narastania naprężenia (krótkim czasie narastania siły). Zastosowanie w tym przypadku modelu o stałych skupionych jest niedopuszczalnym uproszczeniem. Takie postępowanie w pomiarach siły o dużej zmienności jest bardzo niedokładnym modelowaniem zjawisk fizycznych i prowadzi zdaniem autora do nadmiernych rozbieżności między przewidywaniami teoretycznymi a wynikami eksperymentalnymi.



Rys. 2.9. Model elementu sprężystego o stałych rozłożonych na długości l

Do opisu zjawisk należy w tym przypadku zastosować model ciągły, o rozłożonych - masie, sztywności i tłumieniu na długości sprężystego elementu.

Przemieszczenie elementarnej warstwy w przekroju x elementu sprężystego opisuje równanie różniczkowe cząstkowe. Dla dostatecznie smukłego[4] elementu sprężystego i przy założeniu odkształceń w zakresie prawa Hooke'a drgania wzdłużne $w(x,t)$ w przekroju o współrzędnej x sprężystego elementu o długości l (rys. 2.9), przekroju poprzecznym $S(x)$, gęstości materiału $\rho(x)$ i module sprężystości wzdłużnej E opisuje się równaniem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E\ S(x)\ \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] - B_1\ \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \rho(x)\ S(x)\ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = F_1(x,t) \qquad (2.21)$$

gdzie B_1 jest tłumieniem drgań wzdłużnych przypadającym na jednostkę długości elementu sprężystego, $F_1(x,t)$ jest chwilową wartością poosiowej (rozciągającej lub ściskającej) siły wymuszającej, działającej w przekroju o współrzędnej x.

Równanie (2.21) rozwiązano [22, 61] metodą funkcji o rozdzielonych zmiennych, oznaczając warunki początkowe:

1) $w(x,0) = w_o(x)$

2) $\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{w}_o(x)$,

warunki brzegowe:

1) $w(0,t) = w_o(t)$

2) $\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = w_o'(t)$

i zakładając wymuszenie siłą jednostkową harmoniczną o postaci:

$$F_1(x,t) = F_{1m}(x)\sin\omega t \qquad (2.22)$$

działającą w przekroju o współrzędnej x jednorodnego ($\rho(x) = \rho$) elementu sprężystego o stałym przekroju ($S(x) = S$). Rozwiązanie takie celowe jest przekształcić do następującej postaci, bardziej przejrzystej w zastosowaniach do pomiarów dynamicznych:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[\overbrace{\frac{\dot{w}_o(x)}{\nu_n}\sin\nu_n t + w_o(x)\cos\nu_n t}^{1} +$$

$$+ \overbrace{\frac{A_n}{\nu_n}(b\nu_o\sin\varphi_n - \omega\cos\varphi_n)\sin\nu_n t + A_n\sin\varphi_n\cos\nu_n t}^{2}\Bigg]e^{-b\nu_{on}t} +$$

[4] Elementem sprężystym smukłym nazywa się element, którego długość jest co najmniej o rząd większa niż jego wymiary poprzeczne. Odkształcenie w takim elemencie rozchodzi się w postaci fali płaskiej. Można też pominąć wpływ odkształcenie poprzecznego na drgania wzdłużne.

$$\overbrace{+ A_n\sin(\omega t - \varphi_n)}^{3}\Bigg\}\ \overbrace{\left[w_o(t)\cos\frac{\nu_n}{c}x + \frac{c}{\nu_n}w_o'(t)\sin\frac{\nu_n}{c}x\right]}^{4}, \qquad (2.23)$$

gdzie:

$$A_n = \frac{1}{\rho S}\ \frac{\int_0^l F_1(z)\ W_n(z)dz}{\sqrt{(\nu_{on}^2 - \omega^2)^2 + (2b\nu_{on}\omega)^2}\int_0^l\left[W_n(z)\right]^2dz}$$

oznacza amplitudę n-tej postaci[5] ustalonego przemieszczenia, wymuszonego siłą $F_1(x,t)$ działającą w przekroju o współrzędnej $x = z$, $W_n(z)$ - n-ta postać funkcji zmiennej przestrzennej dla $x = z$, przy czym

$$W_n(x) = w_o(t)\cos\frac{\nu_n}{c}x + \frac{c}{\nu_n}w_o'(t)\sin\frac{\nu_n}{c}x \quad \text{(człon 4)},$$

$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2b\nu_{on}\omega}{\nu_{on}^2 - \omega^2}$ jest kątem przesunięcia fazowego n-tej postaci przemieszczenie $W_n(x)$ względem siły $F_1(x,t)$, $\nu_n = \nu_{on}\sqrt{1 - b^2}$ jest pulsacją n-tej postaci drgań własnych tłumionych elementu sprężystego, ν_{on} jest pulsacją n-tej postaci drgań naturalnych nietłumionych, ω oznacza pulsację siły wymuszającej.

Człon 1 równanie (2.23) przedstawia drgania swobodne własne o pulsacjach ν_n, zależne od warunków początkowych i niezależne od wymuszenia. Człon 2 przedstawia drgania swobodne towarzyszące o pulsacjach ν_n, zależne od wymuszenia i niezależne od warunków początkowych. Drgania 1 i 2 są tłumione i zanikają wykładniczo ze stałą czasową $T_{zn} = \frac{1}{b\nu_{on}}$. Człon 3 przedstawia drgania wymuszone o pulsacji ω, zależne od działającej siły i niezależne od warunków początkowych. Są to drgania ustalone. Człon 4 przedstawia funkcję zmiennej przestrzennej zależnej od warunków brzegowych a niezależnej od warunków początkowych i od wymuszenia.

Element sprężysty obciążany w zakresie prawa Hooke'a jest obiektem z założenia liniowym, więc wartość chwilowa wypadkowego przemieszczenia $w(x,t)$ w danym przekroju o współrzędnej x jest superpozycją drgań swobodnych własnych 1, swobodnych towarzyszących 2 i wymuszonych 3.

[5] n-ta postać rozwiązania przedstawia drgania wzdłużne elementu sprężystego o pulsacji n razy większej niż postać pierwsza.

rozłożonych wzdłuż elementu sprężystego wg funkcji zmiennej przestrzennej ④.

Pełna analiza właściwości dynamicznych układu w oparciu o rozwiązanie ogólne (2.23) byłaby skomplikowana i mało efektywna, gdyby wszystkie człony tego równania rozpatrywać równocześnie. W związku z tym w pracy będzie oddzielnie analizowany wpływ na sygnał wyjściowy poszczególnych członów równania (2.23). W tej analizie będą uwzględnione konkretne czynniki fizyczne, jak: sposób umocowania brzegów elementu sprężystego, zasada działania przetwornika pośredniczącego oraz jego położenie.

Analizowany będzie stan nieustalony przetwornika siły, istotny przy pomiarach przebiegów jednokrotnych i powtarzających się w sposób nieokresowy. Stan nieustalony jest też istotny przy pomiarach przebiegów okresowych o tak małym wypełnieniu, że przed pojawieniem się następnego impulsu siły stan nieustalony w przetworniku siły już praktycznie zakończył się. Pomiary siły o takich przebiegach są typowe, np. w kowarkach i ubijarkach hydraulicznych, młotach i wiertarkach pneumatycznych, silnikach spalinowych, walcarkach itp. W tym przypadku istotny jest poprawny pomiar czasowego przebiegu siły, ponieważ jest podstawą oceny sprawności i trwałości badanego urządzenia.

Stała czasowa zanikania członów ① i ② równania (2.23) zależy od stopnia tłumienia b. Jak wiadomo z literatury [2, 19, 59], stopień tłumienia strukturalnego w stalowych elementach sprężystych wynosi $10^{-3}...10^{-2}$. Zgodnie z zależnością (2.23), czas t_n, po którym w elemencie sprężystym o długości l i stopniu tłumienia b amplituda n-tej postaci drgań o początkowej wartości A_{on} zmaleje do wartości A_{tn}, można obliczyć ze wzoru:

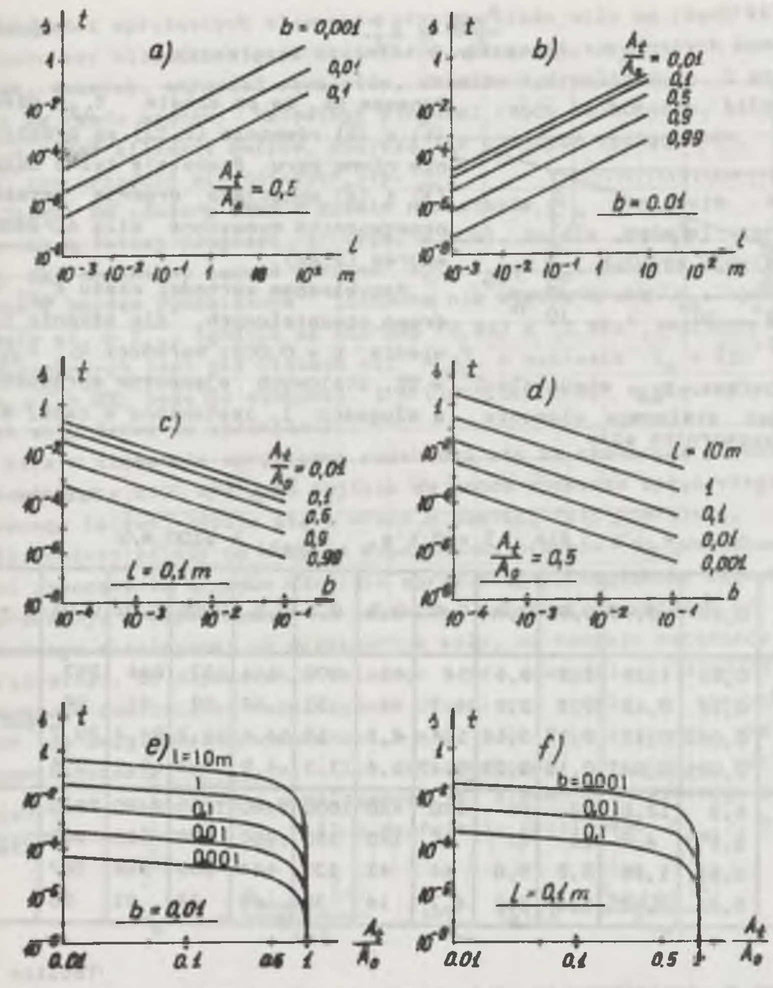
$$t_n = \frac{1}{b\nu_{on}} \ln \frac{A_{on}}{A_{tn}} \tag{2.24}$$

Na rys. 2.10 oraz w tabl. 2.3 (tylko dla l = 0,1 m) przedstawiono dla stosunku amplitud A_{t1}/A_{01} = 0,99...0,01, wartość czasu t_1 wyznaczonego dla pierwszej (n = 1) postaci drgań (p. 7.1) stalowego elementu sprężystego o długości l = $(10^{-3}...10^{-2})$m, stopniu tłumienia b = $10^{-4}...10^{-1}$, o jednym brzegu swobodnym a drugim sztywno zamocowanym, dla którego zgodnie ze wzorami (2.24) i (7.10) wyznaczono:

$$t_1 = \frac{2l}{\pi bc} \ln \frac{A_{o1}}{A_{t1}}. \tag{2.24a}$$

Rys. 2.10 oraz tabl. 2.3 ułatwiają oszacowanie czasu trwania stanu nieustalonego w przetworniku siły.

Zgodnie z zależnością (2.24) oraz z rys. 2.10 można wyznaczyć taki czas $t_{\Delta 1}$, w którym zmniejszenie amplitudy początkowej A_o, spowodowane tłumieniem, nie przekracza wartości Δ_1^o (np. 10; 5 czy 2%). Analizując właści-



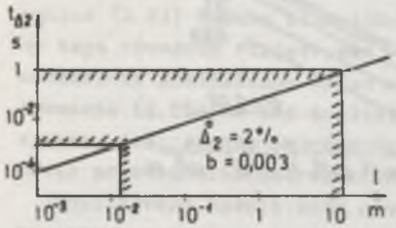
Rys. 2.10. Wykresy czasu t_1, określonego zgodnie ze wzorem (2.24a)

wości dynamiczne przetwornika siły w czasie $t < t_{\Delta 1}$ można przyjąć zerowy stopień tłumienia (b = 0), ponieważ

$$\left(1 - \frac{A_{t\Delta 1}}{A_o}\right) \leq \Delta_1^o. \tag{2.25}$$

Można też określić czas $t_{\Delta 2}$ (rys. 2.11), po którym amplituda drgań nieustalonych $A_{t\Delta 2}$ jest nie większa niż wartość Δ_2^o (np. 10; 5 czy 2%) wartości amplitudy początkowej A_o, tzn.:

$$\frac{A_{t\Delta 2}}{A_o} \leqslant \Delta_2^o . \qquad (2.25a)$$



Rys. 2.11. Czas $t_{\Delta 2}$ nieustalonych drgań stalowego elementu przetwornika siły

Oznacza to, że po czasie $t_{\Delta 2}$ człony ① i ② równania (2.23) są praktycznie równe zeru. Pozostają tylko człony ③ i ④ opisujące drgania ustalone przetwornika wymuszone siłą określoną wzorem (2.22).

Przykładowe wartości czasu $t_{\Delta 1}$, $t_{\Delta 2}$ drgań nieustalonych, dla stopnia tłumienia $b = 0{,}003$; wartości $\Delta_1^o = \Delta_2^o = 5\%$, stalowych elementów sprężystych o długości l, zestawiono w tabl. 2.4.

Tablica 2.3

Czas t_1; s dla $l = 0{,}1$ m, $c_{stali} = 5100$ m/s

b \ A_{t1}/A_{o1}	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	-
0,0001	0,63	1,26	3,2	6,6	14	43	100	144	187	244	287	
0,0003	0,21	0,42	1,1	2,2	4,7	14	33	48	62	81	96	$\times 10^{-3}$
0,001	0,063	0,13	0,32	0,66	1,4	4,3	10	14,4	18,7	24,4	28,7	
0,003	0,021	0,042	0,11	0,22	0,47	1,4	3,3	4,8	6,2	8,1	9,6	
0,01	6,3	12,6	32	66	140	430	1000	1440	1870	2440	2870	
0,03	2,1	4,2	11	22	47	140	330	480	620	810	960	$\times 10^{-6}$
0,1	0,63	1,26	3,2	6,6	14	43	100	144	187	244	287	
0,3	0,21	0,42	1,1	2,2	4,7	14	33	48	62	81	96	

Tablica 2.4

Czas drgań nieustalonych $t_{\Delta 1}$, $t_{\Delta 2}$

Rodzaj elementu sprężystego	c m/s	l m	$t_{\Delta 1}$ ms	$t_{\Delta 2}$ s
Stalowy	5100	0,05 2 50C	0,06 2,4 590	0,003 0,12 31
Olejowy	1000	1 10	6 60	0,3 3,0
Powietrzny	330	1 10	18 180	0,9 9,0

Długości sprężystych elementów przetworników siły są rzędu kilku, kilkunastu czy kilkudziesięciu milimetrów. Długości sprężystych elementów walcarek, tokarek, skrzydeł samolotów, układów hydraulicznych i pneumatycznych są rzędu metrów. Natomiast długości rzędu kilkunastu, kilkudziesięciu a nawet kilkuset metrów, dotyczą lin urządzeń wyciągowych, taśmociągów, rur urządzeń wiertniczych itp.

Jeżeli do pomiaru siły o czasie narastania τ_n zastosuje się przetwornik o takiej długości l (rys. 2.10b), że dla zadanej wartości Δ_2^o (np. 2%) spełniony będzie warunek $t_1 = t_{\Delta 2} \leqslant \tau_n$, to siła będzie przetworzona z błędem dynamicznym[6] liczbowo nie większym niż Δ_2, ponieważ po czasie $t_1 \geqslant t_{\Delta 2}$, zgodnie ze wzorami (2.24) i (2.25a), amplituda $A_{t\Delta 2}$ drgań nieustalonych jest nie większa niż $A_o\Delta_2^o$. W zakresie $\tau_n = (10^{-3}...1)$ s, dla $\Delta_2^o = 2\%$, będą to długości $l = (10^{-2}...10)$ m, a więc w przetwornikach siły łatwe do spełnienia.

Siła w elemencie sprężystym rozchodzi się ze skończoną prędkością (np. w stali $c = 5100$ m/s). Po dojściu do końca elementu sprężystego, niedopasowanego falowo, odbija się i wraca w postaci fali powrotnej. Amplituda fali odbitej zależy od stopnia dopasowania brzegów (tj. praktycznie od sposobu zamocowania brzegów elementu sprężystego). Wypadkowa siła działająca w przekroju o współrzędnej x elementu sprężystego zależy od czasowego przebiegu działającej na przetwornik siły, od rodzaju materiału elementu sprężystego, od dopasowania falowego i od długości przetwornika. Autor proponuje zdefiniować współczynnik dynamiczny modelu o stałych rozłożonych (po uwzględnieniu odnośnika 3 w p. 2.2) jako stosunek ekstremalnego przemieszczenia $w_{ekstr}(x)$ (lub ekstremalnego naprężenia mechanicznego $\sigma_{ekstr.}(x)$) w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego do przemieszczenia ustalonego w_{ust} (lub naprężenia ustalonego σ_{ust}), tzn.:

$$k_d(x) = \frac{w_{ekstr.}(x)}{w_{ust}} \quad \text{lub} \quad k_d(x) = \frac{\sigma_{ekstr.}(x)}{\sigma_{ust}} .$$

W przypadku pomiaru siły o postaci skoku rzeczywistego, w czasie $t < \tau_n$ siła narasta wg zależności $F(t) = F_m \frac{t}{\tau_n}$, a w czasie $t \geqslant \tau_n$ siła $F(t) = F_m =$ const. Czas przejścia fali od początku elementu sprężystego do końca i powrotu do początku wynosi $2l/c$. Przemieszczająca się fala jest tłu-

[6] Błędem dynamicznym chwilowym $\delta(t)$ [19, 37, 65, 67] nazywa się różnicę chwilowych wartości przebiegów wielkości mierzonej na wyjściu przetwornika rzeczywistego $y(t)$ i równoważnego przetwornika idealnego (tj. nieinercyjnego i niestłumionego) $y_1(t)$:

$$\delta(t) = y(t) - y_1(t).$$

miona. Jej amplituda, zgodnie ze wzorem (2.23), maleje wg krzywej $\exp(-b\nu_0 t)$. Uwzględniając powyższą definicję współczynników $k_d(x)$, można wykazać, że współczynnik dynamiczny modelu o stałych rozłożonych określają wzory:

$$\left.\begin{aligned} &\text{dla } \tau_n \geqslant 2\ l/c \quad k_d(x) = 1 + \frac{2l\ K_2}{c\tau_n}\, e^{-b\nu_0 t_1^*} \\ &\text{dla } \tau_n < 2\ l/c \quad k_d(x) = 1 + K_2\, e^{-b\nu_0 t_1^*} \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

gdzie:

K_2 - współczynnik odbicia fali od końca elementu sprężystego [52, 53]

$$K_2 = \frac{Z_{m2} - Z_{mf}}{Z_{m2} + Z_{mf}}, \tag{2.27}$$

$t_1^* = \frac{2(l - x)}{c}$ - czas przejścia fali od miejsca o współrzędnej x, w którym wyznacza się $k_d(x)$ do końca elementu sprężystego l z powrotem do x,

Z_{m2} - impedancja mechaniczna mocowania końca (p. 5.3.2),

Z_{m2} - impedancja mechaniczna falowa elementu sprężystego (p. 5.3.2).

Współczynnik odbicia K_2 charakteryzuje stopień falowego dopasowania końca elementu sprężystego do obudowy przetwornika siły. Gdy koniec jest brzegiem idealnie dopasowanym falowo ($Z_{m2} = Z_{mf}$), to współczynnik odbicia $K_2 = 0$. Wartość współczynnika odbicia zależy od różnicy między impedancją mechaniczną Z_{m2} końca a impedancją falową Z_{mf} elementu sprężystego. Względną różnicę impedancji mechanicznej określa wzór:

$$\Delta^o_{zm} = \frac{Z_{m2} - Z_{mf}}{Z_{mf}}. \tag{2.28}$$

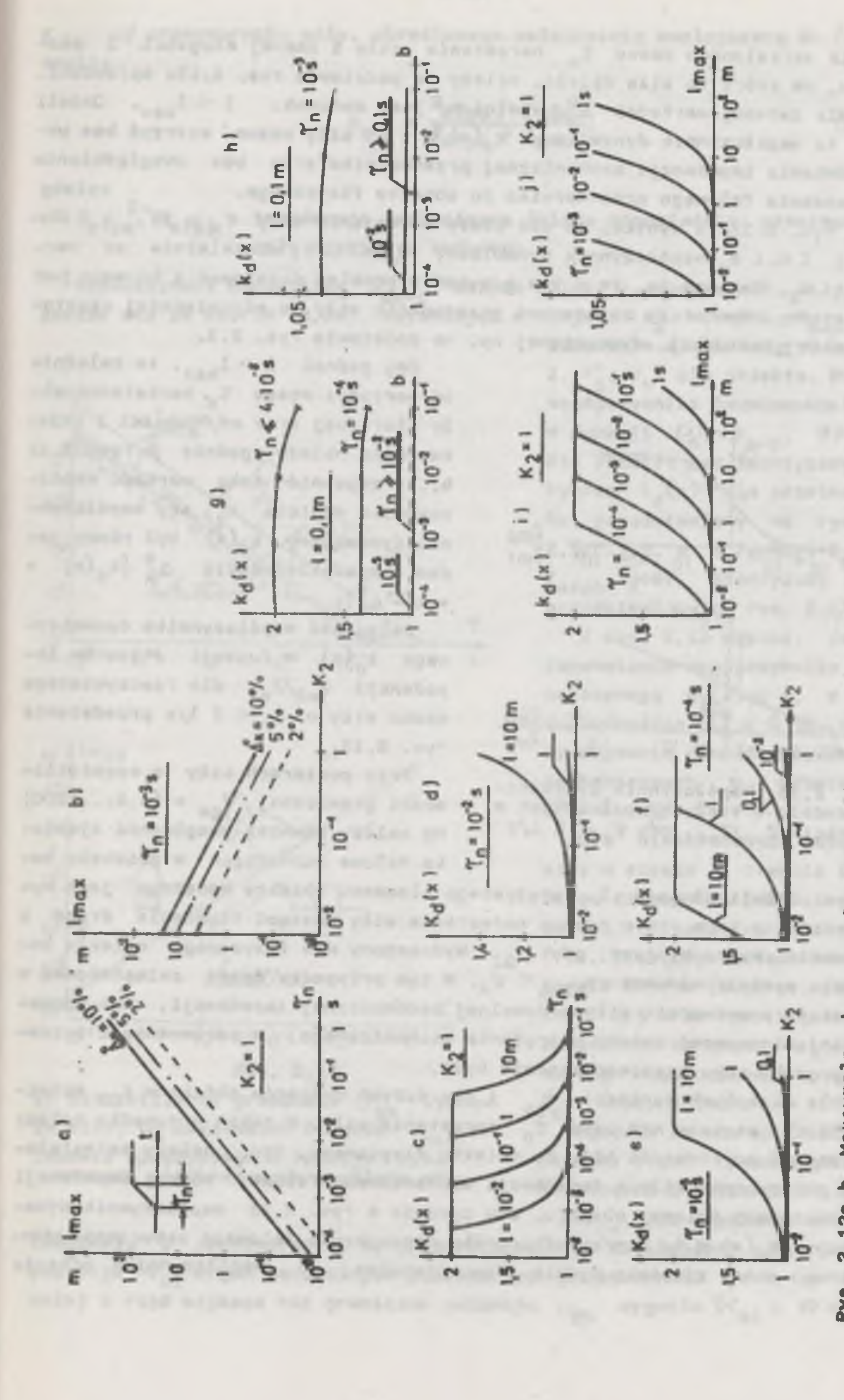
Maksymalna dopuszczalna długość elementu sprężystego o początku swobodnym i końcu sztywno zamocowanym, dla założonej niedokładności $\Delta^o_k = [k_d(x) - 1]$, dla $\tau_n \geqslant 2\ l/c$, zgodnie ze wzorem (2.26), wynosi:

$$l_{max} = \frac{\Delta^o_k c \tau_n}{2K_2}\, e^{b\nu_0 T_l} \tag{2.29}$$

gdzie:

$T_l = l/c$.

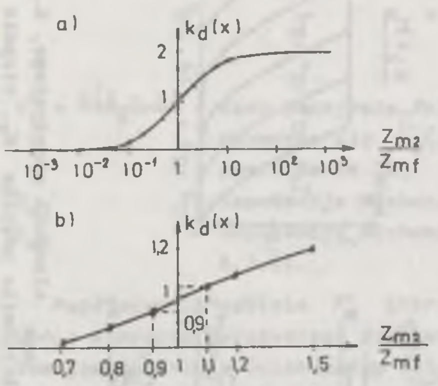
Przebieg l_{max} w funkcji τ_n i K oraz przebieg $k_d(x)$ w funkcji τ_n, K_2, b i l_{max} przedstawia rys. 2.12.



Rys. 2.12a,b. Maksymalna dopuszczalna długość l_{max} elementu sprężystego, c...j) współczynnik dynamiczny k_d w funkcji czasu τ_n narastania siły, współczynnika odbicia K_2, stopnia tłumienia b lub maksymalnej długości l_{max} elementu sprężystego

Dla określonego czasu τ_n narastania siły i znanej długości l elementu, na który ta siła działa, należy na podstawie rys. 2.12a sprawdzić, czy dla zadanej wartości Δ_k^o, spełniony jest warunek: $l < l_{max}$. Jeżeli tak, to współczynnik dynamiczny $k_d(x) \approx 1$ i siłę można mierzyć bez uwzględnienia impedancji mechanicznej przetwornika oraz bez uwzględnienia dopasowania falowego przetwornika do obiektu fizycznego.

Z rys. 2.12d,e wynika, że dla czasu narastania siły $\tau_n \geq 10^{-2}$ s i długości $l \leq 1$ m, współczynnik dynamiczny $k_d(x) \approx 1$, niezależnie od wartości K_2. Oznacza to, że w tym przypadku problem dopasowania falowego jest nieistotny. Wystarczy zastosować przetwornik siły o odpowiedniej częstotliwości granicznej, wyznaczonej np. na podstawie rys. 2.3.



Rys. 2.13. Współczynnik dynamiczny modelu o stałych rozłożonych w funkcji Z_{m2}/Z_{mf}, gdy $\tau_n < 2$ l/c

Gdy jednak $l > l_{max}$, to zależnie od wartości czasu τ_n narastania siły mierzonej oraz od długości l przetwornika należy zgodnie z rys. 2.12 b...f zapewnić taką wartość współczynnika odbicia K_2, aby współczynnik dynamiczny $k_d(x)$ był równy jeden z niedokładnością Δ_k^o $(k_d(x) = 1 \pm \Delta_k^o)$.

Zależność współczynnika dynamicznego $k_d(x)$ w funkcji stosunku impedancji Z_{m2}/Z_{mf} dla rzeczywistego skoku siły o $\tau_n < 2$ l/c przedstawia rys. 2.13.

Przy pomiarach siły o częstotliwości granicznej $f_{gs} = (1,2...1200)$ Hz należy również uwzględnić zjawiska falowe zachodzące w obiekcie badanym. Jeżeli długość l sprężystego elementu obiektu badanego jest wystarczająco mała, to w czasie narastania siły nastąpi tłumienie drgań w obiekcie. Ma to miejsce, gdy $t_{\Delta 2}$ wyznaczony dla fizycznego obiektu badanego spełnia warunek $t_{\Delta 2ob} < \tau_n$. W tym przypadku można zainstalować w obiekcie przetwornik siły o dowolnej mechanicznej impedancji, bez spowodowania znaczącej zmiany naprężenia mechanicznego, w porównaniu z sytuacją, gdyby tego przetwornika nie było.

Dla większych wartości f_{gs} i dla dużych wymiarów obiektów $t_{\Delta 2}$ obiektu będzie większe niż czas τ_n narastania siły. W takim przypadku należy dopasować przetwornik siły do obiektu fizycznego, tzn. należy zainstalować przetwornik siły o impedancji mechanicznej falowej równej impedancji mechanicznej falowej obiektu, aby zgodnie z rys. 2.13 współczynnik dynamiczny $k_d(x) \approx 1$. W przypadku braku dopasowania falowego zaburzenie pierwotnego stanu zjawiska będzie proporcjonalne do współczynnika odbicia

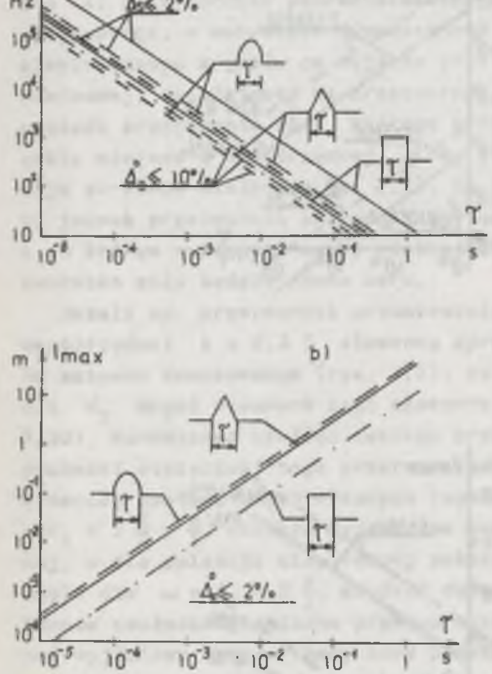
K_{o-p} od przetwornika siły, określonego zależnością analogiczną do (2.27), czyli:

$$K_{o-p} = \frac{Z_{mfps} - Z_{mfob}}{Z_{mfps} + Z_{mfob}}, \tag{2.30}$$

gdzie:

Z_{mfps}, Z_{mfob} - impedancja mechaniczne falowe odpowiednio przetwornika siły i obiektu badanego.

Współczynnik dynamiczny k_{do-p} układu obiekt - przetwornik siły wyznacza się ze wzorów (2.26), wstawiając w miejsce K_2 wartość K_{o-p} oraz pozostałe wielkości, jak b, c, l, t_1^*, ϑ_o dla obiektu. Wykres współczynnika dynamicznego k_{do-p} w funkcji τ_n, K_{o-p}, b, l_{max} dla obiektu jest identyczny jak wykres $k_d(x)$ dla przetwornika, przedstawiony na rysunku 2.12c...j, a w funkcji Z_{mfps}/Z_{mfob} jest identyczny jak przedstawiony na rys. 2.13.



Rys. 2.14

a) częstotliwość graniczna f_{gs} sygnału siły, b) maksymalna długość l_{max} elementu sprężystego w funkcji czasu trwania nieokresowych impulsów siły

Z rys. 2.13 wynika, że dla zapewnienia współczynnika dynamicznego $k_d(x) \approx 1$, z niedokładnością $\Delta_k^o \leq \pm 5\%$, należy zapewnić równość impedancji mechanicznych w przedziale $\Delta_z^o \leq \pm 10\%$.

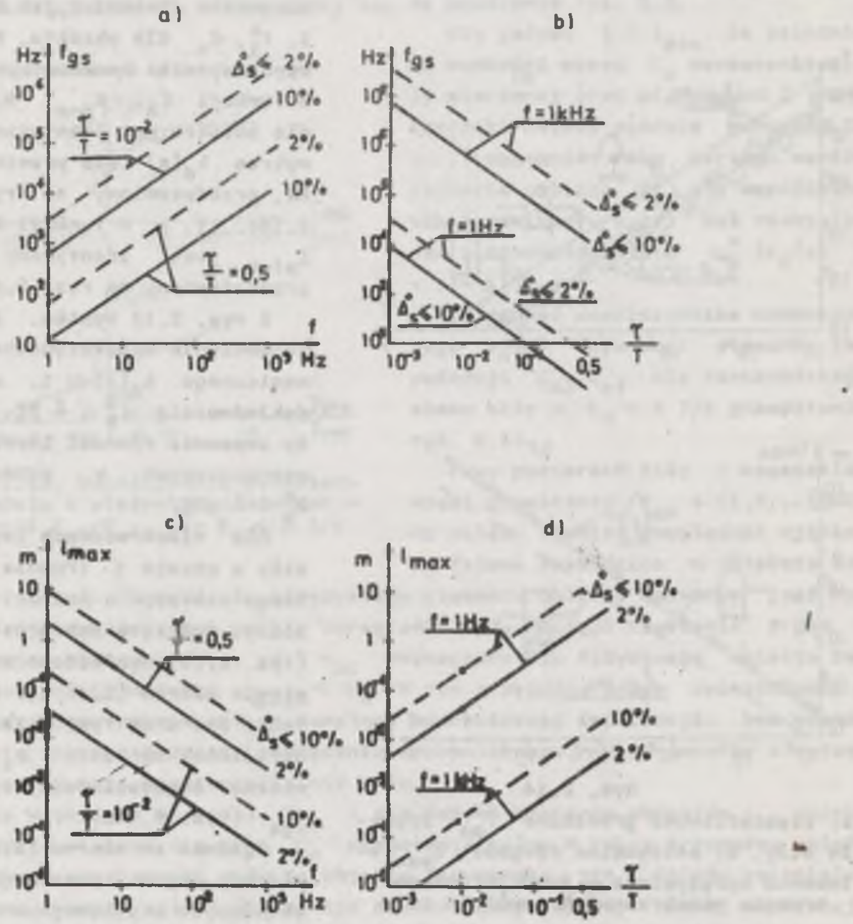
Dla nieokresowych impulsów siły o czasie τ trwania i przebiegu czasowym o postaci sinusoidy, trójkąta lub prostokąta (rys. 2.1b) wyznaczono na podstawie wzorów (2.1) ... (2.5), tabl. 2.1 oraz rys. 2.1a, przy określonej wartości Δ_s, graniczną częstotliwość sygnału f_{gs} (rys. 2.14a).

Zgodnie ze wzorem (2.23) amplitudy drgań poszczególnych składowych o pulsacji $\omega \leq \omega_{gs} = 2\pi f_{gs}$, dla dowolnego stopnia tłumienia b przetwornika, są proporcjonalne do działającej siły, jeżeli pulsacja ϑ_{o1} drgań naturalnych podstawowych przetwornika jest co najmniej o rząd większa niż graniczna pulsacja ω_{gs} sygnału $(\vartheta_{o1} \geq 10\,\omega_{gs})$.

Na tej podstawie, po uwzględnieniu wzoru (7.10), wyznaczono maksymalną dopuszczalną długość l_{max} sprężystego elementu przetwornika, przeznaczonego do pomiaru impulsów siły (rys. 2.14b):

$$l_{max} = \frac{\pi c}{2\nu_{o1}} = \frac{\pi c}{20\omega_{gs}} = \frac{c}{40\, f_{gs}} \tag{2.31}$$

Odpowiednie zależności dla impulsów okresowych o wypełnieniu τ/T, powtarzających się z częstotliwością $f = 1/T$ i dla zadanej wartości Δ_s^o, przedstawiono na rys. 2.15.



Rys. 2.15. Częstotliwość graniczna f_{gs} periodycznych impulsów siły w funkcji częstotliwości - a), w funkcji wypełnienia τ/T - b). Maksymalna długość l_{max} w funkcji częstotliwości - c), w funkcji wypełnienie τ/T - d)

Rzeczywisty element sprężysty przetwornika siły lub obiektu badanego, analizowany za pomocą modelu o stałych rozłożonych, wykazuje wiele ($n \to \infty$) wartości pulsacji drgań własnych (p. 7.1), a nie jedną, jak wynikałoby z uproszczonego modelu o stałych skupionych (p. 2.2). Zgodnie ze wzorami (2.23) i (2.24) drgania o większych pulsacjach zanikają szybciej niż harmoniczne podstawowe (stała czasowa zanikania drgań $T_{zn} = 1/b\nu_{on}$). Z tego względu właściwości dynamiczne elementu sprężystego z wystarczającą dla praktyki pomiarowej dokładnością są określone przez drgania własne podstawowe (ν_1) oraz postacie drugą (ν_2), trzecią (ν_3) i ewentualnie czwartą (ν_4).

Sygnał elektryczny na wyjściu przetwornika siły najczęściej jest statycznie wprost proporcjonalny do wielkości, na którą reaguje przetwornik pośredniczący. W zależności od zasady działania i od położenia (współrzędna x) przetwornika pośredniczącego oraz od warunków brzegowych elementu sprężystego, w warunkach dynamicznych różne będą jednak czasowe przebiegi elektrycznego sygnału na wyjściu przetwornika przy danym przebiegu siły mierzonej, działającej na przetwornik siły. Największą dynamiczną czułość posiada przetwornik siły, którego przetwornik pośredniczący umieszczono w takim miejscu o współrzędnej x, że dla określonej częstotliwości występuje strzałka wielkości (p. 7.1), na którą ten przetwornik reaguje. Gdyby jednak przetwornik pośredniczący umieszczono w miejscu o współrzędnej x, w którym występuje węzeł wielkości, to dynamiczna czułość takiego przetwornika siły będzie równa zeru.

Jeżeli np. przetwornik przemieszczenia umieszczono by w miejscu o współrzędnej $x = 0,3\, l$ elementu sprężystego o początku swobodnym, a końcu sztywno zamocowanym (rys. 7.3), to dla pulsacji ω siły równej pulsacji ν_1 drgań własnych tego elementu, czyli dla $\omega = \nu_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{l}$ (wzór 7.10), dynamiczna czułość takiego przetwornika siły wyniosłaby ok. 87% czułości statycznej tego przetwornika. Dla pulsacji siły równej pulsacji trzeciej postaci drgań własnych tego elementu sprężystego, czyli dla $\omega = \nu_3 = 3\,\frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{l}$, czułość dynamiczna wyniosłaby ok. 71% czułości statycznej, a dla pulsacji siły równej pulsacji drugiej postaci drgań własnych, czyli dla $\omega = \nu_2 = \pi\,\frac{c}{l}$, czułość dynamiczna wyniosłaby zero (rys. 7.4a). Zerowa czułość dynamiczna przetwornika siły oznacza, że elektryczny sygnał wyjściowy będzie równy zeru podczas działania na przetwornik siły harmonicznej o pulsacji $\omega = \nu_2 = \pi\,\frac{c}{l}$.

Warto zauważyć, że ze wzorów (7.13) i (7.14) wynika teoretyczna możliwość zbudowania złożonego przetwornika siły (zawierającego dwa przetworniki pośredniczące: naprężenia mechanicznego i przemieszczenia) o czułości niezależnej od położenia x przetworników pośredniczących na elemencie sprężystym. W tym celu należy w członach typu elektrycznego zapewnić takie wzmocnienie, aby $k_1 = k_2\, E\, \frac{\nu_n}{c}$, bo wówczas funkcja:

$$\varkappa(x) = \sqrt{[\sigma(x,t)]^2 + [w(x,t)]^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_1 (C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t) \qquad (2.32)$$

nie zależy od wartości x. Korzyści metrologiczne wynikające ze wzoru (2.32), należy zweryfikować doświadczalnie.

Należy też zauważyć, że w przypadku gdy koniec sprężystego elementu przetwornika siły jest dopasowany falowo, tzn. gdy impedancja mechaniczna mocowania końca jest równa mechanicznej impedancji falowej elementu sprężystego (rys. 7.7), to wykresy funkcji drgań własnych takiego elementu sprężystego są prostymi równoległymi do osi O-x (rys. 7.8). Czułość dynamiczna tak zrealizowanego przetwornika siły jest również stała, niezależnie od położenia x na elemencie sprężystym jednego z pośredniczących przetworników przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia lub naprężenia mechanicznego. W tym przypadku wystarcza jeden przetwornik.

Dokładność dynamiczna przetwornika siły nie jest w pełni określona, gdy tylko podano zakres nominalny, klasę dokładności statycznej, czułość, moc sygnału wyjściowego. Potrzebna jest również impedancja mechaniczna falowa przetwornika siły, żeby możliwe było uwzględnienie dopasowania falowego przetwornika.

P r z y k ł a d   d a n y c h   d o ś w i a d c z a l n y c h

Wykorzystując model matematyczny walcarki opracowany w pracy [64] przeprowadzono za pomocą EMC obliczenia modelu walcarki laboratoryjnej typu WC 3K (IMŻ - Gliwice) o nominalnym nacisku 0,2 MN. Siłę działającą na łożysko walca mierzono za pomocą podkładkowego przetwornika firmy KELK (Kanada) o nominalnym zakresie 0,2 MN. Wykonane obliczenia wykazały, że zastosowany przetwornik siły nie był dopasowany falowo do stojaka walcarki. Prawidłowe dopasowanie falowe będzie w przypadku zastosowania przetwornika siły firmy KELK o nominalnym zakresie 0,6 MN, a więc 3 razy większym niż nominalny zakres walcarki. Jest to zrozumiałe po uświadomieniu faktu, że konstruktor przetwornika siły, dążąc do dużej czułości, maksymalnie wykorzystał przekrój przetwornika (założył duże naprężenie nominalne). Natomiast konstruktor walcarki dla zapewnienia dużej dokładności walcowanych wyrobów założył dużą sztywność klatki walcowniczej, a tym samym małe naprężenie nominalne.

Czas wejścia metalu (czas narastania siły) w rozpatrywanej walcarce wynosi (5...10) ms.

Zainstalowanie przetwornika siły w walcarce zmieniło jej dynamikę oraz zmieniło wartości i rozkład działających w walcarce sił w stosunku do normalnego stanu eksploatacyjnego. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że dla badanej walcarki bez śruby nastawczej i bez przetwornika siły współczynnik dynamiczny wynosi $k_d = 1,1$. Natomiast w przypadku ze śrubą nastawczą oraz z przetwornikiem siły o zakresie 0,2 MN - współczynnik dynamiczny $k_d = 2,85$.

W pracy [64] wykazano, że w liniowych układach fizycznych bez luzów współczynnik dynamiczny $k_d \le 2$. Natomiast w układach nieliniowych, zwłaszcza w przypadku istnienia luzów, współczynnik dynamiczny może być znacznie większy niż 2.

2.4. Model propagacji udaru siły

Udary (krótkotrwałe impulsy siły) charakteryzują się dużą szybkością narastania naprężenia mechanicznego, wynoszącą ponad 1 TPa/s. Szybkości narastania naprężenia $d\sigma/dt > 1$ TPa/s odpowiada czas narastania siły $\tau_n < 1$ ms i częstotliwość graniczna siły $f_{gs} > 1,2$ kHz. Pomiary takich impulsów siły są pomiarami w stanie nieustalonym drgań mechanicznych już dla długości stalowych elementów sprężystych większych niż 10^{-2} m (rys. 2.10 i 2.12), a więc praktycznie zawsze. Zjawiskom udarów towarzyszy duży gradient naprężenia mechanicznego na długości l elementu sprężystego (rys. 2.8). W chwili gdy na początku elementu sprężystego naprężenie mechaniczne jest maksymalne, to na końcu tego elementu naprężenie może być jeszcze równe zeru. Gdy fala naprężenia przemieści się do końca elementu i osiągnie tam wartość maksymalną, to na początku elementu naprężenie może być już równe zeru.

Przy pomiarach udarów należałoby na podstawie wzorów (2.24) i (2.29) oraz rys. 2.10 i 2.12 dobrać przetwornik siły o takiej długości l, aby dla określonej wartości Δ_2^o (np. 10; 5 czy 2%) spełniony był warunek $t_{\Delta 2} \le \tau_n$ oraz $l < l_{max}$. Dla czasu $\tau_n < 1$ ms i dla $\Delta_2^o = 2\%$ są to długości $l < 10^{-2}$ m. Takich przetworników siły nie produkuje się. Dla badanego obiektu, którego wymiary są na ogół większe niż 10^{-2} m, stan nieustalony $t_{\Delta 2}$ trwać będzie o wiele dłużej niż czas τ udaru. Aby zaburzanie spowodowane zainstalowaniem przetwornika w obiekcie badanym nie przekraczało wartości Δ_k^o, należy dopasować falowo przetwornik do obiektu, tzn. należy zapewnić:

$$\Delta_{zm}^o = \left| \frac{Z_{mfps} - Z_{mfob}}{Z_{mfob}} \right| \le 2\,\Delta_k^o. \qquad (2.33)$$

Zgodnie ze wzorem (2.26) i rys. 2.13, np. 10% różnice między Z_{mfps} a Z_{mfob} jest przyczyną ok. 5% zmiany współczynnika dynamicznego w porównaniu z sytuacją, gdyby tego przetwornika nie było. Z tym łączy się ok. 5% błąd dynamiczny pomiaru siły.

Dokładne dopasowanie falowe przetwornika siły do obiektu badanego będzie w praktyce pomiarowej często niemożliwe ze względu na brak przetwornika o wymaganej impedancji mechanicznej. Brak dopasowania falowego spowoduje powstanie dużego dynamicznego błędu pomiaru.

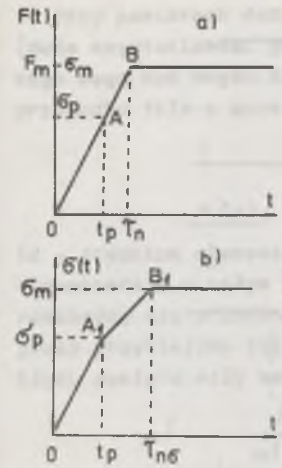
Jeżeli w pomiarach udarów nie dysponuje się przetwornikiem siły umożliwiającym dokładne dopasowanie falowe, należy zrezygnować z instalowania przetwornika. Większą dokładność pomiaru udaru siły uzyska się np. za pomocą tensometrów, bezpośrednio naklejonych na obiekcie badanym jako elemencie sprężystym, łącząc je w układ mostka Wheatstone'a i zasilając np. napięciem stałym. Całość można wzorcować statycznie.

Mierząc udar za pomocą przetwornika siły dokładnie wywzorcowanego (rozdział 4), ale niedopasowanego falowo do badanego obiektu fizycznego, popełnia się większy błąd dynamiczny, niż mierząc ten udar siły za pomocą tensometrów bezpośrednio naklejonych na obiekcie i wywzorcowanych statycznie z niedokładnością $\pm$ 2; $\pm$ 5, czy nawet $\pm$ 10%. Cienka warstwa kleju oraz tensometr praktycznie nie powodują zmiany impedancji mechanicznej obiektu badanego.

Zgodnie z danymi przedstawionymi w pracach [1, 27], przy pomiarach siły o czasie narastania $\tau_n \geq 1$ ms nie stwierdzono błędu dynamicznego spowodowanego warstwą kleju łączącego tensometr z powierzchnią elementu sprężystego. Błąd mieścił się w zakresie niedokładności pomiaru, tzn. nie przekraczał $\pm$ 0,5% wielkości mierzonej. Odpowiednio krótka baza tensometru rezystancyjnego, zgodnie ze wzorem (3.2), zapewnia dużą częstotliwość graniczną tensometru.

Dla impulsów jednokrotnych i wielokrotnych nieokresowych o czasie trwania $\tau < 1$ ms, o dowolnych czasowych przebiegach, gdy $\Delta_s^o \leq 10\%$, to zgodnie ze wzorami (2.1)...(2.5) oraz rys. 2.14 częstotliwość graniczna jest większa niż 1,5 kHz, a gdy $\Delta_s^o \leq 2\%$, to jest większa niż 3,5 kHz. Natomiast, zgodnie z rys. 2.15, dla przebiegów okresowych prostokątnych o częstotliwości $f \geq 1$ kHz i wypełnieniu $\tau/T < 0{,}5$ częstotliwość graniczna jest większa niż 10 kHz, gdy $\Delta_s^o \leq 10\%$.

W pomiarach udarów o dużej stromości naprężenia i po przekroczeniu określonej wartości naprężenia mechanicznego występuje lokalne odkształcenie plastyczne przy powierzchni zderzających się elementów [3, 18, 26]. Z tego powodu stromość czoła naprężenia mechanicznego w sprężystym elemencie przetwornika siły jest mniejsza niż stromość czoła, która wynikałaby teoretycznie z działania udaru. Zjawisko to może być źródłem błędu dynamicznego pomiaru udaru siły. W takich okolicznościach przetwornik będzie poprawnie przetwarzać siłę (np. o przebiegu skoku rzeczywistego - rysunek 2.16a) na naprężenie mechaniczne, jeżeli naprężenie przy powierzchni styku wywołane udarem będzie mniejsze niż dopuszczalna obliczeniowa wartość σ_p (np. dla stali miękkiej St-3; σ_p = 20 kPa) - odcinek 0 - A_1 na rys. 2.16b. Gdy naprężenie przy powierzchni przekroczy wartość σ_p, wystąpi plastyczne odkształcenie lokalne w najbardziej "wystających" częściach powierzchni styku (zderzające się elementy nie przylegają do siebie na całej powierzchni). W wyniku tego zjawiska szybkość narastania naprężenia mechanicznego w elemencie sprężystym zmniejszy się. Zjawisko to nie zależy od stopnia mechanicznego dopasowania falowego przetwornika siły. Prze-



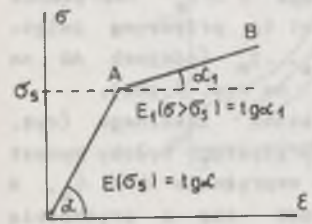
Rys. 2.16

a) przebieg siły o czasie τ_n narastania, przyłożonej do elementu sprężystego, b) przebieg naprężenie mechanicznego o czasie narastania $\tau_{n\sigma}$ wywołanego przebiegiem siły z rys. a)

twornik pośredniczący umieszczony w otoczeniu miejsca o współrzędnej x, przetwarzający naprężenie mechaniczne istniejące w elemencie sprężystym, będzie reagować na faktycznie występujący przebieg naprężenia (np. wg rys. 2.16b), a nie na przebieg, który wynikałby z siły działającej (np. przedstawionej na rys. 2.16a).

Zminimalizowanie błędu dynamicznego pomiaru siły, spowodowanego odkształceniem lokalnym, osiąga się zapewniając dużą i gładką powierzchnię stykających się elementów. Ponieważ odkształcenie plastyczne jest zlokalizowane w małym obszarze w pobliżu powierzchni styku elementów, to naprężenie powierzchniowe graniczne można zwiększyć przez utwardzenie powierzchni. Ogólnie zatem powierzchnia sprężystego elementu przetwornika, do której przykłada się siłę zmienną, powinna być utwardzona.

Przy pomiarach udarów o dużej stromości może też wystąpić zmniejszenie prędkości rozprzestrzeniania się fali naprężenia mechanicznego, gdy wartość naprężenia σ w elemencie sprężystym wzrośnie ponad granicę sprężystości σ_s (pkt A na rys. 2.17 i 2.18). Zgodnie z wykresem przedstawionym na rysunku 2.17, moduł sprężystości podłużnej E, dla $\sigma < \sigma_s$ wynosi:



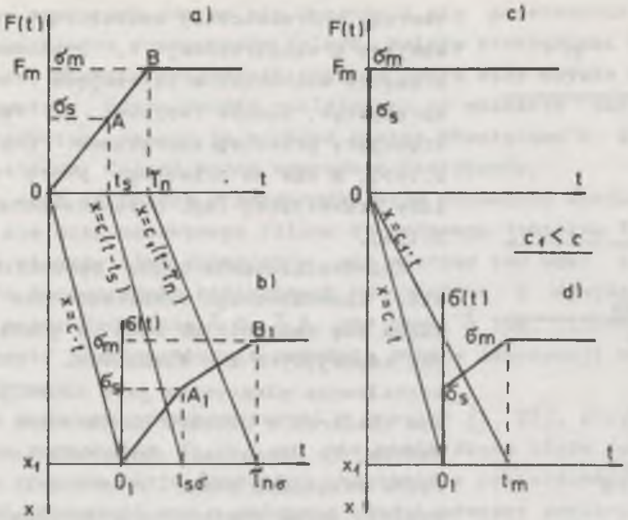
Rys. 2.17. Idealizowany wykres naprężenia mechanicznego w funkcji wydłużenia względnego

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\bigg|_{\sigma<\sigma_s} = tg\alpha = const \quad \text{(dla stali } E \approx 210 \text{ GPa)},$$

a fala przenosi się z prędkością $c = \sqrt{E/\rho}$ (dla stali $c \approx 5100$ m/s). Gdy naprężenie $\sigma > \sigma_s$, to moduł sprężystości:

$$E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\bigg|_{\sigma>\sigma_s} = tg\alpha_1 < E$$

i fala rozprzestrzenia się z prędkością $c_1 = \sqrt{E_1/\rho} < c$. Zjawisko to może spowodować "rozciągnięcie" czasu narastania naprężenia mechanicznego. Zdarza się, że czoło fali naprężenia rozchodzi się z prędkością c jako fala sprężysta, gdy $\sigma < \sigma_s$. Natomiast po nałożeniu się fali odbitej na falę pierwotną sumaryczne naprężenie może być większe niż granica sprężystości i fala odbita wraca już z mniejszą prędkością jako fala plas-



Rys. 2.18

a) skok rzeczywisty siły o czasie τ_n narastania, b) przebieg naprężenia, c) skok idealny siły ($\tau_n = 0$), d) przebieg naprężenia

tyczna. Na przykład dla stali konstrukcyjnej granica sprężystości σ_s = (0,2...2) GPa.

W czasie $t < t_s$ naprężenie $\sigma < \sigma_s$ przenosi się z prędkością c. W przekroju o współrzędnej x_1 przebieg naprężenia w czasie $t < t_s$ jest wiernym powtórzeniem przebiegu mierzonej siły. Dla $t > t_s$, naprężenie $\sigma > \sigma_s$ przemieszcza się z prędkością $c_1 < c$. Jest to przyczyną zwiększenia czasu narastania naprężenia od wartości $t_s \ldots \tau_n$ (odcinek AB na rys. 2.18a) do wartości $t_{s\sigma} \ldots \tau_{n\sigma}$ (odcinek A_1B_1 na rys. 2.18b).

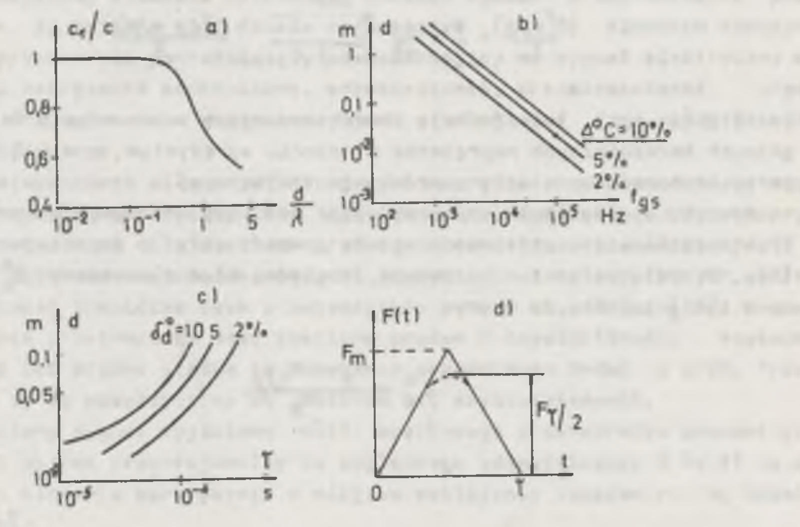
Gdyby przebieg mierzonej siły był zbliżony do skoku idealnego (rys. 2.18c), to naprężenie w przekroju x_1 elementu sprężystego byłoby wprost proporcjonalne do mierzonej siły tylko wtedy, gdy naprężenie $\sigma < \sigma_s$. W zakresie $\sigma > \sigma_s$, zgodnie z rys. 2.17, fala przenosi się z prędkością $c_1 < c$. Spowoduje to zmniejszenie stromości narastania naprężenia w czasie $t < t_m$ (rys. 2.18d). Przebieg naprężenia $\sigma(x_1,t)$ w przekroju o współrzędnej x_1 będzie różnić się od przebiegu siły F(t) działającej na przetwornik. Przetwornik będzie mierzyć siłę z błędem amplitudowym i fazowym.

Zminimalizowanie błędu dynamicznego pomiaru udaru siły, spowodowanego zwiększeniem czasu narastania naprężenia, gdy $\sigma > \sigma_s$, osiąga się dobierając przekrój sprężystego elementu przetwornika siły tak, aby maksymalne naprężenie (również po dodaniu się fali odbitej w przypadku braku dopasowania falowego) było mniejsze niż granica sprężystości σ_s.

Przy pomiarach dużych sił (duże przekroje), o dużej stromości udaru (duża częstotliwość graniczna siły), poprzeczne wymiary elementu sprężystego mogą być rzędu długości fali rozchodzącej się w danym rdzeniu. W tym przypadku fale o częstotliwości mniejszej niż [31]

$$f_g = \frac{c}{2\pi d} \tag{2.34}$$

(d - średnica elementu sprężystego o przekroju kołowym), rozchodzą się równomiernie w całym przekroju. Fale o większych częstotliwościach niż f_g rozchodzą się przede wszystkim w warstwie powierzchniowej, a więc tam, gdzie przyklejony jest tensometr. Jest to kolejna przyczyna dynamicznego błędu pomiaru siły szybkozmiennej.



Rys. 2.19

a) prędkość fali naprężenia mechanicznego w funkcji względnej średnicy rdzenia sprężystego, b) średnica rdzenia w funkcji częstotliwości granicznej siły, c) średnica rdzenia w funkcji czasu trwania impulsu siły, d) czasowy przebieg impulsu siły, c - prędkość fali przy $d << \lambda$ i małej szybkości narastania naprężenia, c_1 - prędkość fali o długości λ w osi sprężystego elementu o średnicy d

Prędkość rozchodzenia się fali w osi elementu sprężystego maleje ze wzrostem częstotliwości siły i ze wzrostem poprzecznych wymiarów elementu sprężystego [31]. Z rys. 2.19a wynika, że w elemencie sprężystym, którego wymiary poprzeczne są co najmniej o rząd mniejsze niż najkrótsza długość fali ($d/\lambda_n < 0,1$), prędkość rozchodzenia się naprężenia jest jednakowa w całym przekroju poprzecznym elementu. Natomiast w przypadku gdy d = 0,4λ-

- różnica prędkości wynosi ok. 5%, przy $d = 0{,}8\,\lambda$ ok. 20%, a przy $d = 1{,}5\,\lambda$ nawet 40%.

Dopuszczalną średnicę d stalowego elementu sprężystego, zapewniającą dla danej granicznej częstotliwości siły określoną względną różnicę prędkości ($\Delta^{o}c = \frac{c - c_1}{c}$) równą 10; 5 lub 2%, przedstawiono na rys. 2.19b. Rysunek ten umożliwia wyznaczenie takiej średnicy d przetwornika, aby dla określonej częstotliwości granicznej siły względna różnica prędkości $\Delta^{o}c$ była mniejsza niż odpowiednia wartość (np. 10; 5 lub 2%). Z kolei dla znanej częstotliwości granicznej siły i znanej średnicy d elementu sprężystego można oszacować zmianę prędkości fali naprężenia mechanicznego. Na przykład stosunek siły $F_{\tau/2}$, istniejącej w rdzeniu sprężystym po czasie $\tau/2$, do maksymalnej wartości siły F_m o postaci trójkąta, działającej na początek przetwornika o średnicy d, określa wzór [31]:

$$\frac{F_{\tau/2}}{F_n} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\varkappa(d,\, n/\tau)}{n^2} \tag{2.35}$$

gdzie $\varkappa(d,\, n/\tau)$ jest funkcją charakteryzującą przesunięcie fal poszczególnych harmonicznych naprężenia w rdzeniu sprężystym, $n = 1,3,5,\ldots$ nieparzyste harmoniczne siły o przebiegu trójkątnym.

Rys. 2.19c umożliwia poprawny dobór średnicy d sprężystego elementu przetwornika siły, przeznaczonego do pomiaru siły o przebiegu trójkątnym (rys. 2.19d), o czasie τ trwania. Względny błąd dynamiczny δ^{o}_{d} wyznaczono w tym przypadku ze wzoru:

$$\delta^{o}_{d} = \frac{F_m - F_{\tau/2}}{F_m}.$$

3. PRZETWORNIKI SIŁY - CHARAKTERYSTYKA DYNAMICZNA

3.1. Charakterystyka dynamiczna przetworników siły o różnej zasadzie działania

Analizowane będą właściwości przetworników siły zmiennej, których czujnikiem jest element sprężysty o różnych warunkach brzegowych (brzeg swobodny, sztywny lub mechanicznie dopasowany falowo), a do przetworzenia siły na sygnał elektryczny wykorzystuje się przetworniki pośredniczące o różnej fizycznej zasadzie działania. Analiza będzie przeprowadzone przy założeniu, że zmienna siła działa na początek ($x = 0$) elementu sprężystego, a przetwornik pośredniczący przetwarzający na sygnał elektryczny odpowiednio naprężenie mechaniczne, odkształcenie, przemieszczenie, prędkość lub przyspieszenie umieszczony jest w odległości x od początku elementu sprężystego.

W przetwornikach siły przetwarzających naprężenie mechaniczne na sygnał elektryczny wykorzystuje się zjawisko piezomagnetyczne. Magnetosprężyste przetworniki siły zasilane prądem o częstotliwości sieciowej ($f = 50$ Hz) stosowane są do pomiarów sił statycznych i wolnozmiennych. Górna częstotliwość graniczna tych przetworników wynosi ok. 10 Hz [19]. Magnetosprężyste przetworniki siły zasilane prądem o częstotliwości większej niż 50 Hz lub prądem stałym są aktualnie przedmiotem badań i prób. Przetworniki te są nieprzydatne do pomiarów sił szybkozmiennych.

Napięciowy sygnał wyjściowy $u(t)$ mostkowego przetwornika tensometrycznego jest wprost proporcjonalny do względnego odkształcenia $\varepsilon(x,t)$ na powierzchni elementu sprężystego w miejscu naklejenia tensometru, wg zależności [51]:

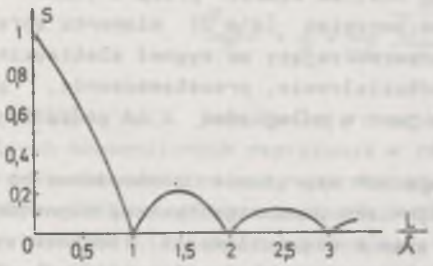
$$u_{\varepsilon}(t) = k_1 \varepsilon_{\acute{s}r}(0{,}5\, l;\, t) = \frac{k_1}{L} \int_{\frac{l-L}{2}}^{\frac{l+L}{2}} \varepsilon(x,t)\,dx \tag{3.1}$$

gdzie k_1 jest współczynnikiem zależnym od konstrukcji przetwornika siły, czułości tensometrów i napięcia zasilającego mostek tensometryczny, l jest długością sprężystego elementu przetwornika, $\varepsilon_{\acute{s}r}(0{,}5\, l;\, t)$ jest chwilową wartością uśrednionego na długości L bazy tensometru odkształcenia względnego w otoczeniu współrzędnej $x = 0{,}5\, l$.

Tensometr rezystancyjny nie zapewnia punktowego pomiaru odkształcenia powierzchniowego (wzór(3.1)) i z tego względu przy pomiarach występuje zjawisko uśrednienia, które jest źródłem błędów amplitudowych i fazowych. Zjawisko to wyznacza częstotliwość graniczną tensometru wg wzoru [19, 37]:

$$f_g = \frac{c}{\pi L}\sqrt{6\delta^{o}_{u\acute{s}r}} \tag{3.2}$$

Ze wzoru (3.2) wynika, że tensometr rezystancyjny o bazie $L \leq 5$ mm, naklejony na stalowym ($c = 5100$ m/s) elemencie sprężystym, przy założonym błędzie uśrednienia $\delta^{o}_{u\acute{s}r} = 1\%$, ma częstotliwość graniczną nie mniejszą niż 80 kHz ($f_g \geq 80$ kHz). Czułość S tensometrów rezystancyjnych w funkcji długości bazy L, odniesionej do długości λ fali odkształcenia względnego [27], przedstawia rys. 3.1. Właściwości dynamiczne tensometrów rezystancyjnych nie są krytyczne w pomiarach udarów siły. Tensometry o odpowiednio krótkiej bazie zapewniają wystarczająco dużą częstotliwość graniczną przetwarzania siły zmiennej. Z tego względu tensometry rezystancyjne są najczęściej stosowane w pomiarach siły szybkozmiennej, a w pomiarach udaru siły są jedynymi przetwornikami zapewniającymi najmniejsze dynamiczne błędy przetwarzania.



Rys. 3.1. Czułość tensometru rezystancyjnego w funkcji względnej długości bazy

Rozkład naprężenia mechanicznego statycznego w poprzecznym przekroju elementu jest prawie równomierny w odległości równej średnicy elementu, licząc od miejsca przyłożenia siły [21] i ten fakt uwzględnia się przy wyborze miejsca naklejania tensometrów. Równomierny rozkład naprężeń dynamicznych w poprzecznym przekroju zapewniają elementy sprężyste o małej średnicy (p. 2.4, rys. 2.19b,c). Błędy amplitudowy i fazowy zależą również od właściwości warstwy kleju łączącego tensometr z powierzchnią elementu sprężystego. Według pracy [1] błędy te są funkcją rodzaju kleju, jego sprężystości, gęstości i grubości warstwy kleju. Zastosowanie odpowiednio dobrego kleju umożliwia wierne przetworzenie odkształcenia powierzchniowego przez tensometr rezystancyjny.

Występuje trudność techniczna zapewnienia mechanicznej trwałości elektrycznych przewodów łączących tensometry z układem pomiarowym w przypadku pomiaru wielokrotnych udarów siły, które powodują duże przyspieszenia (np. pomiar przebiegu siły w żerdzi wiertarki udarowej).

Zastosowany na wyjściu tensometrycznego przetwornika siły pomiarowy wzmacniacz szerokopasmowy musi mieć odpowiednią pulsację graniczną, a wymaganie takie nie jest trudne do spełnienia. Długość kabli ekranowanych, łączących przetwornik siły z urządzeniami pomiarowymi, nie może być duża,

żeby pojemność kabli nie była większa niż dopuszczalna C_{dop}, obliczona ze wzoru [36]:

$$C_{dop} = \frac{1}{R\omega_g}\sqrt{\delta^{o}_{dop}}, \tag{3.3}$$

gdzie R jest rezystancją tensometru.

Przetworniki siły, przetwarzające przemieszczenie określonego przekroju o współrzędnej x elementu sprężystego na sygnał elektryczny, realizuje się ze pomocą przetworników pośredniczących indukcyjnościowych lub pojemnościowych. Górna częstotliwość graniczna przetworników indukcyjnościowych wynosi (1...10) kHz i zależy od częstotliwości prądu [19]. Większą częstotliwość graniczną górną (do 50 kHz), zależnie od konstrukcji mechanicznej, mają przetworniki pojemnościowe i te mogą być przydatne do pomiarów siły szybkozmiennej.

Można przyjąć z wystarczającą dla techniki pomiarowej dokładnością, że dla małych przemieszczeń $w(t)$ napięcie $u_w(t)$ na wyjściu przetworników pojemnościowych jest wprost proporcjonalne do przemieszczenia:

$$u_w(t) = k_2\, w(t), \tag{3.4}$$

gdzie k_2 jest czułością przetwornika, $w(t)$ jest przemieszczeniem ruchomej elektrody przetwornika pojemnościowego. Ruchoma elektroda połączona jest z miejscem o współrzędnej x elementu sprężystego. Trudność polega na zapewnieniu odpowiednio sztywnego połączenia tej elektrody z określonym miejscem, aby przemieszczenie $w(t)$ elektrody było równe przemieszczeniu $w(x,t)$ przekroju o współrzędnej x elementu sprężystego w czasie t. Z tego względu autor nie zaleca stosowania przetworników pojemnościowych do pomiarów udarów siły.

Pod wpływem zmiennej siły $F(t)$, działającej na początek przetwornika siły, poszczególne przekroje $S(x)$ elementu sprężystego odległe o x od początku przemieszczają się z prędkością $v(x,t)$. Przetworzenie prędkości na wprost proporcjonalne napięcie elektryczne $u_v(x,t)$ realizuje się za pomocą przetworników pośredniczących indukcyjnych wg zależności:

$$u_v(x,t) = k_3\, v(x,t), \tag{3.5}$$

gdzie k_3 jest czułością indukcyjnego przetwornika siły.

W tym przypadku sztywne połączenie ruchomej części przetwornika indukcyjnego (magnes trwały lub cewka) z określonym miejscem o współrzędnej x sprężystego elementu przetwornika siły da się zrealizować w sposób zadowalający.

Dokładne odtworzenie prędkości $v(x,t)$ przez przetwornik indukcyjny przy dużej stromości naprężenia mechanicznego wymaga, zgodnie z p. 2.4

(rys. 2.19), zastosowania małej średnicy elementu sprężystego. Częstotliwość graniczna pośredniczącego przetwornika indukcyjnego wynosi (1...10) kHz. Przebieg siły mierzonej działającej na indukcyjny przetwornik siły, stosownie do wzorów (2.23), (3.5) i (3.10), otrzymuje się po scałkowaniu elektrycznego sygnału wyjściowego tego przetwornika. Przetworniki te, zdaniem autora, są przydatne w pomiarach siły zmiennej o częstotliwości granicznej do 10 kHz.

Zmienna siła $F(t)$, działająca na początek sprężystego elementu przetwornika siły, powoduje przemieszczenie przekroju $S(x)$ przetwornika z przyspieszeniem $a(x,t)$. Przetwarzanie przyspieszenia na wprost proporcjonalne napięcie elektryczne $u_a(x,t)$ jest realizowane za pomocą pośredniczących przetworników piezoelektrycznych (akcelerometrów). Po spełnieniu określonych wymagań konstrukcyjnych napięcie na wyjściu przetwornika piezoelektrycznego określa wzór:

$$u_a(x,t) = k_4\, a(x,t), \tag{3.6}$$

gdzie k_4 jest czułością piezoelektrycznego przetwornika siły. Dokładne przetwarzanie przyspieszenia $a(x,t)$ w napięcie elektryczne $u(x,t)$ będzie realizowane w przypadku sztywnego połączenia akcelerometru z określonym przekrojem o współrzędnej x czujnika. Połączenie takie jest technicznie możliwe do wykonania. Akcelerometry o masie nie większej niż 3 gramy [6] nie będą miały wpływu na przebieg zjawiska w obiekcie badanym, nawet w pomiarach uderów siły, jeżeli masa obiektu będzie większa niż 0,2 kg. Górna częstotliwość graniczna akcelerometrów wynosi (10...100) kHz. Przebieg siły działającej na przetwornik, stosownie do wzorów (2.23), (3.6) i (3.12), otrzymuje się po dwukrotnym scałkowaniu napięcie elektrycznego na wyjściu akcelerometru.

3.2. Charakterystyka przetworników siły ze względu na warunki brzegowe elementu sprężystego

W punkcie 3.2 będzie przedstawiona analiza zjawisk falowych w elemencie sprężystym przetwornika siły i wywołanych nimi błędów dynamicznych. Będą uwzględnione takie czynniki, jak: zasada działania i położenie przetwornika pośredniczącego na elemencie sprężystym, warunki brzegowe umocowania czujnika oraz pulsacja mierzonej siły.

Zależności określające sygnały na wyjściu przetworników pośredniczących, tj. te wielkości, które są skutkiem działania siły mierzonej, otrzymano z równania (2.21), rozwiązując je przy trzech założeniach:

1) Długość przetwornika pośredniczącego jest mała w porównaniu z długością przemieszczającej się fali. Oznacza to, że chwilowe wartości napięcia wyjściowego przetwornika siły są wprost proporcjonalne do chwilowych wartości odpowiednio: naprężenia, odkształcenia, przemieszczenia, prędkości lub przyspieszenia istniejącego w przekroju o współrzędnej x.

2) Występuje zerowe tłumienie $(B = 0)$ w elemencie sprężystym, co zgodnie z p. 2.3 jest uproszczeniem dopuszczalnym w czasie $t < 6\ l/c$.

3) Istnieją zerowe warunki początkowe i wymuszenie siłą harmoniczną

$$F(0,t) = 1(t)\, F_m \sin\omega t \tag{3.7}$$

działającą na początek $(x = 0)$ elementu sprężystego.

3.2.1. Element sprężysty o brzegach swobodnych

Równanie (2.21) rozwiązano metodą transformacji Laplace'a, stosując przekształcenie tylko dla zmiennej t. Wynik przedstawiono w postaci szeregu geometrycznego, a następnie powrócono do postaci czasowej [52, 53]. Wyznaczono chwilowe wartości napięcia elektrycznego $u(x,t)$ na wyjściu danego przetwornika siły. Przetworniki pośredniczące umieszczono w odległości x na sprężystym elemencie o brzegach swobodnych (rys. 7.1) o warunkach brzegowych

$$\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{F(0,t)}{ES} \quad \text{i} \quad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0.$$

Napięcie elektryczne $u_w(x,t)$ na wyjściu pojemnościowego przetwornika siły, proporcjonalne do przemieszczenia $w(x,t)$, po uwzględnieniu wzoru (3.4) jest opisane równaniem:

$$u_w(x,t) = -\frac{ck_2F_m}{ES\omega}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\right]\right\}. \tag{3.8}$$

Napięcie elektryczne $u_\varepsilon(x,t)$ na wyjściu tensometrycznego przetwornika siły, proporcjonalne do odkształcenia względnego $\varepsilon(x,t)$, po uwzględnieniu wzoru (3.1) jest opisane równaniem:

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{k_1F_m}{ES}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\right]. \tag{3.9}$$

Napięcie elektryczne $u_v(x,t)$ na wyjściu indukcyjnego przetwornika siły, zgodnie ze wzorem (3.5), jest proporcjonalne do prędkości $v(x,t)$. Chwilową wartość prędkości $v(x,t)$ obliczono jako pochodną przemieszczenia $w(x,t)$, czyli:

$$v(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \tag{3.10}$$

Różniczkując względem czasu wyrażenie opisujące wzdłużne przemieszczenie $w(x,t)$ w przekroju o współrzędnej x elementu sprężystego i uwzględniając równanie (3.5), otrzymano zależność określającą chwilową wartość napięcia elektrycznego $u_v(x,t)$ na wyjściu indukcyjnego przetwornika, którego część ruchomą sztywno złączono z przekrojem o współrzędnej x elementu sprężystego:

$$u_v(x,t) = -\frac{ck_3F_m}{ES}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\right]. \tag{3.11}$$

Napięcie elektryczne $u_a(x,t)$ na wyjściu piezoelektrycznego przetwornika siły, zgodnie ze wzorem (3.6), jest proporcjonalne do przyspieszenia $a(x,t)$. Chwilową wartość przyspieszenia wyznaczono z zależności:

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3.12}$$

Różniczkując dwukrotnie względem czasu równanie opisujące przemieszczenie $w(x,t)$ i uwzględniając wzór (3.6), otrzymano zależność określającą chwilową wartość napięcia elektrycznego $u_a(x,t)$ na wyjściu piezoelektrycznego przetwornika, sztywno złączonego z przekrojem o współrzędnej x elementu sprężystego:

$$u_a(x,t) = -\frac{ck_4F_m\omega}{ES}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\cos\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\cos\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\right]. \tag{3.13}$$

Porównanie czasowego przebiegu napięcia na wyjściu poszczególnych rodzajów przetworników siły z czasowym przebiegiem mierzonej siły przeprowadzono za pomocą unormowanej wielkości, zdefiniowanej następująco:

a) unormowana siła:

$$F^*(0,t) = \frac{F(0,t)}{F_m}, \tag{3.14}$$

b) unormowane napięcie na wyjściu pośredniczących przetworników siły:

$$\left.\begin{aligned}
&- \text{pojemnościowego} && u_w^*(x,t) = \frac{ES\omega}{ck_2F_m}\,u_w(x,t)\\
&- \text{tensometrycznego} && u_\varepsilon^*(x,t) = \frac{ES}{k_1F_m}\,u_\varepsilon(x,t)\\
&- \text{indukcyjnego} && u_v^*(x,t) = \frac{ES}{ck_3F_m}\,u_v(x,t)\\
&- \text{piezoelektrycznego} && u_a^*(x,t) = \frac{ES}{ck_4F_m\omega}\,u_a(x,t)
\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Wyznaczono przebiegi napięcia dla poszczególnych przetworników siły, w których przetworniki pośredniczące umieszczono w wybranych charakterystycznych miejscach o współrzędnych (I) $x = 0$ (początek elementu sprężystego), (II) $x = 0{,}5\,l$ (środek długości elementu) i (III) $x = l$ (koniec elementu).

Czasowe przebiegi unormowanego napięcia $u^*(x,t)$ na wyjściu przetworników siły, których elementy sprężyste mają brzegi swobodne, są następujące:

(I) <u>dla $x = 0$</u>

- przetwornika pojemnościowego, zgodnie ze wzorami (3.8) i (3.15)

$$u_w^*(0,t) = -\left\{1(t)(1 - \cos\omega t) + 2\cdot 1\left(t - \frac{2l}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \frac{2l}{c}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + 2\cdot 1\left(t - \frac{4l}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \frac{4l}{c}\right)\right] + \ldots\right\},$$

- przetwornika tensometrycznego, zgodnie ze wzorami (3.9) i (3.15)

$$u_\varepsilon^*(0,t) = 1(t)\sin\omega t \tag{3.16}$$

- przetwornika indukcyjnego, zgodnie ze wzorami (3.11) i (3.15)

$$u_v^*(0,t) = -1(t)\sin\omega t - 2\cdot 1\left(t - \frac{2l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2l}{c}\right) -$$

$$- 2\cdot 1\left(t - \frac{4l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{4l}{c}\right) - \ldots,$$

- przetwornika piezoelektrycznego, zgodnie ze wzorami (3.13) i (3.15)

$$u_a^*(0,t) = -1(t)\cos\omega t - 2\,1\left(t - \frac{2l}{c}\right)\cos\omega\left(t - \frac{2l}{c}\right) -$$

$$- 2\cdot 1\left(t - \frac{4l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{4l}{c}\right) - \ldots$$

(II) dla $x = 0,5\ l$, odpowiednio

$$
\left.
\begin{aligned}
u_w^*(0{,}5\ l;\ t) &= -\Big\{\mathbf{1}\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right)\right] + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right)\right] + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right)\right] + \ldots\Big\}, \\
u_\varepsilon^*(0{,}5\ l;\ t) &= \mathbf{1}\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right) - \\
&\quad - \mathbf{1}\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right) + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right) - \ldots, \\
u_v^*(0{,}5\ l;\ t) &= -\mathbf{1}\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right) - \\
&\quad - \mathbf{1}\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right) - \\
&\quad - \mathbf{1}\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right) - \ldots, \\
u_a^*(0{,}5\ l;\ t) &= -\mathbf{1}\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right)\cos\omega\left(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}\right) - \\
&\quad - \mathbf{1}\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right)\cos\omega\left(t - \tfrac{1{,}5\ l}{c}\right) - \\
&\quad - \mathbf{1}\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right)\cos\omega\left(t - \tfrac{2{,}5\ l}{c}\right) - \ldots
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.17)
$$

(III) dla $x = l$, odpowiednio

$$
\left.
\begin{aligned}
u_w^*(l,t) &= -2\Big\{\mathbf{1}\left(t - \tfrac{l}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \tfrac{l}{c}\right)\right] + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{3l}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \tfrac{3l}{c}\right)\right] + \ldots\Big\}, \\
u_\varepsilon^*(l,t) &= 0, \\
u_v^*(l,t) &= -2\Big[\mathbf{1}\left(t - \tfrac{l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{l}{c}\right) + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{3l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{3l}{c}\right) + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{5l}{c}\right)\sin\omega\left(t - \tfrac{5l}{c}\right) + \ldots\Big], \\
u_a^*(l,t) &= -2\Big[\mathbf{1}\left(t - \tfrac{l}{c}\right)\cos\omega\left(t - \tfrac{l}{c}\right) + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{3l}{c}\right)\cos\omega\left(t - \tfrac{3l}{c}\right) + \\
&\quad + \mathbf{1}\left(t - \tfrac{5l}{c}\right)\cos\omega\left(t - \tfrac{5l}{c}\right) + \ldots\Big].
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.18)
$$

Porównując odpowiedź przewidywaną wg modelu o stałych skupionych (p. 2.2) z odpowiedzią wynikającą z modelu o stałych rozłożonych, widoczna jest istotna rozbieżność wyników. W modelu elementarnym ze zmianą pulsacji zmienia się amplituda i przesunięcie fazowe (wzór (2.9) i rys. 2.3)), a warunki brzegowe oraz położenie przetwornika pośredniczącego nie są rozpatrywane i nie są uwzględniane. Z analizy modelu o stałych rozłożonych wynika zależność czułości oraz wartości błędu dynamicznego od pulsacji, warunków brzegowych oraz od położenia przetwornika pośredniczącego w otoczeniu współrzędnej x. Każdy z tych czynników może być źródłem błędu dynamicznego.

Przebieg umormowanej siły

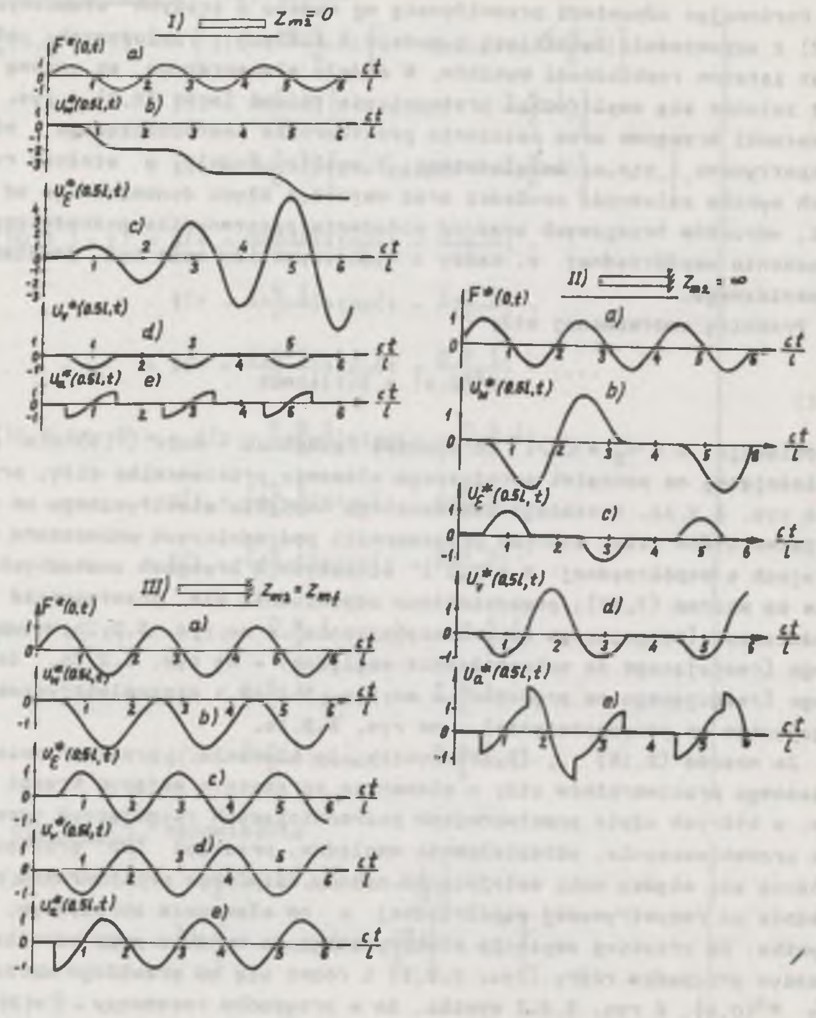
$$F^*(0,t) = \mathbf{1}(t)\sin\omega t$$

o pulsacji $\omega = \nu_2 = \pi c/l$ (przypadek rezonansu - wzór (7.3) dla $n = 2$), działającej na początek sprężystego elementu przetwornika siły, przedstawia rys. 3.2.Ia. Przebiegi umormowanego napięcia elektrycznego na wyjściu przetworników siły, których przetworniki pośredniczące umieszczono w przekrojach o współrzędnej $x = 0,5\ l$ elementów o brzegach swobodnych, zgodnie ze wzorem (3.17), przedstawiono odpowiednio dla przetwornika pojemnościowego (reagującego na przemieszczenie) - na rys. 3.2.Ib, tensometrycznego (reagującego na odkształcenie względne) - na rys. 3.2.Ic, indukcyjnego (reagującego na prędkość) - na rys. 3.2.Id i piezoelektrycznego (reagującego na przyspieszenie) - na rys. 3.2.Ie.

Ze wzorów (3.16) ... (3.18) wynika, że równanie przetwarzania dynamicznego przetworników siły o elemencie sprężystym mającym brzegi swobodne, w których użyto przetworników pośredniczących reagujących odpowiednio na przemieszczenie, odkształcenie względne, prędkość lub przyspieszenie różnią się między sobą zależnie od zasady działania przetwornika oraz zależnie od rozpatrywanej współrzędnej x na elemencie sprężystym. Z tego wynika, że przebieg napięcia elektrycznego na wyjściu przetwornika jest w każdym przypadku różny (rys. 3.2.I) i różni się od przebiegu mierzonej siły $F^*(0,t)$. Z rys. 3.2.I wynika, że w przypadku rezonansu ($\omega = \pi c/l$), sygnał wyjściowy oraz błąd dynamiczny przetwarzania rosną w funkcji czasu w przypadku zastosowania przetwornika pojemnościowego lub tensometrycznego, a nie zależą od czasu w przypadku zastosowania przetwornika indukcyjnego lub piezoelektrycznego.

3.2.2. Element sprężysty o początku swobodnym a końcu zamocowanym sztywno

Równanie (2.21) rozwiązano przy analogicznych założeniach jak w pkt. 3.2.1, lecz dla elementu sprężystego o początku swobodnym i końcu sztywno zamocowanym, czyli dla warunków brzegowych:



Rys. 3.2. Przebiegi

a) unormowanej siły $F^*(0,t)$ oraz unormowanego napięcia wyjściowego przetworników: b) pojemnościowego $u_w^*(0{,}5\ l;t)$, c) tensometrycznego $u_\varepsilon^*(0{,}5\ l;t)$, d) indukcyjnego $u_v^*(0{,}5\ l;t)$, e) piezoelektrycznego $u_a^*(0{,}5\ l;t)$ dla $x = 0{,}5\ l$, $\omega = \pi c/l$ i elementu sprężystego o początku swobodnym $(Z_{m1} = 0)$ i końcu odpowiednio: (I) swobodnym $(Z_{m2} = 0)$, (II) zamocowanym sztywno $(Z_{m2} = \infty)$ i (III) dopasowanym falowo $(Z_{m2} = Z_{mf})$

$$\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{F(0,t)}{ES} \quad \text{i} \quad w(l,t) = 0. \tag{3.19}$$

Wzory określające przemieszczenia $w(x,t)$ i naprężenia mechaniczne $\sigma(x,t)$ przytoczono za pracami [52] i [53].

Wyznaczono napięcia elektryczne $u(x,t)$ na wyjściu przetworników pośredniczących o zasadach działania takich jak w p. 3.1. Wejścia tych przetworników złączone są na sztywno z elementem sprężystym w otoczeniu współrzędnej x. Przebieg wyjściowego napięcia elektrycznego wyrażają odpowiednio zależności:

- dla przetwornika pojemnościowego (zgodnie z (3.4))

$$u_w(x,t) = \frac{ck_2F_m}{ES\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,1\!\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,1\!\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\left[1 - \cos\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\right]\right], \tag{3.20}$$

- dla przetwornika tensometrycznego (zgodnie z (3.1))

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{k_1F_m}{ES}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,1\!\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,1\!\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\right], \tag{3.21}$$

- dla przetwornika indukcyjnego (zgodnie ze wzorami (3.5) i (3.10))

$$u_v(x,t) = \frac{ck_3F_m}{ES}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,1\!\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,1\!\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\right], \tag{3.22}$$

- dla przetwornika piezoelektrycznego (zgodnie ze wzorami (3.6) i (3.12))

$$u_a(x,t) = \frac{ck_4F_m\omega}{ES}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,1\!\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\cos\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,1\!\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\cos\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\right]. \tag{3.23}$$

Po uwzględnieniu wzorów (3.15) i (3.20) ... (3.23) czasowe przebiegi unormowanego napięcia na wyjściu poszczególnych przetworników, gdy ich wejścia mają współrzędne $x = 0$, $x = 0{,}5\,l$ i $x = l$ na elemencie sprężystym o początku swobodnym, a końcu zamocowanym sztywno, są następujące:

(I) dla $x = 0$, odpowiednio

$$
\left.
\begin{aligned}
u^*_w(0,t) &= -1(t)(1-\cos\omega t) + 2\cdot 1\left(t-\frac{2l}{c}\right)\left[1-\cos\omega\left(t-\frac{2l}{c}\right)\right] - \\
&\quad - 2\cdot 1\left(t-\frac{4l}{c}\right)\left[1-\cos\omega\left(t-\frac{4l}{c}\right)\right] + \ldots,\\
u^*_\varepsilon(0,t) &= 1(t)\sin\omega t,\\
u^*_v(0,t) &= -1(t)\sin\omega t + 2\cdot 1\left(t-\frac{2l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{2l}{c}\right) - \\
&\quad - 2\cdot 1\left(t-\frac{4l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{4l}{c}\right) + \ldots,\\
u^*_a(0,t) &= -1(t)\cos\omega t + 2\cdot 1\left(t-\frac{2l}{c}\right)\cos\omega\left(t-\frac{2l}{c}\right) - \\
&\quad - 2\cdot 1\left(t-\frac{4l}{c}\right)\cos\omega\left(t-\frac{4l}{c}\right) + \ldots
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.24)
$$

(II) dla $x = 0{,}5\,l$, odpowiednio

$$
\left.
\begin{aligned}
u^*_w(0{,}5\,l;t) &= -1\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right)\left[1-\cos\omega\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right)\right] + \\
&\quad + 1\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right)\left[1-\cos\omega\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right)\right] + \\
&\quad + 1\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right)\left[1-\cos\omega\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right)\right] - \ldots,\\
u^*_\varepsilon(0{,}5\,l;t) &= 1\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right) + \\
&\quad + 1\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right) - \\
&\quad - 1\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right) - \\
&\quad - 1\left(t-\frac{3{,}5\,l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{3{,}5\,l}{c}\right) + \ldots,\\
u^*_v(0{,}5\,l;t) &= -1\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right) + \\
&\quad + 1\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right) + \\
&\quad + 1\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right) - \ldots,\\
u^*_a(0{,}5\,l;t) &= -1\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right)\cos\omega\left(t-\frac{0{,}5\,l}{c}\right) + \\
&\quad + 1\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right)\cos\omega\left(t-\frac{1{,}5\,l}{c}\right) + \\
&\quad + 1\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right)\cos\omega\left(t-\frac{2{,}5\,l}{c}\right) - \ldots
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.25)
$$

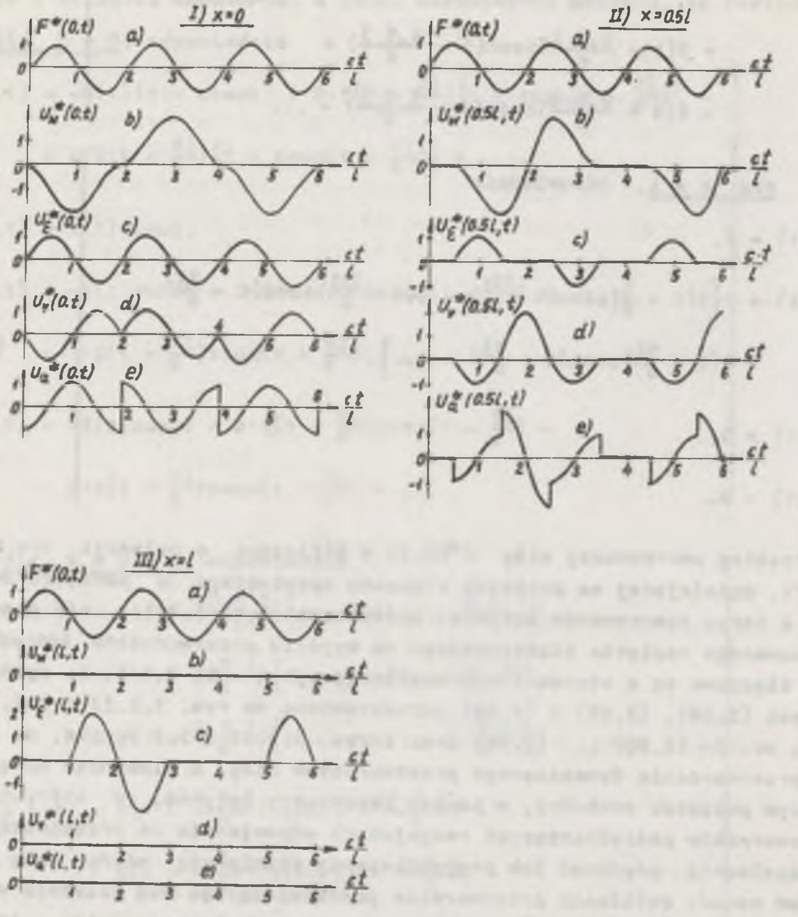
(III) dla $x = l$, odpowiednio

$$
\left.
\begin{aligned}
u^*_w(l,t) &= 0,\\
u^*_\varepsilon(l,t) &= 2\left[1\left(t-\frac{l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{l}{c}\right) - 1\left(t-\frac{3l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{3l}{c}\right) + \right.\\
&\quad \left. + 1\left(t-\frac{5l}{c}\right)\sin\omega\left(t-\frac{5l}{c}\right) - \ldots\right],\\
u^*_v(l,t) &= 0,\\
u^*_a(l,t) &= 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.26)
$$

Przebieg unormowanej siły $F^*(0,t) = 1(t)\sin\omega t$ o pulsacji $\omega = 2\nu_1 = \pi c/l$, działającej na początek elementu sprężystego o początku swobodnym, a końcu zamocowanym sztywno, przedstawia rys. 3.2.IIa, zaś przebiegi unormowanego napięcia elektrycznego na wyjściu przetworników, których wejście złączone są z otoczeniem o współrzędnej $x = 0$; $0{,}5\,l$; l, zgodnie ze wzorami (3.24), (3.25) i (3.26) przedstawiono na rys. 3.2.II i 3.3.

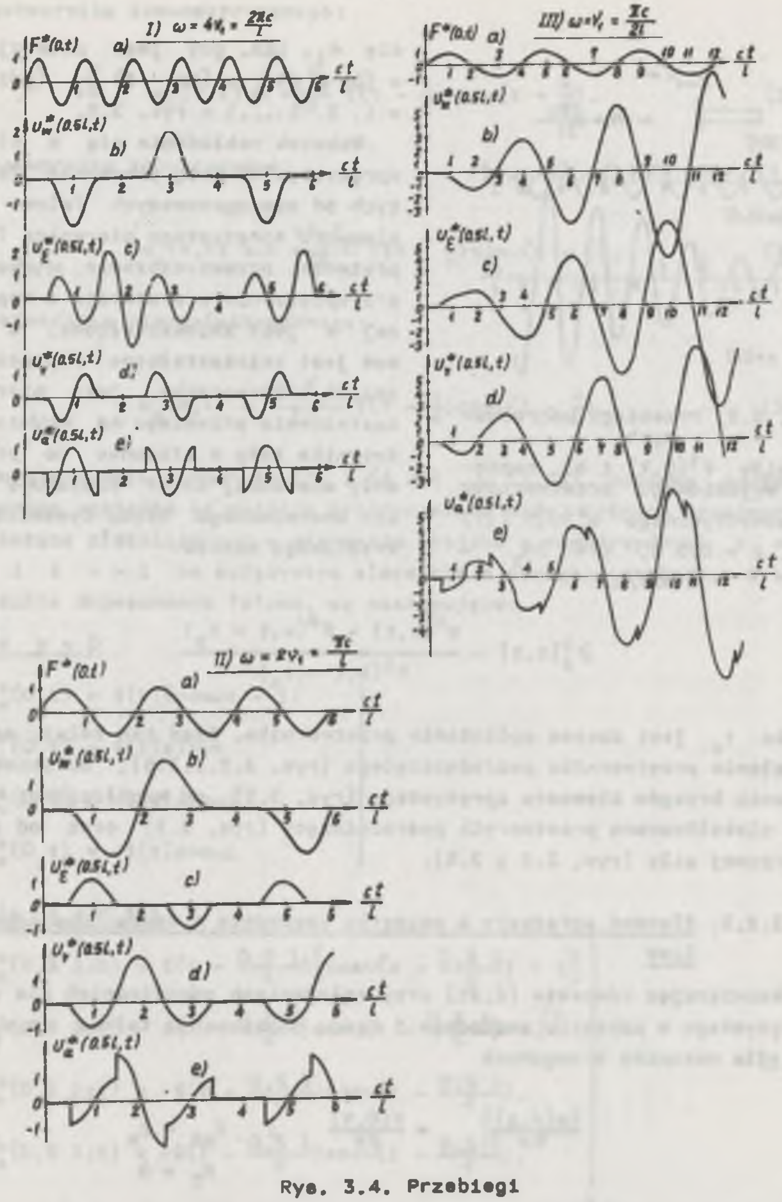
Ze wzorów (3.20) ... (3.23) oraz z rys. 3.2.II i 3.3 wynika, że równanie przetwarzania dynamicznego przetworników siły o elemencie sprężystym mającym początek swobodny, a koniec zamocowany sztywno, w których użyto przetworników pośredniczących reagujących odpowiednio na przemieszczenie, odkształcenie, prędkość lub przyspieszenie różnią się między sobą zależnie od zasady działania przetwornika pośredniczącego oraz zależnie od rozpatrywanej współrzędnej na elemencie sprężystym. Z tego wynika, że przebieg napięcia na wyjściu jest w każdym przypadku różny w stosunku do przebiegu mierzonej siły $F^*(0,t)$. Jedynie przebieg napięcia $u^*_\varepsilon(0,t)$ (rys. 3.3.Ic) na wyjściu tensometrycznego przetwornika siły może być identyczny z przebiegiem siły (rys. 3.3a), gdy współrzędna naklejonego tensometru wynosi $x = 0$.

Jak widać na rys. 3.2, 3.3, 3.4 oraz 3.5, mimo sinusoidalnego przebiegu siły $F(0,t)$, działającej na początek elementu sprężystego, napięcie elektryczne na wyjściu przetworników jest w większości przypadków niesinusoidalne. W każdym z rozpatrywanych przypadków występują duże błędy dynamiczne przetwarzania. Wskutek działania siły harmonicznej sygnał wyjściowy rośnie nie tylko w przypadku rezonansu, czyli gdy $\omega = \nu_1$ (rysunek 3.2.I oraz 3.4.III), ale również gdy siła jest nieparzystą wielokrotnoś-



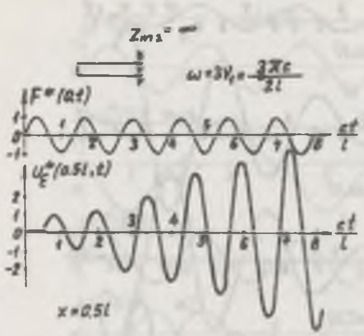
Rys. 3.3. Przebiegi

a) unormowanej siły $F^*(0,t)$ oraz unormowanego napięcia wyjściowego przetworników: b) pojemnościowego $u_w^*(x,t)$, c) tensometrycznego $u_\varepsilon^*(x,t)$, d) indukcyjnego $u_v^*(x,t)$, e) piezoelektrycznego $u_a^*(x,t)$ dla $\omega = 2\nu_1 = \pi c/l$, odpowiednio w przekrojach (I) $x = 0$, (II) $x = 0{,}5\ l$ i (III) $x = l$



Rys. 3.4. Przebiegi

a) unormowanej siły $F^*(0,t)$ oraz unormowanego napięcia wyjściowego przetworników: b) pojemnościowego $u_w^*(0{,}5\ l;t)$; c) tensometrycznego $u_\varepsilon^*(0{,}5\ l;t)$; d) indukcyjnego $u_v^*(0{,}5\ l;t)$; e) piezoelektrycznego $u_a^*(0{,}5\ l;t)$ dla $x = 0{,}5\ l$ i pulsacji odpowiednio: (I) $\omega = 4\nu_1 = 2\pi c/l$, (II) $\omega = 2\nu_1 = \pi c/l$ i (III) $\omega = \nu_1 = \pi c/2l$ (przypadek rezonansu)



Rys. 3.5. Przebiegi unormowanych
a) siły $F^*(0,t)$ i b) napięcia wyjściowego przetwornika tensometrycznego $u^*_\varepsilon(0{,}5\ l;t)$ dla $x = 0{,}5\ l$, $\omega = 3\vartheta_1 = 3\pi c/2l$

cię ϑ_1, tzn. gdy jest pulsację $\omega = (2n - 1)\vartheta_1 = (2n - 1)\frac{c}{2l}$ (gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$) - rys. 3.5.

Wskutek nakładania się w elemencie sprężystym na falę pierwotną fal odbitych od niedopasowanych falowo brzegów elementu sprężystego pierwotna fala naprężenia, przemieszczenia, prędkości lub przyspieszenia w przekroju o współrzędnej x jest zniekształcona, a tym samym jest zniekształcone napięcie wyjściowe przetwornika. Jako miarę zniekształcenia przebiegu na wyjściu przetwornika siły w stosunku do przebiegu siły mierzonej autor postuluje przyjęcie unormowanego błędu dynamicznego określonego wzorem:

$$\delta^o_d(x,t) = \frac{u^*(x,t) - F^*(x,t - t_o)}{F^*(x,t - t_o)}, \tag{3.27}$$

gdzie t_o jest czasem opóźnienia przetwornika. Błąd ten zależy od zasady działania przetwornika pośredniczącego (rys. 3.2...3.5), od sposobu umocowania brzegów elementu sprężystego (rys. 3.2), od współrzędnej x, w której zlokalizowano przetwornik pośredniczący (rys. 3.3) oraz od pulsacji mierzonej siły (rys. 3.4 i 3.5).

3.2.3. Element sprężysty o początku swobodnym a końcu dopasowanym falowo

Rozwiązując równanie (2.21) przy założeniach odpowiednich dla elementu sprężystego o początku swobodnym i końcu dopasowanym falowo (rys. 7.7), tj. dla warunków brzegowych

$$\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{F(0,t)}{ES} \quad \text{i} \quad Z_{m2} = Z_m,\ K_2 = 0 \tag{3.28}$$

otrzymano [52, 53] wzory na napięcie elektryczne wyjściowe przetworników o zasadach działania omówionych w p. 3.1. Otrzymano dla przetwornika pojemnościowego zależność:

$$u_w(x,t) = -\frac{ck_2F_m}{ES}\,\mathbf{1}(t - \tfrac{x}{c})\left[\cos\omega(t - \tfrac{x}{c}) - 1\right], \tag{3.29}$$

dla przetwornika tensometrycznego:

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{k_1F_m}{ES}\,\mathbf{1}(t - \tfrac{x}{c})\sin\omega(t - \tfrac{x}{c}), \tag{3.30}$$

dla przetwornika indukcyjnego:

$$u_v(x,t) = -\frac{ck_3F_m}{ES}\,\mathbf{1}(t - \tfrac{x}{c})\sin\omega(t - \tfrac{x}{c}), \tag{3.31}$$

dla przetwornika piezoelektrycznego:

$$u_a(x,t) = \frac{ck_4F_m\omega}{ES}\,\mathbf{1}(t - \tfrac{x}{c})\cos\omega(t - \tfrac{x}{c}). \tag{3.32}$$

Po uwzględnieniu równań (3.15) i (3.29) ... (3.32) czasowe przebiegi unormowanego napięcia na wyjściu przetworników siły, których przetworniki pośredniczące zlokalizowano w otoczeniu miejsca o współrzędnych $x = 0$, $x = 0{,}5\ l$ i $x = l$ na sprężystym elemencie o początku swobodnym a końcu mechanicznie dopasowanym falowo, są następujące:

(I) <u>dla $x = 0$</u>

$$\left.\begin{aligned} u^*_w(0,t) &= \mathbf{1}(t)(\cos\omega t - 1) \\ u^*_\varepsilon(0,t) &= \mathbf{1}(t)\sin\omega t \\ u^*_v(0,t) &= -\mathbf{1}(t)\sin\omega t \\ u^*_a(0,t) &= -\mathbf{1}(t)\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

(II) <u>dla $x = 0{,}5\ l$</u>

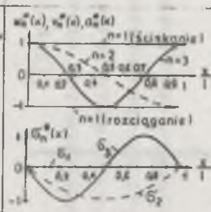
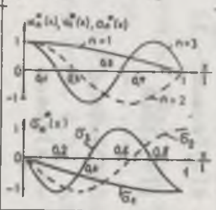
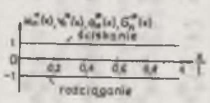
$$\left.\begin{aligned} u^*_w(0{,}5\ l;t) &= \mathbf{1}(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c})\left[\cos\omega(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}) - 1\right] \\ u^*_\varepsilon(0{,}5\ l;t) &= \mathbf{1}(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c})\sin\omega(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}) \\ u^*_v(0{,}5\ l;t) &= -\mathbf{1}(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c})\sin\omega(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}), \\ u^*_a(0{,}5\ l;t) &= -\mathbf{1}(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c})\cos\omega(t - \tfrac{0{,}5\ l}{c}). \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

(III) <u>dla $x = l$</u>

$$\left.\begin{aligned} u^*_w(l,t) &= \mathbf{1}(t - \tfrac{l}{c})\left[\cos\omega(t - \tfrac{l}{c}) - 1\right], \\ u^*_\varepsilon(l,t) &= \mathbf{1}(t - \tfrac{l}{c})\sin\omega(t - \tfrac{l}{c}), \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

Tablica 3.1

Charakterystyczne właściwości przetworników siły zmiennej

Przetwornik siły z elementem sprężystym o brzegach	Szkic elementu. Impedancje mechaniczne na brzegu. Współczynnik odbicia	Pulsacja drgań elementu sprężystego	Unormowane funkcje własne - przemieszczenia - prędkości - przyśpieszenia - naprężenia	Unormowany przebieg funkcji własnych	Chwilowe wartości unormowanego napięcia wyjściowego przetworników siły dla $F^*(0,t) = \sin\omega t$: Pojemnościowego $u_w(x,t) = k_1 \cdot w(x,t)$	Tensometrycznego $u_\xi(x,t) = k_2 \cdot \xi(x,t)$	Indukcyjnego $u_v(x,t) = k_3 \cdot v(x,t)$	Piezoelektrycznego $u_a(x,t) = k_4 \cdot a(x,t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
swobodnych	x=0, x=l; $Z_{m1}=0$, $Z_{m2}=0$; $K_1=-1$, $K_2=-1$	$\nu_{0n} = (n-1)\cdot\frac{\pi c}{l}$; $n=1,2,3,\ldots$	$w_n^*(x)=v_n^*(x)=a_n^*(x)=\cos(n-1)\frac{\pi x}{l}$; $\sigma_n^*(x) = -\sin(n-1)\frac{\pi x}{l}$		$u_w^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot[1-\cos\omega(t-\frac{2nl+x}{c})] + \sum_{n=1}^{\infty} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot[1-\cos\omega(t-\frac{2nl-x}{c})]$	$u_\xi^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl+x}{c}) - \sum_{n=1}^{\infty} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl-x}{c})$	$u_v^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl+x}{c}) + \sum_{n=1}^{\infty} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl-x}{c})$	$u_a^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot\cos\omega(t-\frac{2nl+x}{c}) + \sum_{n=1}^{\infty} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot\cos\omega(t-\frac{2nl-x}{c})$
o początku swobodnym a końcu zamocowanym sztywno	x=0, x=l; $Z_{m1}=0$, $Z_{m2}=\infty$; $K_1=-1$, $K_2=1$	$\nu_{0n} = (2n-1)\cdot\frac{\pi c}{2l}$; $n=1,2,3,\ldots$	$w_n^*(x)=v_n^*(x)=a_n^*(x)=\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}$; $\sigma_n^*(x) = -\sin(2n-1)\frac{\pi x}{2l}$		$u_w^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot[1-\cos\omega(t-\frac{2nl+x}{c})] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot[1-\cos\omega(t-\frac{2nl-x}{c})]$	$u_\xi^*(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl-x}{c}) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl+x}{c})$	$u_v^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl+x}{c}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{2nl-x}{c})$	$u_a^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 1(t-\frac{2nl+x}{c})\cdot\cos\omega(t-\frac{2nl+x}{c}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1(t-\frac{2nl-x}{c})\cdot\cos\omega(t-\frac{2nl-x}{c})$
o początku swobodnym a końcu dopasowanym falowo	x=0, x=l; $Z_{m1}=0$, $Z_{m2}=Z_{mf}$; $K_1=-1$, $K_2=0$	$\nu_{0n}=0$	$w_n^*(x)=v_n^*(x)=a_n^*(x)=\sigma_n^*(x)=\pm 1$		$u_w^*(x,t) = 1(t-\frac{x}{c})\cdot[\cos\omega(t-\frac{x}{c})-1]$	$u_\xi^*(x,t) = 1(t-\frac{x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{x}{c})$	$u_v^*(x,t) = -1(t-\frac{x}{c})\cdot\sin\omega(t-\frac{x}{c})$	$u_a^*(x,t) = -1(t-\frac{x}{c})\cdot\cos\omega(t-\frac{x}{c})$

$$\left.\begin{aligned} u_v^*(l,t) &= -1(t-\frac{l}{c})\sin\omega(t-\frac{l}{c}), \\ u_a^*(l,t) &= -1(t-\frac{l}{c})\cos\omega(t-\frac{l}{c}). \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

Przebiegi unormowanej siły $F^*(0,t)$ o pulsacji $\omega = \pi c/l$, działającej na początek przetwornika, przedstawia rys. 3.2.IIIa. Przebiegi unormowanego napięcia elektrycznego na wyjściu przetworników siły dla rozpatrywanych przypadków przedstawiają rys. 3.2.IIIb,c,d,e.

Ze wzorów (3.29) ... (3.32) oraz z rys. 3.2.III wynika, że przebieg napięcia elektrycznego na wyjściu przetwornika siły, posiadającego element sprężysty o początku swobodnym a końcu dopasowanym falowo, nie jest obarczony błędem dynamicznym w sensie wzoru (3.27). Wynik taki nie zależy od zasady działania, od pulsacji mierzonej siły ani od współrzędnej x umieszczenia wejścia przetwornika pośredniczącego. Sygnał wyjściowy jest opóźniony względem sygnału siły o czas $t_0 = x/c$, potrzebny na przejście fali od miejsca działania siły do miejsca o współrzędnej x, w którym umieszczono wejście przetwornika pośredniczącego. Przetwornik siły jest w takim wypadku niezniekształcający[7].

Charakterystyczne właściwości wybranych przetworników siły zmiennej zestawiono w tablicy 3.1.

Ogólnie można stwierdzić, że jedynie zbudowanie układu o elementach mechanicznych dopasowanych falowo jest koniecznym warunkiem niezniekształcającego przetwarzania mierzonej siły szybkozmiennej na sygnał elektryczny.

---

[7] Przetwornikiem niezniekształcającym [19, 20, 37] nazywa się przetwornik, którego moduł transmitancji $G(\omega)$ ma stałą wartość niezależnie od pulsacji, natomiast przesunięcie fazowe $\varphi(\omega)$ jest proporcjonalne do pulsacji, co oznacza jednakowe opóźnienie wszystkich harmonicznych sygnału wejściowego o czas t_0.

4. BŁĘDY WZORCOWANIA PRZETWORNIKÓW SIŁY ZMIENNEJ W CZASIE

4.1. Źródła błędów wzorcowych generatorów siły zmiennej, budowanych na różnych zasadach fizycznych

4.1.1. Generator wzorcowej siły harmonicznej

Do wzorcowania przetworników siły zmiennej przebiegiem harmonicznym potrzebne jest urządzenie do wytwarzania siły sinusoidalnie zmiennej o znanej z odpowiednią dokładnością amplitudzie i o pulsacji ω nastawialnej w zakresie $\omega_d \leq \omega \leq \omega_g$.

Dla małych częstotliwości, tzn. do kilkudziesięciu Hz, siłę harmoniczną wytwarza się generatorami o mechanicznym wymuszeniu [59]. Liniowe przemieszczenie wodzika 2, spowodowane mimośrodem 1 (rys. 4.1a, b) przekazywane jest na sprężynę 3 lub na układ hydrauliczny 5, 6. Amplituda F_m siły dla układu przedstawionego na rys. 4.1a zależy od maksymalnego liniowego przemieszczenia Δx oraz od sztywności k_s sprężyny 3 i wynosi:

$$F_m = k_s r,$$

gdzie:

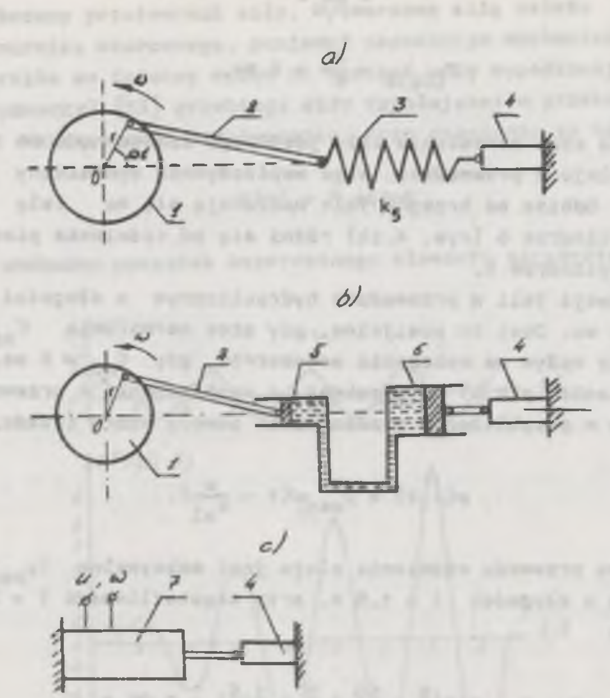
$r = \Delta x_{max}$ jest promieniem mimośrodu 1.

Wartość amplitudy siły można zmieniać przez odpowiednie nastawienie promienia r mimośrodu 1 lub przez dobranie odpowiedniej sztywności k_s sprężyny 3. Dla przypadku przedstawionego na rys. 4.1b wartość F_m amplitudy siły zależy od promienia r mimośrodu oraz od stosunku poprzecznych przekrojów cylindrów 5 i 6. Pulsację siły harmonicznej działającej na wzorcowany przetwornik 4, w obu przypadkach zmienia się przez zmianę prędkości kątowej ω wirującej tarczy 1.

Na zasadzie przedstawionej na rys. 4.1b działają współcześnie produkowane generatory o katalogowej niedokładności 0,5.

Na przykład w pracy [38] wykazano (bez analizy przyczyn), że siła statyczna i quasi-statyczna wytwarzana przez generator typu ZD (produkcji NRD) jest znana z błędem nie większym niż ± 0,5%. Natomiast już przy częstotliwości np. 30 Hz różnica między siłą rzeczywiście działającą na badany przetwornik a wartością wskazywaną przez mierniki (manometry) generatora wynosi kilkanaście procent, a przy małej sztywności wzorcowanego przetwornika wynosi nawet kilkadziesiąt procent.

Na podstawie rozważań zawartych w rozdz. 2 i 3 występowanie powyższych błędów można wyjaśnić następująco. Podczas generowania siły quasi-sta-



Rys. 4.1. Model generatora siły harmonicznej

a) ze sprężyną 3, b) z układem hydraulicznym 5, 6, c) z wymuszeniem elektrodynamicznym lub piezoelektrycznym 7

tycznej, o częstotliwości np. $f_1 < 2$ Hz, czas narastania siły wynosi $\tau_{n1} > 125$ ms. Okres podstawowych $(n = 1)$ drgań własnych wzdłużnych oleju w przewodzie o długości $l = 1,5$ m, zgodnie ze wzorami (7.16) (c(oleju) ≈ 1000 m/s), wynosi:

$$T_{(01)1} = \frac{2l}{c} = \frac{2 \cdot 1,5}{1000} = 3 \text{ ms}.$$

Ponieważ czas τ_{n1} narastania ciśnienia jest ok. 40 razy większy niż okres $T_{(01)1}$, więc ciśnienie jest praktycznie jednakowe na całej długości przewodu hydraulicznego. Współczynnik dynamiczny, zgodnie ze wzorem (2.26), jest prawie równy jedną ($k_d \approx 1$). Zjawiska falowe nie mają wówczas znaczenia.

Gdy częstotliwość wynosi np. $f_2 = 30$ Hz, to czas narastania siły $\tau_{n2} \approx$ 8 ms. Przy małej sztywności badanego przetwornika siły drugi brzeg przewodu hydraulicznego jest w przybliżeniu brzegiem swobodnym. Zgodnie ze wzorem (7.10) okres podstawowych drgań własnych wynosi:

$$T_{(01)2} = \frac{4l}{c} = 6\ \text{ms}.$$

W tym przypadku czas narastania siły jest tego samego rzędu co okres drgań podstawowych oleju w przewodzie, więc współczynnik dynamiczny jest większy niż jeden. Odbite od brzegów fale nakładają się na falę pierwotną. Ciśnienie w cylindrze 6 (rys. 4.1b) różni się od ciśnienia pierwotnie wytworzonego w cylindrze 5.

Czas propagacji fali w przewodzie hydraulicznym o długości $l = 1{,}5$ m wynosi ok. 1,5 ms. Jest to pomijalne, gdy czas narastania $\tau_{n1} > 125$ ms, ale ma znaczący wpływ na wskazania manometrów, gdy $\tau_{n2} \approx 8$ ms. Czasowy przebieg ciśnienia $p(x,t)$ w przekroju o współrzędnej x przewodu hydraulicznego można w przybliżeniu oszacować za pomocą wzoru (rozdz. 3):

$$p(x,t) = p_{max}\omega\left(t - \frac{x}{c_{ol}}\right).$$

Gdy na początku przewodu ciśnienie oleju jest maksymalne (p_{max}), to na końcu przewodu o długości $l = 1{,}5$ m, przy częstotliwości $f = 30$ Hz, ciśnienie wynosi:

$$p = p_{max}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{60 \cdot \pi \cdot 1{,}5}{1000}\right) = 0{,}96\ p_{max}.$$

Zawory manometrów są sterowane za pomocą drążków stalowych. Prędkość przenoszenia się fal w elementach stalowych jest ok. 5 razy większa niż w oleju. Jest to kolejna przyczyna błędów dynamicznych omawianego generatora hydraulicznego.

Do wytworzenia wzorcowej siły harmonicznej o częstotliwości od kilkudziesięciu Hz do kilkunastu kHz stosuje się generatory elektrodynamiczne lub elektrohydrauliczne [6, 13]. Amplituda F_m siły zależy od amplitudy natężenia prądu przemiennego zasilającego wzbudnik 7 (rys. 4.1c), a pulsacja ω siły jest równa pulsacji tego prądu. Zaletą tych generatorów siły jest mały wpływ impedancji mechanicznej wzorcowanego przetwornika siły na rzeczywistą wartość działającej na przetwornik siły. Wartość siły wyznacza się analitycznie lub mierzy się za pomocą przetwornika instalowanego w generatorze. Na tej zasadzie działają generatory siły, np. firmy Zwick [13]. Niedokładność wyznaczenia siły wzorcowej nie przekracza granicy dopuszczalnej, chociaż częstotliwość siły wytwarzanej przez tego typu generator jest dużo większa niż w generatorze typu ZD.

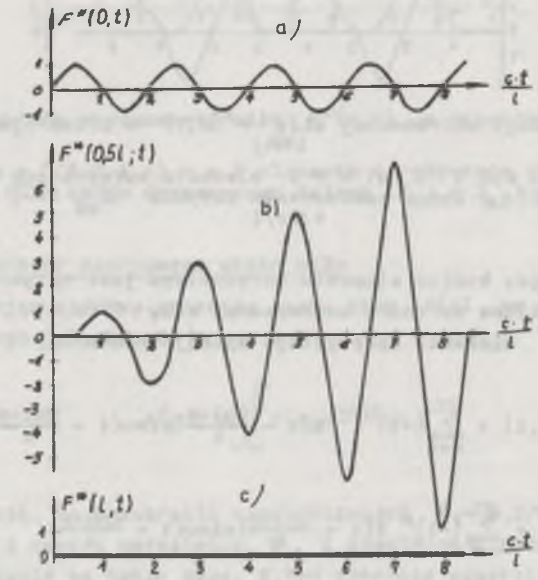
Do generowania wzorcowej siły harmonicznej o częstotliwości rzędu dziesiątek i setek kHz wykorzystuje się zjawisko piezoelektryczne. W miejsce wzbudnika elektrodynamicznego 7 (rys. 4.1c) wstawia się stos płytek piezoelektrycznych. Pod wpływem zewnętrznego harmonicznego pola elektrycznego płytki ulegają odkształcaniu, generując wzorcową harmoniczną siłę dzia-

łającą na badany przetwornik siły. Wytworzoną siłę należy mierzyć za pomocą przetwornika wzorcowego, ponieważ impedencja mechaniczna wzorcowanego przetwornika ma istotny wpływ na wartość siły wypadkowej.

Autor wyznaczył [53] przebiegi siły działającej w przekroju o współrzędnej x wzorcowanego przetwornika, przy założeniu że harmoniczna siła

$$F(t) = F_m \sin\omega t$$

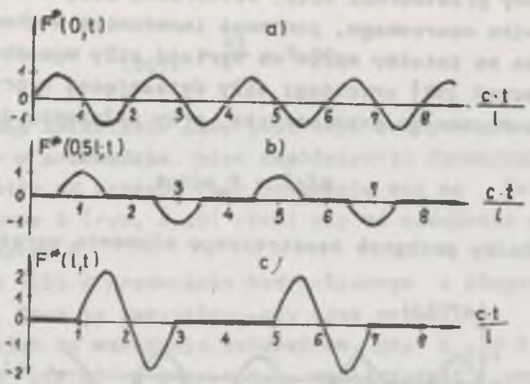
działa na swobodny początek bezstratnego elementu sprężystego.



Rys. 4.2. Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekrojach o współrzędnej a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5\ l$ i c) $x = l$ elementu sprężystego o brzegach swobodnych ($Z_{m1} = Z_{m2} = 0$) dla $\omega = \omega_1 = \pi c/l$ (przypadek rezonansu)

Dla przypadku, gdy koniec wzorcowanego przetwornika siły jest również brzegiem swobodnym (rys. 7.1), chwilowe wartości unormowanej siły $F(x,t)$, działającej w przekroju o współrzędnej x, określa wzór:

$$F^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right). \qquad (4.1)$$



Rys. 4.3. Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekrojach o współrzędnej a) x = 0, b) x = 0,5 l i c) x = l elementu sprężystego o początku swobodnym ($Z_{m1} = 0$) i końcu zamocowanym sztywno ($Z_{m2} = \infty$) dla $\omega = 2\nu_1 = \pi c/l$

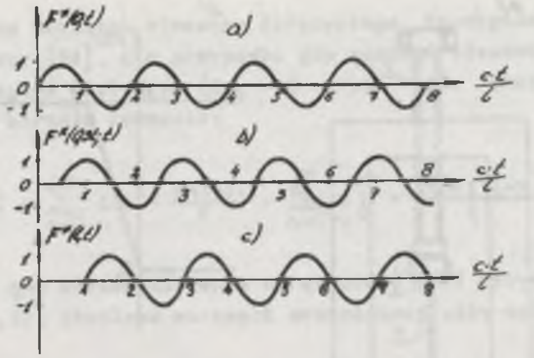
W przypadku gdy koniec elementu sprężystego jest sztywno zamocowany (rysunek 7.3), chwilowe wartości unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekroju o współrzędnej x elementu sprężystego opisuje równanie:

$$F^*(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, 1\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl-x}{c}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\, 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right). \quad (4.2)$$

Jeżeli koniec elementu sprężystego jest dopasowany falowo (rys. 7.7), to chwilowe wartości unormowanej siły $F^*(x,t)$, działającej w przekroju o współrzędnej x, opisuje równanie:

$$F^*(x,t) = 1\left(t - \frac{x}{c}\right)\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (4.3)$$

Ze wzorów (4.1), (4.2) i (4.3) oraz z rys. 4.2, 4.3 i 4.4 wynika, że jedynie w elemencie sprężystym o brzegu mechanicznie dopasowanym falowo, niezależnie od wartości pulsacji ω, czasowy przebieg siły w przekroju o dowolnej współrzędnej x elementu sprężystego jest przebiegiem harmonicznym, podobnie jak siła wymuszająca działająca na początek elementu sprężystego. Przebieg siły jest jedynie opóźniony o czas $t_0 = x/c$, potrzebny na przejście fali naprężenia mechanicznego od miejsca przyłożenia siły (x = 0) do miejsca o współrzędnej x.



Rys. 4.4. Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekrojach o współrzędnej a) x = 0, b) x = 0,5 l i c) x = l elementu sprężystego o początku swobodnym ($Z_{m1} = 0$) i końcu dopasowanym falowo ($Z_{m2} = Z_{mf}$) dla $\omega = \pi c/l$

4.1.2. Generator wzorcowego skoku siły

Przedstawiając czasowy przebieg skoku siły $F(t)$ za pomocą widma częstotliwościowego [19, 37, 65]

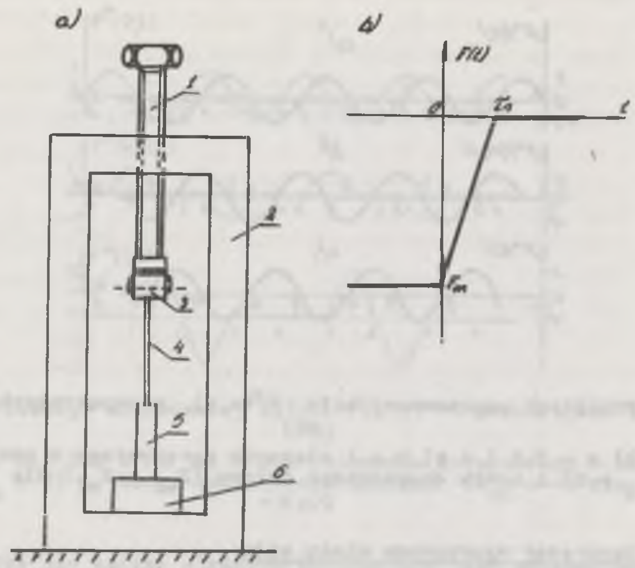
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}dt,$$

można stwierdzić, że w zakresie częstotliwości $f < 0,1/\tau_n$ widma skoku rzeczywistego o czasie narastania τ_n i idealnego o zerowym czasie narastania praktycznie są takie same. W tym zakresie częstotliwości różnice rzędnych wykresów widma amplitudowego nie przekraczają 2%, a różnice faz widma fazowego nie przekraczają 20°. Z tego wynika, że błąd dynamiczny wzorcowania przetworników może być nie większy niż odpowiednio 2% i 20°, jeżeli czas narastania wzorcowego skoku siły spełnia warunek:

$$\tau_n \le 0,1/f_g, \quad (4.4)$$

gdzie f_g jest górną częstotliwością graniczną wzorcowanego przetwornika siły.

Model generatora wzorcowego skoku siły o prostej konstrukcji, opracowany i stosowany przez autora, przedstawia rys. 4.5a. Amplitudę F_m skoku siły nastawia się za pomocą śruby drobnozwojowej 1 wykręcanej ze sztywnej ramy 2. Śruba 1 zakończona jest uchwytem 3 umożliwiającym mocowanie stalowej struny 4. Uchwyt struny 3 umożliwia obracanie śruby 1 bez skręcania struny 4. Struna 4 przenosi siłę rozciągającą na badany przetwornik 5 mo-



Rys. 4.5
a) model generatora skoku siły, b) teoretyczny przebieg skoku siły

cowany w podstawie 6. Podstawa 6 umożliwia zmianę mechanicznej impedencji (p. 5.3.2) mocowania brzegu przetwornika siły 5 i jest przymocowana do ramy 2 generatora wzorcowego skoku siły. Masa podstawy 6 łącznie z masą dolnej części ramy 2 powinna być co najmniej o dwa rzędy większa niż masa sprężystego elementu wzorcowanego przetwornika siły.

Czas τ_n narastania skoku siły o teoretycznym przebiegu pokazanym na rys. 4.5b zależy od rodzaju materiału struny, jej przekroju poprzecznego oraz od sposobu przecinania struny. Czas ten wynosi od kilku do kilkudziesięciu mikrosekund. Zgodnie ze wzorem (4.4), generatorem tym można wzorcować dynamicznie przetworniki siły o górnej częstotliwości granicznej od kilku do kilkudziesięciu kiloherców.

Dla tak małego czasu τ_n narastania wzorcowego skoku siły współczynnik dynamiczny (zgodnie ze wzorem (2.26)) jest znacznie większy od jedności i zależy od wartości współczynnika K_2 odbicia fal od powierzchni granicznych.

Celem przeanalizowania czasowych przebiegów siły działającej w poszczególnych przekrojach o współrzędnej x sprężystego elementu wzorcowanego przetwornika siły rozwiązano równanie (2.21) przy założeniu, że siła $F(t)$ o amplitudzie F_m o postaci idealnego skoku

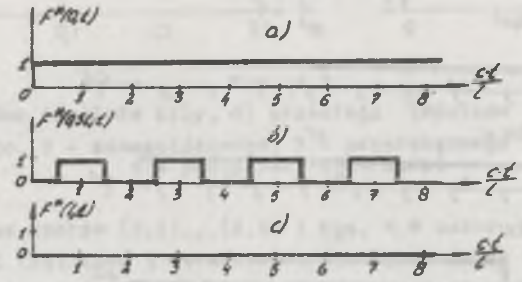
$$F(t) = 1(t)F_m \tag{4.5}$$

działa na swobodny początek elementu sprężystego. Szczegółowe rozwiązanie podane jest w pracy [52]. Dla przypadku gdy koniec elementu sprężystego jest również brzegiem swobodnym (Z_{m2} = 0 - rys. 7.1), chwilowe wartości unormowanej siły określa równanie:

$$F^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} 1\left[t - \frac{2(n+1)l-x}{c}\right]. \tag{4.7}$$

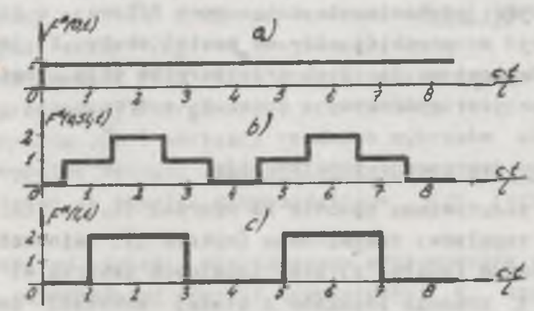
Dla przypadku gdy koniec elementu sprężystego jest sztywno zamocowany ($Z_{m2} = \infty$, rys. 7.3), chwilowe wartości unormowanej siły opisuje równanie:

$$F^*(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 1\left[t - \frac{2(n+1)-x}{c}\right] + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 1\left(t - \frac{2nl+x}{c}\right). \tag{4.8}$$



Rys. 4.6. Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekrojach o współrzędnej a) $x = 0$, b) $x = 0,5\ l$ i c) $x = l$ elementu sprężystego dla $Z_{m1} = Z_{m2} = 0$

Przebiegi unormowanej siły, działającej zgodnie ze wzorami (4.7) i (4.8) w wybranych przekrojach o współrzędnej x, przedstawiają rys. 4.6 i 4.7.



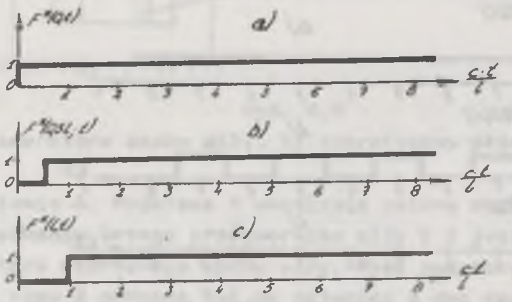
Rys. 4.7. Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekrojach o współrzędnej a) $x = 0$, b) $x = 0,5\ l$ i c) $x = l$ elementu sprężystego dla $Z_{m1} = 0$ i $Z_{m2} = \infty$

Ze wzorów (4.7) i (4.8) oraz z rys. 4.6 i 4.7 wynika, że jedynie w przekroju o współrzędnej x = 0 przebieg unormowanej siły ma postać skoku jednostkowego i jest zgodny z przebiegiem siły wymuszającej, działającej na początek elementu sprężystego, opisanej wzorem (4.5). W przekrojach o współrzędnej x = 0 widoczny jest wpływ nakładania się na falę pierwotną fal odbitych od brzegów elementu sprężystego.

Dla przypadku gdy koniec elementu sprężystego jest brzegiem dopasowanym falowo ($Z_{m2} = Z_{mf}$, rys. 7.7), chwilowe wartości unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekroju o współrzędnej x opisuje wzór:

$$F^*(x,t) = 1\left(t - \frac{x}{c}\right). \qquad (4.9)$$

Na rys. 4.8 przedstawiono zgodnie ze wzorem (4.9) przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$.



Rys. 4.8. Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ w przekrojach o współrzędnej a) x = 0, b) x = 0,5 l i c) x = l elementu sprężystego dopasowanego falowo ($Z_{m1} = 0$, $Z_{m2} = Z_{mf}$)

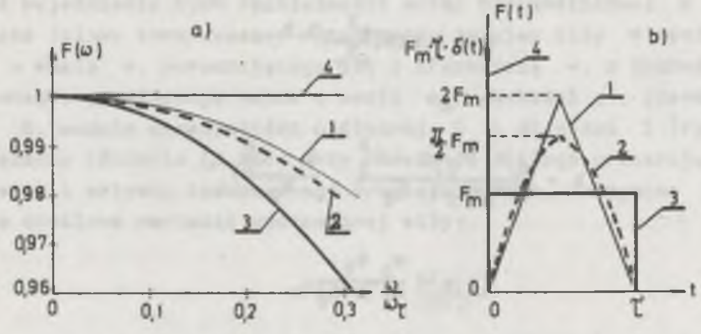
Ze wzoru (4.9) oraz z rys. 4.8 wynika, że w przypadku gdy koniec elementu sprężystego jest mechanicznie dopasowany falowo, w przekroju o dowolnej współrzędnej x przebieg siły ma postać skoku i jest równy sile wymuszającej działającej na początek przetwornika siły, opisanej wzorem (4.5). Przebieg ten jest opóźniony o czas $t_0 = x/c$.

4.1.3. Generator wzorcowego impulsu siły

Na rys. 4.9a przedstawiono zgodnie ze wzorami (2.1)...(2.5) unormowane widmo amplitudowe impulsów: trójkątnego (wykres 1), sinusoidalnego (wykres 2), prostokątnego (wykres 3) oraz idealnego (wykres 4) przy założeniu stałego czasu τ trwania impulsów i stałej wartości powierzchni S_F impulsów siły:

$$S_F = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt = F_m \cdot \tau \qquad (4.10)$$

Przebiegi tak zdefiniowanych impulsów siły przedstawia rys. 4.9b.



Rys. 4.9

a) wykresy widma impulsów siły, b) przebiegi impulsów siły odpowiednio: 1 - trójkątnego, 2 - sinusoidalnego, 3 - prostokątnego i 4 - idealnego; dla przypadku S_F = const

Na podstawie wzorów (2.1)...(2.5) i rys. 4.9 można wyznaczyć taką amplitudę F_m i taki czas τ trwania wzorcowego impulsu siły, który w zakresie częstotliwości granicznej wzorcowanego przetwornika zapewni stałość widma amplitudowego wzorcowego impulsu siły z niedokładnością $\overset{\circ}{\Delta}_\omega$. Na przykład rzędne widma amplitudowego impulsu o dowolnym przebiegu czasowym, w zakresie

$$f_g \leq \frac{0{,}1}{\tau} \quad \text{czyli} \quad \frac{\omega_g}{\omega_\tau} \leq 0{,}2 \qquad (4.11)$$

różnią się mniej niż $\overset{\circ}{\Delta}_\omega$ = 2% od wartości stałej, jeżeli powierzchnia S_F impulsu jest stała ($S_F = F_m \tau$ = const). Oznacza to, że przy stałym czasie trwania impulsu siły (τ = const) dla otrzymania w zakresie częstotliwości granicznej wzorcowanego przetwornika siły prawie tych samych (z niedokładnością $\overset{\circ}{\Delta}_\omega$) wartości rzędnych wykresów widma poszczególnych impulsów maksymalna wartość impulsu trójkątnego musi być dwa razy większa niż prostokątnego, a impulsu sinusoidalnego $\pi/2$ razy większa niż prostokątnego.

W zależności od czułości wzorcowanego przetwornika siły należy stosować impuls o odpowiedniej energii (powierzchni S_F impulsu siły), aby wartość elektrycznego sygnału wyjściowego przetwornika była co najmniej o rząd większa niż poziom szumów toru przetwarzania wzorcowanego przetwornika.

W pracy [26] wykazano, że maksymalną wartość F_m oraz czas τ trwania impulsu siły wytworzonego podczas zderzania dwóch ciał sprężystych, o masach m_1 i m_2, można obliczyć ze wzorów:

$$F_m = k^{0,4}(1,25\ mv^2)^{0,6}, \tag{4.12}$$

$$\tau = 3,218\left(\frac{m^2}{k^2 v}\right)^{0,2}, \tag{4.13}$$

gdzie:

$$k = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{r_1\ r_2}{r_1 + r_2}}\left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\right),$$

$$m = \frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2},$$

v – względne prędkość ciał o masach m_1 i m_2,

r_1, r_2 – promienie krzywizn ciał w miejscu zderzenia,

ν_1, ν_2, E_1, E_2 – odpowiednio stałe Poissona i moduły sprężystości wzdłużnej zderzających się ciał.

W praktyce wzorcowe impulsy siły wytwarzane są np. przez swobodne spadanie z wysokości h bijaka o masie m, promieniu krzywizny r, na podstawę o płaskiej powierzchni o masie dużo większej niż masa bijaka. W tym przypadku wzory (4.12) i (4.13) po przekształceniu przyjmują postać [23]:

$$F_m = 203,9\ r^{0,2}(mh)^{0,6}, \tag{4.14}$$

$$\tau = 79,9\ r^{-0,2}\ m^{0,4}\ h^{-0,1}. \tag{4.15}$$

Podanie współczynników liczbowych z dokładnością do czterech w równaniu (4.14) i trzech w równaniu (4.15) miejsc znaczących sugeruje dużą dokładność praktycznej realizacji maksymalnej wartości F_m i czasu τ trwania wytwarzanego impulsu siły. Doświadczenia opisane w pracy [26] nie uwzględniają zjawisk falowych towarzyszących zderzeniu ciał. W pracy [23] nie uwzględniono również faktu, że obliczenia w oparciu o teorię Hertza są zgodne z wynikami pomiarów tylko w ograniczonym zakresie wielkości mechanicznych. Na przykład, zgodnie z pracą [18], przy zderzeniu kuli ze stali hartowanej z płaską płytą ze stali konstrukcyjnej miękkiej dobra zgodność wyników pomiarów z obliczeniami istnieje dla ciśnienia powierzchniowego mniejszego niż 20 kPa, względnej prędkości zderzenia mniejszej niż 1,2 m/s i przy bardzo grubej płycie. W pracy [18] podano (bez analizy przyczyn), że przy zderzeniu stalowej kuli o promieniu r = 25 mm z płytą stalową o grubości H_1 = 1 m, dla względnej prędkości v = 1 m/s, obliczo-

ny czas τ_{obl} impulsu siły jest prawie równy zmierzonemu τ_{1zm} i wynosi $\tau_{1zm} \approx \tau_{obl}$ = 185 μs. Natomiast przy grubości płyty H_2 = 0,2 m zmierzony czas impulsu różnił się ok. 20% od czasu obliczonego, a przy grubości płyty H_3 = 0,1 m różnica czasów wynosiła aż 43%. Z tego przykładu wynika, że grubość H podstawy ma istotny wpływ na czas τ trwania impulsu siły, natomiast we wzorach (4.14) i (4.15), stosowanych w pracy [23], grubość H podstawy w ogóle nie występuje.

Dla wyjaśnienia tych rozbieżności autor przeanalizował w pracy [51] zjawisko falowe towarzyszące wytworzeniu impulsu siły w wyniku uderzenia ciała o masie m, poruszającego się z prędkością v, o swobodny brzeg jednorodnego, sprężystego walca o masie m_w, gęstości ρ, przekroju poprzecznym S, module sprężystości podłużnej E i długości l (rys. 4.10). Po rozwiązaniu równania (2.21), przy założeniu stałego przekroju, zerowego tłumienie i sztywno zamocowanego drugiego brzegu, otrzymano wzory określające chwilowe wartości unormowanej siły:

$$F^*(x,t) = \frac{F(x,t)}{-cv\rho} \tag{4.16}$$

działającej w przekroju o współrzędnej x, w poszczególnych przedziałach czasu [22, 51]:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{gdy}\ \ t < \frac{x}{c}; \quad F^*(x,t) = 0 \\ &2)\ \text{gdy}\ \ \frac{x}{c} \leqslant t \leqslant \frac{2l-x}{c}; \quad F^*(x,t) = e^{-\frac{cN}{l}\left(t - \frac{x}{c}\right)} \end{aligned} \tag{4.17}$$

W tych przedziałach czasu nie zachodzi jeszcze oddziaływanie fali odbitej od drugiego (x = l) brzegu.

3) gdy $\frac{2l-x}{c} \leqslant t \leqslant \frac{2l+x}{c}$

$$F^*(x,t) = e^{-\frac{cN}{l}\left(t - \frac{2l-x}{c}\right)} + e^{-\frac{cN}{l}\left(t - \frac{x}{c}\right)} \tag{4.18}$$

4) gdy $\frac{2l+x}{c} \leqslant t \leqslant \frac{4l-x}{c}$

$$F^*(x,t) = e^{-\frac{cN}{l}\left(t - \frac{x}{c}\right)} + \left[1 - 2\,\frac{cN}{l}\left(t - \frac{2l+x}{c}\right)\right] e^{-\frac{cN}{l}\left(t - \frac{2l+x}{c}\right)} + e^{-\frac{cN}{l}\left(t - \frac{2l-x}{c}\right)} \tag{4.19}$$

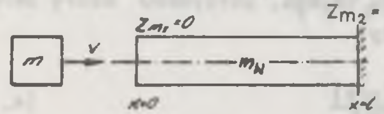
5) gdy $\frac{4l-x}{c} \leqslant t \leqslant \frac{4l+x}{c}$

$$F^*(x,t) = e^{-\frac{cN}{l}(t - \frac{x}{c})} + \left[1 - 2\frac{cN}{l}(t - \frac{2l+x}{c})\right] e^{-\frac{cN}{l}(t - \frac{2l+x}{c})} +$$

$$+ e^{-\frac{cN}{l}(t - \frac{2l-x}{c})} + \left[1 - 2\frac{cN}{l}(t - \frac{4l-x}{c})\right] e^{-\frac{cN}{l}(t - \frac{4l-x}{c})} \tag{4.20}$$

gdzie:

$N = \frac{m_w}{m} = \frac{\varrho S l}{m}$ - stosunek masy walca do masy ciała uderzającego.

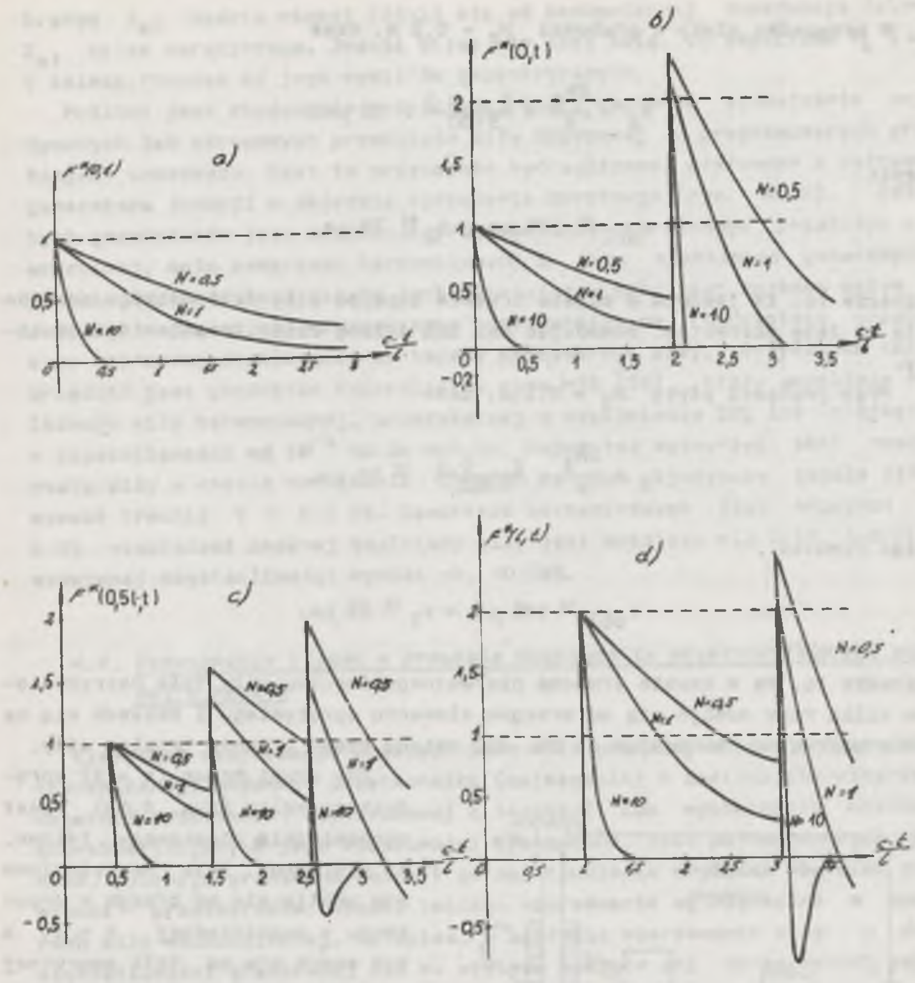


Rys. 4.10. Ciało o masie m uderza o walec o masie m_w

Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ przedstawiono zgodnie z równaniami (4.17) do (4.20) na rys. 4.11. Na rys. 4.11a przedstawiono przebiegi unormowanej siły powstałej w miejscu zderzenia (x = 0) ciał sprężystych zgodnie z pracą [26], tzn. bez uwzględnienia fal odbitych od brzegów walca. Na rys. 4.11b również przedstawiono czasowe przebiegi unormowanej siły powstałej w miejscu zderzenia ciał sprężystych, ale z uwzględnieniem nakładania się na falę pierwotną fal odbitych od brzegów elementu sprężystego. Z rys. 4.11b wynika, że rzeczywisty czasowy przebieg wygenerowanego impulsu siły powstałej w miejscu zderzenia ciał będzie zgodny z przebiegiem obliczonym bez uwzględniania zjawiska falowego tylko w czasie $t < 2\ l/c$. Natomiast w czasie $t > 2\ l/c$, w wyniku nakładania się na falę pierwotną fal odbitych od brzegów walca, pierwotny czasowy przebieg siły ulega zmianie. Należy zauważyć, że amplituda siły wypadkowej przekracza przeszło dwukrotnie amplitudę fali siły pierwotnej, obliczonej zgodnie z pracą [26]. Ponadto czasowe przebiegi siły w poszczególnych poprzecznych przekrojach o współrzędnej x różnią się między sobą. Pominięcie tego faktu budzi zastrzeżenia do dokładności wygenerowanych wzorcowych impulsów siły o parametrach obliczonych i przedstawionych np. w pracy [23].

Na podstawie wzorów (4.17)...(4.20) i rys. 4.11 można wyjaśnić, dlaczego maksymalna wartość siły F_m i czas τ trwania impulsu siły, obliczone w oparciu o teorię Hertza, w pewnych przypadkach są zgodne z wynikami pomiarów, a w innych różnica wynoszą nawet kilkadziesiąt procent. Przy grubości płyty $H_1 = 1$ m czas potrzebny na przejście czoła fali naprężeniowej od miejsca przyłożenia siły (x = 0) do drugiego brzegu (x = l), odbicia i powrotu do x = 0 wynosi:

$$t_1 = \frac{2H_1}{c} = \frac{2 \cdot 1}{5100} \cong 392\ \mu s.$$



Rys. 4.11. Przebiegi unormowanej siły $F^*(x,t)$ dla n = 0,5; 1; 10 a) w przekroju o współrzędnej x = 0 - bez uwzględnienia zjawiska falowego; z uwzględnieniem fal odbitych - odpowiednio w przekrojach o współrzędnej; b) x = 0, c) x = 0,5 l, d) x = l

Ponieważ obliczony czas τ_{obl} trwania impulsu siły

$$\tau_{obl} \cong 185\ \mu s < t_1 \cong 392\ \mu s,$$

więc impuls siły nie jest zniekształcony falami odbitymi i nie powstają błędy dynamiczne.

W przypadku płyty o grubości $H_2 = 0,2$ m, czas

$$t_2 = \frac{2H_2}{c} = \frac{2 \cdot 0,2}{5100} \cong 78\ \mu s,$$

czyli

$$\tau_{obl} \cong 185\ \mu s > t_2 \cong 78\ \mu s.$$

Oznacza to, że jeszcze w czasie trwania impulsu siły fala odbita nakłada się na falę pierwotną, powodując ok. 20% zmianę czasu trwania impulsu siły.

Przy grubości płyty $H_3 = 0,1$ m, czas

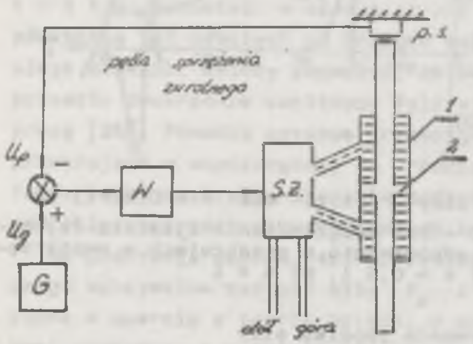
$$t_3 = \frac{2H_3}{c} = \frac{2 \cdot 0,1}{5100} \cong 39\ \mu s,$$

więc również

$$\tau_{obl} \cong 185\ \mu s > t_3 \cong 39\ \mu s.$$

Oznacza to, że w czasie trwania pierwotnego impulsu siły fala naprężeniowa kilka razy odbija się od brzegów elementu sprężystego i nakłada się na falę pierwotną, powodując aż ok. 43% zmianę czasu trwania impulsu siły.

Gdy drugi brzeg ($x = l$) sprężystego walca (rys. 4.10) jest mechanicznie dopasowany falowo, to pierwotna fala naprężeniowa nie odbija się od brzegu w przekroju o współrzędnej $x = l$, a tym samym nie ma fali powrotnej nakładającej się na falę pierwotną. Stąd wniosek, że w przekroju o współrzędnej x walca przebieg unormowanej siły będzie taki jak na rys. 4.11a (tzn. zgodny z teorią Hertza), a jedynie będzie opóźniony o czas $t_o = x/c$. Maksymalna wartość F_m oraz czas τ trwania impulsu siły będą różnić się od wartości obliczonych na podstawie wzorów (4.12) i (4.13) tym bardziej, im mechaniczna impedancja mocowania



Rys. 4.12. Model generatora siły typu MTS

1 - cylinder, 2 - tłok, G - cyfrowy generator funkcji, p.s. - kontrolny przetwornik siły w pętli sprzężenia zwrotnego, S.Z. - serwozawór, W - wzmacniacz

brzegu Z_{m2} będzie więcej różnić się od mechanicznej impedancji falowej Z_{mf} walca sprężystego. Jeżeli bijak nie jest kulą, to amplituda F_m i czas τ zależą również od jego wymiarów geometrycznych.

Możliwe jest zbudowanie generatora, który zapewnia wytwarzanie pojedynczych lub okresowych przebiegów siły wzorcowej o programowanych przebiegach czasowych. Jest to urządzenie hydrauliczne, sterowane z cyfrowego generatora funkcji w układzie sprzężenie zwrotnego (rys. 4.12). Zaletą tych generatorów jest możliwość programowania określonego przebiegu siły wzorcowej, mała zawartość harmonicznych i duża stabilność generowanych przebiegów. Dodatkową zaletę tych generatorów siły jest znikomy wpływ impedancji mechanicznej wzorcowanego przetwornika na rzeczywisty przebieg siły wzorcowej działającej na badany przetwornik siły. Przykładem takich urządzeń jest generator hydrauliczny typu MTS [39], który umożliwia realizację siły harmonicznej, prostokątnej o wypełnieniu 50% lub trójkątnej o częstotliwości od 10^{-5} Hz do 990 Hz. Można też wytworzyć skok rzeczywisty siły o czasie narastania $\tau_n \geq 50\ \mu s$ lub pojedynczy impuls siły o czasie trwanie $\tau \geq 0,1$ ms. Zawartość harmonicznych jest mniejsza niż 0,5%, niestałość zadanej amplitudy siły jest mniejsza niż 0,1%, a dryf nastawionej częstotliwości wynosi ok. +0,05%.

4.2. Powstawanie błędów w procesie wzorcowania przetworników siły zmiennej w czasie

Klasyczne wzorcowanie przetworników siły zmiennej obejmuje wyznaczanie transmitancji badanego przetwornika (najczęściej w postaci charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowej i fazowej) lub wyznaczanie wielkości charakteryzujących jego właściwości dynamiczne, jak: pulsacja drgań własnych, pulsacja graniczna dolna i górna, tłumienie względne i czas odpowiedzi[8)] przetwornika. Wyniki takiego wzorcowania są użyteczne w pomiarach siły wolnozmiennej. Natomiast w zakresie wzorcowania siły o dużej częstotliwości granicznej nie ma systemu wzorców ani opracowanych procedur wzorcowniczych.

Warunki metrologiczne wzorcowanie przetworników siły szybkozmiennej powinny również uwzględniać zjawiska falowe występujące w elementach sprężystych czujnika, żeby zapewnić założoną dokładność czynności metrologicznych.

Decyzja odnośnie do wyboru metody wzorcowania (doświadczalnej czy obliczeniowej) zależy od technicznych możliwości wygenerowania właściwego przebiegu wzorcowego z określoną dokładnością, od dostępności praktycznej

---

8) Czasem odpowiedzi skokowej przetwornika [19, 20, 38] nazywa się czas, po którym sygnał na wyjściu przetwornika różni się nie więcej od wartości ustalonej niż o określoną wartość Δ (np. 10; 5 lub 2%).

realizacji wzorcowego przetwornika i od osiągalnej dokładności danej metody.

Do teoretycznych ocen dokładności przetwarzania można współcześnie wykorzystać modelowanie analogowe lub cyfrowe.

Transmitancję przetwornika można wyznaczyć z wyników badań otrzymanych przy dowolnym wymuszeniu.

Wzorcowanie dynamiczne przetworników przeprowadza się za pomocą przebiegów wzorcowych, a więc o znanej wartości i znanym kształcie, tym samym o znanym np. widmie częstotliwości. Nie wykonuje się wówczas pomiarów porównawczych przetwornikami wzorcowymi. Gdy wzorcowanie wykonuje się, używając wymuszeń o nieznanym przebiegu i nieznanej wartości, wówczas potrzebne są pomiary porównawcze przetwornikami wzorcowymi.

Najczęściej stosuje się wymuszenie o zdeterminowanym przebiegu takim jak funkcja skokowa, impulsowa lub przebieg sinusoidalny o określonej i nastawialnej w szerokim zakresie częstotliwości. Czasami stosuje się wymuszenie o stacjonarnym przebiegu stochastycznym i o znanych właściwościach statystycznych.

Za miarę błędu dynamicznego, przy wymuszeniu wzorcowym o postaci skoku lub impulsu danej wielkości, najczęściej przyjmuje się całkę chwilowego błędu dynamicznego.

W przypadku odpowiedzi aperiodycznej dobrze nadaje się kryterium całkowe:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \delta_d^*(t)\,dt,$$

lub w ogólnym przypadku kwadratowe kryterium całkowe:

$$\Delta_2 = \int_0^{\infty} \left[\delta_d^*(t)\right]^2 dt.$$

Kwadratowe kryterium umożliwia ocenę dokładności przetworników stosowanych do pomiaru chwilowych wartości siły o dowolnym przebiegu czasowym, w stanie nieustalonym.

Przy wymuszeniu impulsowym o czasie τ trwania impulsu siły, często stosuje się kryterium o postaci:

$$\Delta_3^o = \frac{\int_0^{\infty} \left|\delta_d^*(t)\right| dt}{\int_0^{\tau} F^*(t)\,dt}.$$

Miarę błędu dynamicznego przedstawia się również za pomocą ilorazu mocy sygnału błędu dynamicznego do mocy sygnału wejściowego [33].

W dziedzinie częstotliwości błąd dynamiczny przedstawia się zazwyczaj za pomocą błędu amplitudowego oraz błędu fazowego.

Jako kryterium optymalizacji wypadkowej niedokładności dynamicznej przetwornika w dziedzinie częstotliwości stosuje się minimum łącznej sumy kwadratów, zgodnie z relacją:

$$\text{minimum} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[G_k^*(\omega) - G_{wk}^*(\omega)\right]^2 + \left[\frac{\varphi_k(\omega) - \varphi_{wk}(\omega)}{2\pi}\right]^2 \right\}. \qquad (4.21)$$

gdzie:

$G_k^*(\omega)$, $G_{wk}^*(\omega)$ - są unormowanymi rzędnymi charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych odpowiednio przetworników wzorcowanego i wzorcowego;

$\varphi_k(\omega)$, $\varphi_{wk}(\omega)$ - rzędne charakterystyk fazowo-częstotliwościowych odpowiednio przetworników wzorcowanego i wzorcowego.

Jako miarę dokładności przetwarzania sygnałów stacjonarnych oraz sygnałów nieokresowych stosowany jest błąd średniokwadratowy [67]:

$$\left(\delta_{śr}^o\right)^2 = \left|\frac{G(j\omega)}{G_w(j\omega)} - 1\right|^2 \qquad (4.22)$$

Miara ta jest najczęściej stosowana do porównania dokładności w zadanym zakresie częstotliwości przebiegów harmonicznych w stanie ustalonym.

Odpowiedź przetwornika siły, jak to wynika z rozdz. 2 i 3, ogólnie zależy od sposobu jego mocowania, dlatego właściwości dynamiczne przetwornika powinny być określane dla danych warunków metrologicznych wzorcowania.

Do wzorcowania przetworników siły quasi-statycznej o $f_g \leq 2$ Hz można stosować np. generator o zasadzie działania opisanej w p. 4.1.1. Impedencja mechaniczna wzorcowanego przetwornika ani dopasowanie falowe nie wpływają na wartość czy przebieg siły wzorcowej. Tym samym nie wpływają na rezultat wzorcowania.

Przy wzorcowaniu przetworników siły o częstotliwości granicznej rzędu kilkudziesięciu herców, w zależności od zasady działania generatora (p. 4.1), siła rzeczywiście działająca na wzorcowany przetwornik może znacząco zależeć od impedancji badanego przetwornika. Najlepszą dokładność wzorcowania zapewniają generatory typu MTS. Są one również najmniej wrażliwe na impedancję mechaniczną wzorcowanego przetwornika siły. Wadą ich jest mała częstotliwość graniczna (990 Hz).

Najkorzystniej wzorcuje się przetwornik siły za pomocą wzorcowego wymuszenia o przebiegu zbliżonym do przebiegów, które mają być przetwarzane przez ten przetwornik.

Przy braku dopasowania falowego przetwornika do generatora siły wzorcowej przebiegi sygnałów w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego mogą znacznie różnić się od przebiegu siły wymuszającej (rys. 4.2, 4.3, 4.6, 4.7, 4.11b,c,d). Jedynie w przypadku dopasowania falowego przetwornika do generatora siły w dowolnej współrzędnej x elementu sprężystego przebiegi są jednakowe i są zgodne z przebiegiem wzorcowym (rys. 4.4, 4.8 i 4.11a). Zatem, tylko wzorcowanie zrealizowane w warunkach dopasowania falowego przetwornika do generatora siły wzorcowej umożliwia odpowiednią dokładność wzorcowania.

5. ANALOGOWE MODELOWANIE ZJAWISK DYNAMICZNYCH W PRZETWORNIKACH SIŁY

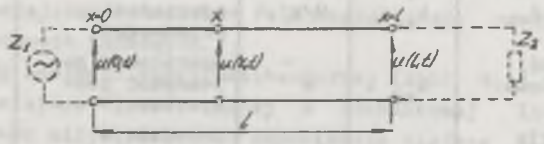
5.1. <u>Analog elektromechaniczny</u>

Celem doświadczalnego sprawdzenia wniosków wynikających z analizy teoretycznej w pracy przeprowadzono laboratoryjne badania analogowe oraz na przetworniku siły.

Eksperymenty przeprowadzone na modelu mechanicznym są żmudne i pracochłonne w porównaniu z badaniami na modelu elektrycznym. W modelu elektrycznym można łatwiej zmieniać właściwości obwodu (np. pulsację naturalną czy tłumienie względne) oraz warunki brzegowe (od zerowej, poprzez falową, aż do nieskończenie wielkiej impedancji) niż w odpowiednim modelu mechanicznym. Łatwiej jest też zrealizować praktycznie sygnał elektryczny o wymaganym czasowym przebiegu standardowym niż odpowiedni sygnał mechaniczny.

Dynamiczne właściwości zastosowanej aparatury pomiarowej oraz dopuszczalną różnicę mechanicznego dopasowania falowego brzegu sprężystego elementu przetwornika siły badano najpierw eksperymentalnie na modelu elektrycznym, a następnie na modelu mechanicznym.

Zastępując model mechaniczny odpowiednim modelem elektrycznym, należy być świadomym różnic, jakie istnieją między tymi modelami. W elektrycznej linii długiej wpływ fal poprzecznych można praktycznie pominąć, nie występują zakłócenia lokalne w miejscu przyłożenia napięcia, a prędkość propagacji fali napięciowej nie zależy od amplitudy napięcia. Natomiast w przetworniku siły wpływ fal poprzecznych jest pomijalny tylko w odpowiednio smukłym elemencie sprężystym, efekt lokalny można zaniedbać, gdy ciśnienie powierzchniowe nie przekracza wartości krytycznej, a prędkość propagacji fali naprężeniowej jest praktycznie stała tylko dla naprężenia mechanicznego w zakresie obowiązywania prawa Hooke'a.



Rys. 5.1. Schemat ideowy linii długiej o stałych rozłożonych

Przebieg napięcia $u(x,t)$ w przekroju o współrzędnej x bezstratnej linii długiej (rys. 5.1) opisany jest równaniem różniczkowym [7]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c_e^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad (5.1)$$

gdzie $c_e = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}}$ jest prędkością propagacji fali napięcia elektrycznego wzdłuż linii długiej; L_o, C_o są odpowiednio indukcyjnością jednostkową i pojemnością jednostkową linii długiej. Równanie (5.1) jest takie samo jak równanie (7.1) opisujące dynamiczne właściwości sprężystego elementu przetwornika siły. Jednak w równaniach (5.1) i (7.1) zmienne i współczynniki są zupełnie innymi wielkościami. Jeżeli liczbowe wartości współczynników są w obu równaniach odpowiednio równe, to przy tych samych warunkach początkowych i brzegowych rozwiązania obu równań mają taką samą postać. Równe są również pulsacje naturalne, funkcje własne i tłumienie względne. Linia długa jest więc elektrycznym analogiem sprężystego elementu przetwornika siły. Dynamiczne właściwości schematu zastępczego modelu mechanicznego są analogiczne z dynamicznymi właściwościami schematu zastępczego modelu elektrycznego (tabl. 5.1).

Tablica 5.1

Analogie elektromechaniczne

Lp.	Wielkości mechaniczne			Wielkości elektryczne		
	nazwa	symbol	jednostka	nazwa	symbol	jednostka
1	Siła	F	N	napięcie	U	V
2	Prędkość	v	m/s	prąd	I	A
3	Przemieszczenie	w	m	ładunek elektr.	Q	C = As
4	Tłumienie	B	kg/s	rezystancja	R	Ω
5	Masa	m	kg	indukcyjność	L	H
6	Masa jednostkowa	m_o	kg/m	indukcyjność jednostkowa	L_o	H/m
7	Podatność	p	m/N	pojemność	C	F
8	Podatność jednostkowa	p_o	N^{-1}	pojemność jednostkowa	C_o	F/m
9	Sztywność	k_s	N/m	odwrotność pojemności	1/C	F^{-1}
10	Sztywność jednostkowa	k_{eo}	N	odwrotność pojemności jednostkowej	$1/C_o$	m/F
11	Impedancja mechaniczna	Z_m	kg/s	impedancja elektryczna	Z	Ω
12	Impedancja mechaniczna falowa	Z_{mf}	kg/s	impedancja elektryczna falowa	Z_f	Ω

5.2. Badania na modelu elektrycznym

5.2.1. Elementy modelu elektrycznego

Model drabinkowej linii długiej zrealizowano na elementach pasywnych skupionych typu L i C. Linia składa się z n ogniw typu T. Dynamiczna charakterystyka drabinkowej linii długiej o stałych skupionych, w zakresie częstotliwości granicznej f_g, nie różni się więcej niż o względną wartość δ^o od dynamicznej charakterystyki jednorodnej linii długiej o stałych rozłożonych i długości l, gdy model drabinkowy ma n ogniw typu T, gdzie [9]

$$n \geq 2\pi f_g l \sqrt{\frac{L_o C_o}{8\delta^o}}. \qquad (5.2)$$

Prędkość c_e propagacji fali napięcia elektrycznego w modelu drabinkowym linii długiej, rzędu prędkości propagacji fali naprężenia mechanicznego w stalowym elemencie sprężystym (ok. 5100 m/s), zapewniają indukcyjność jednostkowa drabinkowej linii długiej L_o = 40 mH/m oraz pojemność jednostkowa drabinkowej linii długiej C_o = 1 μF/m, ponieważ

$$c_e = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}} = \frac{1}{\sqrt{40\,.\,10^{-3}\,.\,1\,.\,10^{-6}}} = 5000\ \text{m/s}.$$

Impedancja falowa takiej linii długiej wynosi:

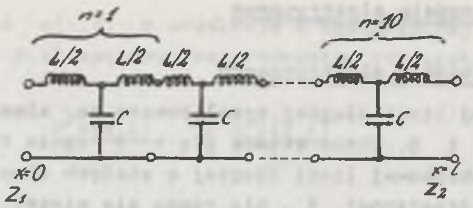
$$Z_f = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}} = \sqrt{\frac{40\,.\,10^{-3}}{1\,.\,10^{-6}}} = 200\,\Omega.$$

Wstawiając do wzoru (5.2) przyjętą częstotliwość graniczną f_g = 22 kHz oraz dopuszczalny błąd względny δ^o = 5%, otrzymano dla długości l = 0,2 m:

$$n \geq 2\pi 22\,.\,10^3\,.\,0{,}2\sqrt{\frac{40\,.\,10^{-3}\,.\,1\,.\,10^{-6}}{8\,.\,5\,.\,10^{-2}}} = 8{,}7.$$

Ostatecznie model elektryczny zrealizowano jako dziesięcioelementowy układ drabinkowy linii długiej przedstawiony na rys. 5.2. Dobroć zwiększono, a tym samym zmniejszono tłumienie fali napięciowej, nawijając cewki na rdzeniach ferrytowych kubkowych.

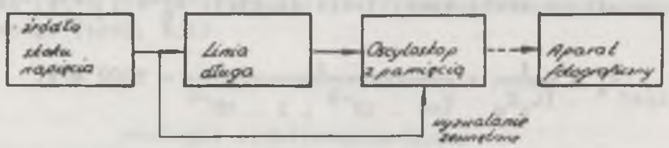
Zgodnie z zasadą analogii elektromechanicznej (tabl. 5.1) przebieg napięcia $u(x,t)$ w miejscu o współrzędnej x drabinkowej linii długiej odpowiada przebiegowi siły $F(x,t)$ w odpowiednim miejscu o współrzędnej x sprężystego elementu przetwornika siły.



Rys. 5.2. Schemat ideowy drabinkowej linii długiej

5.2.2. Pomiary na modelu elektrycznym

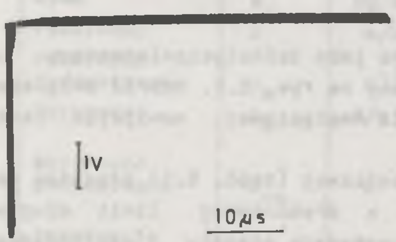
Model linii długiej (rys. 5.2) zasilano skokiem napięcia o amplitudzie U_m = 4,5 V ze źródła o impedancji Z_1 = 2Ω. Przebiegi napięcia w poszczególnych miejscach o współrzędnej x = 0; 0,5 l; l drabinkowej linii długiej rejestrowano za pomocą oscyloskopu z pamięcią, wyzwalanego w momencie podania skoku napięcia na początek linii, a następnie fotografowano (rys. 5.3).



Rys. 5.3. Schemat blokowy układu pomiarowego

Rys. 5.4 przedstawia przebieg skoku napięcia włączanego w chwili t = = 0 na początek linii długiej. Zgodnie ze wzorem (4.4) czas τ_n narastania skoku jednostkowego przy częstotliwości granicznej f_g = 22 kHz winien wynosić:

$$\tau_n \le \frac{0,1}{f_g} \approx 4,5\ \mu s.$$

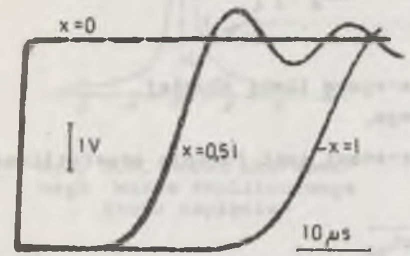


Rys. 5.4. Oscylogram skoku napięcia

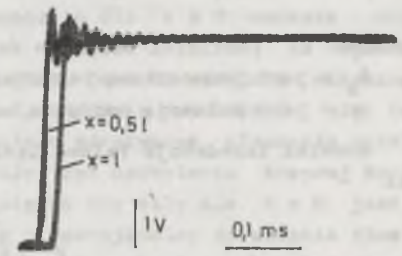
Jak wynika z rys. 5.4, warunek ten jest dobrze spełniony, ponieważ czas τ_n rzeczywistego skoku napięcia nie przekracza 1 µs.

Rys. 5.5 przedstawia oscylogramy przebiegów napięcia w czasie kilkudziesięciu µs w miejscu o współrzędnej x = 0; 0,5 l; l linii długiej, na którą w chwili t = 0 załączono skok napięcia ze źródła o impedancji Z_1 =

= 2Ω = 0,01 Z_f (brzeg swobodny). Koniec linii długiej jest dopasowany falowo, tzn. impedancja $Z_2 = Z_f$ = 200Ω.



Rys. 5.5. Oscylogramy przebiegów napięcia w przekrojach o współrzędnej x = 0; 0,5 l; l dla $Z_1 = 0{,}01\,Z_f$, $Z_2 = Z_f$



Rys. 5.6. Oscylogramy przebiegów w przekrojach o współrzędnej x = 0,5 l i x = l dla $Z_1 = 0{,}01\,Z_f$ i $Z_2 = Z_f$

Rys. 5.6 przedstawia przebiegi napięcia w miejscu o współrzędnej x = = 0,5 l i x = l, w czasie ok. 500 µs, również dla $Z_1 = 0{,}01\,Z_f$ i $Z_2 = Z_f$. Zgodnie z teorią (wzór (4.9) i rys. 4.8) przy x = 0 napięcie ma identyczny przebieg jak napięcie wymuszające. Gdy x = 0,5 l, opóźnienie wynosi:

$$t_{0,5l} = \frac{0,5\ l}{c_e} = \frac{0,5\ .\ 0,2}{5000} = 20\ \mu s,$$

a gdy x = l

$$t_l = \frac{l}{c_e} = \frac{0,2}{5000} = 40\ \mu s.$$

Przebiegi napięcia przedstawione na rys. 5.5 i 5.6 są zgodne z odpowiednimi teoretycznymi przebiegami unormowanej siły przedstawionymi na rys. 4.8. Istniejące różnice są spowodowane tym, że analitycznie obliczono właściwości bezstratnej linii długiej oraz idealnego elementu sprężystego (bez tłumienia), dla których we wzorach (5.1) i (7.1)

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \text{const} \quad \text{oraz} \quad c_e = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}} = \text{const}$$

niezależnie od pulsacji sygnału wejściowego.

W rzeczywistym elemencie sprężystym oraz w rzeczywistej drabinkowej linii długiej istnieją straty. Prędkość propagacji fali napięciowej jest funkcją częstotliwości zgodnie ze wzorem [9]:

$$c_e = \frac{1}{\sqrt{0{,}5\, L_o C_o \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{R_o}{\omega L_o}\right)^2}\right]}}, \tag{5.3}$$

gdzie:

R_o - jest jednostkową rezystancją szeregową linii długiej,

ω - jest pulsacją napięcia wejściowego.

Również impedancja falowa linii ze stratami jest funkcją częstotliwości

$$Z_f = \sqrt{\frac{R_o + j\omega L_o}{G_o + j\omega C_o}}, \tag{5.4}$$

gdzie:

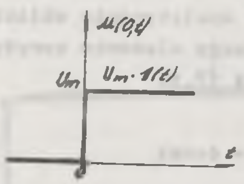
G_o - jest jednostkową konduktancję poprzeczną linii długiej.

Poszczególne ogniwa (czwórniki typu T) drabinkowej linii długiej (rys. 5.2) obliczono dla impedancji falowej linii bezstratnej

$$Z_f = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}} = 200\Omega,$$

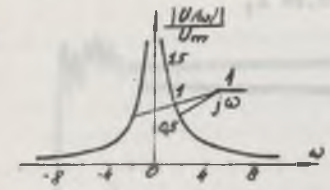
a na końcu drabinkowej linii długiej włączono rezystor o wartości $Z_2 = R_2 = 200\,\Omega$.

Drabinkowy model linii długiej jest wykonany z elementów o stałych skupionych, tzn. z cewek o indukcyjności $L = 88$ mH i rezystancji $R = 0{,}1\Omega$ oraz z kondensatorów o pojemności $C = 22$ nF i konduktancji $G = 0{,}1$ nS. Zgodnie ze wzorem (5.4) poszczególne ogniwa linii nie są dokładnie dopasowane falowo. Na podstawie rys. 5.5 i 5.6 obliczono pulsację drgań własnych $\vartheta^*_{z2} = \vartheta^*_{zf} = \frac{2\pi}{15{,}5 \cdot 10^{-6}} = 400 \cdot 10^3$ rad/s, istniejących wewnątrz poszczególnych ogniw modelu drabinkowego. Oscylacje te, spowodowane niedokładnością drabinkowego modelu linii długiej, zanikają ze stałą czasową $\tau^*_z = \frac{1}{b\vartheta^*_{zf}} \approx 60\ \mu s$ i po czasie ok. 200 μs prawie nie zniekształcają wyniku pomiaru. Gdyby modelem elektrycznym była linia długa o stałych rozłożonych na długości l, to nie byłoby oscylacji o pulsacji ϑ^*_{zf}. Oczywiście takich pulsacji nie ma również w sprężystym elemencie przetwornika siły, co należy uwzględnić przy interpretacji otrzymanych wyników.



Rys. 5.7. Przebieg napięcia wejściowego (skok idealny)

Ze wzoru (5.3) wynika, że prędkość propagacji fali napięcia elektrycznego c_e w modelu rzeczywistej linii długiej ($R_o > 0$, $G_o > 0$) rośnie ze wzrostem pulsacji. Moduł unormowanego widma amplitudowego skoku napięcia wejściowego przedstawia rys. 5.8. Harmoniczne o dużej



Rys. 5.8. Moduł unormowanego widma amplitudowego skoku napięcia

pulsacji wcześniej dochodzą do miejsca o współrzędnej $x = 0{,}5$ l czy $x = l$ niż harmoniczne o małej pulsacji i dlatego przebieg napięcia dla $x \neq 0$ narasta wolniej niż skok napięcia załączony na wejście linii długiej. Jest to wyraźnie widoczne na rys. 5.5. Podobnie rozchodzić się będzie skok siły w sprężystym elemencie przetwornika siły. Kąt nachylenia krzywej narastania napięcia czy siły dla $x \neq 0$ jest odwrotnie proporcjonalny do stopnia tłumienia drgań elektrycznych linii długiej lub drgań mechanicznych elementu sprężystego. Jeżeli jednak naprężenie mechaniczne wzrośnie ponad granicę proporcjonalności, to moduł sprężystości wzdłużnej E_1 w zakresie plastyczności materiału jest mniejszy, a zatem i prędkość propagacji fali naprężenia mechanicznego c_1 jest mniejsza niż w zakresie proporcjonalności (rys. 2.18).

Gdyby modelem elektrycznym była bezstratna linia długa ($R_o = 0$ i $G_o = 0$) o stałych rozłożonych na długości l i byłaby dopasowana falowo ($Z_2 = Z_f$), to oscylogram przebiegu napięcia (rys. 5.5) byłby identyczny jak teoretyczny wykres podany na rys. 4.8.

Dla zobrazowania wpływu falowego niedopasowania końca ($x = l$) linii długiej na przebieg napięcia $u(x,t)$ w miejscu o współrzędnej x linii na rys. 5.9 i 5.10 przedstawiono odpowiednie oscylogramy.

Współczynniki odbicia K fali napięcia od brzegów linii długiej obliczono ze wzorów [9]:

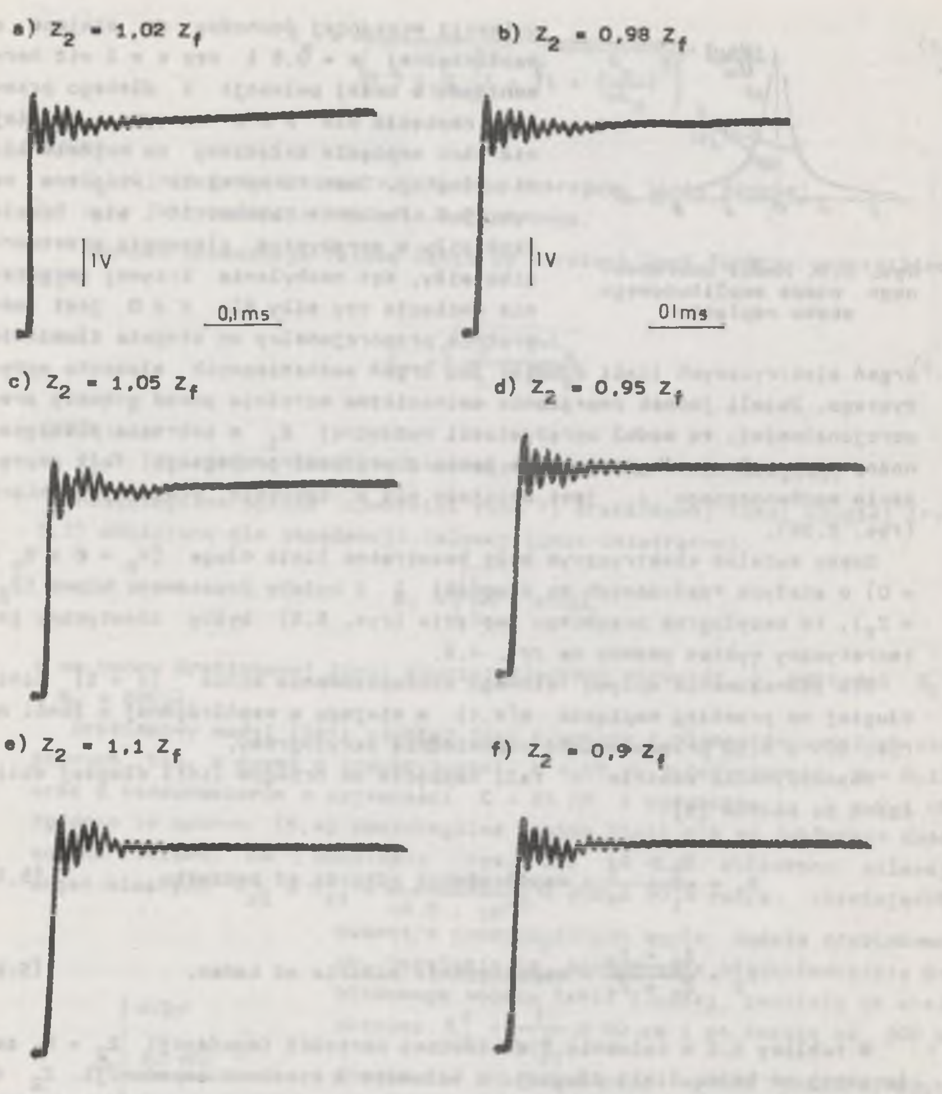
$$K_1 = \frac{Z_1 - Z_f}{Z_1 + Z_f} \text{ - współczynnik odbicia od początku,} \tag{5.5}$$

$$K_2 = \frac{Z_2 - Z_f}{Z_2 + Z_f} \text{ - współczynnik odbicia od końca.} \tag{5.6}$$

W tablicy 5.2 w kolumnie 2 zestawiono wartości impedancji $Z_2 = R_2$ załączonej na końcu linii długiej, w kolumnie 3 stosunek impedancji Z_2 do impedancji falowej Z_f tej linii, w kolumnie 4 podano względną różnicę impedancji Z_2 w porównaniu z impedancją Z_f, obliczoną zgodnie ze wzorem (2.28)

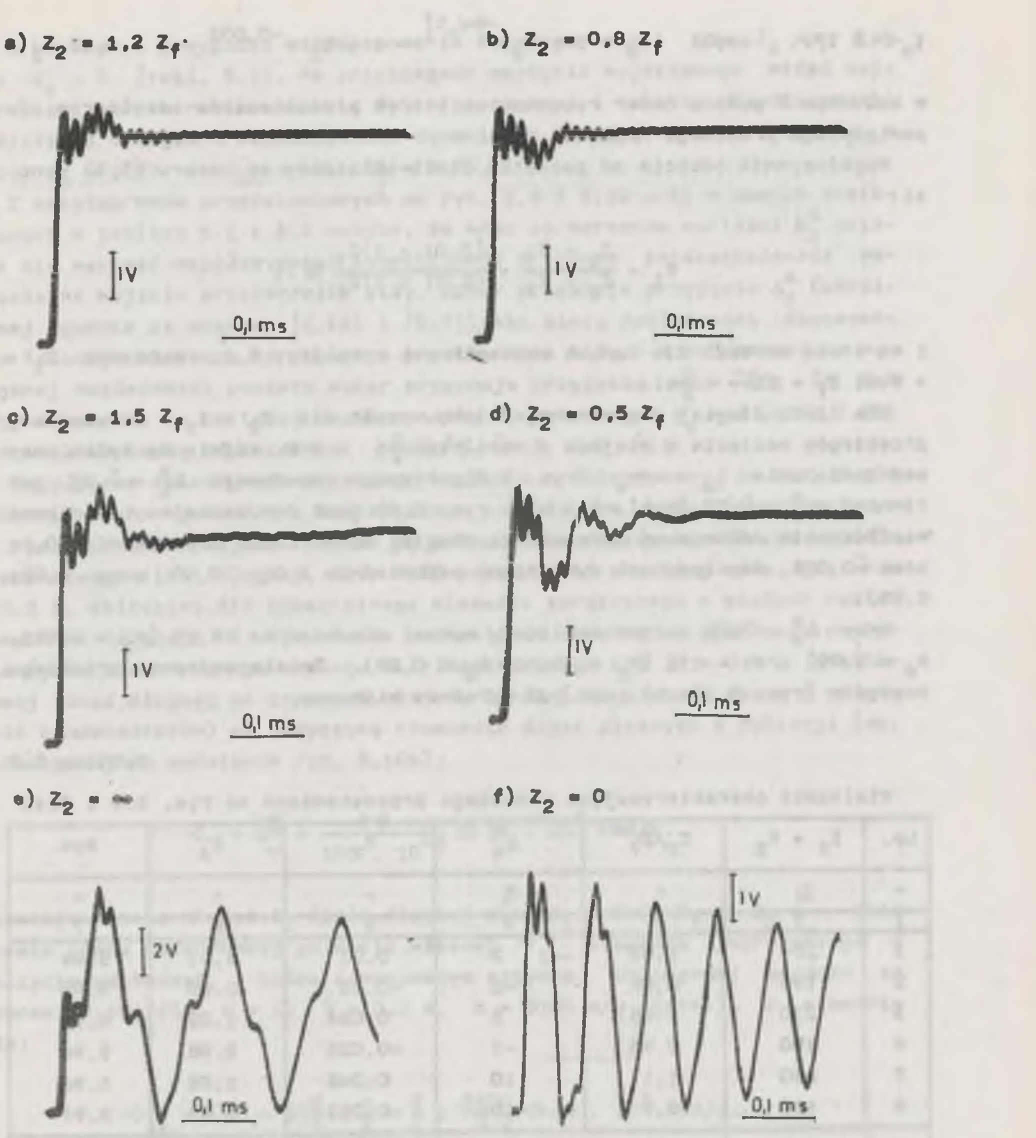
$$\Delta^o_z = \frac{Z_2 - Z_f}{Z_f}, \tag{5.7}$$

w kolumnie 5 podano współczynnik odbicia od końca limii obliczony zgodnie ze wzorem (5.6), w kolumnie 6 podano współczynnik dynamiczny obliczony zgodnie ze wzorem (2.26) dla



Rys. 5.9. Oscylogramy przebiegów napięcia $u(0{,}5\ l;\ t)$ w przekroju o współrzędnej $x = 0{,}5\ l$ drabinkowej linii długiej dla $Z_1 = 0{,}01\ Z_f$;

$$Z_2 = Z_f \pm \Delta_z$$



Rys. 5.10. Oscylogramy przebiegów napięcia $u(0{,}5\ l;\ t)$ w przekroju o współrzędnej $x = 0{,}5\ l$ drabinkowej linii długiej dla $Z_1 = 0{,}01\ Z_f$;

$$Z_2 = Z_f \pm \Delta_z$$

$\tau_n << 2\ l/c$, czyli $k_d = 1 + K_2 e^{-b\nu_o t_1^*} = 1 + K_2\ e^{-0,032} = 1 + 0,97\ K_2$,

w kolumnie 7 podano numer rysunku, na którym przedstawiono oscylogram odpowiedniego przebiegu napięcia.

Współczynnik odbicia od początku linii obliczony ze wzoru (5.5) wynosi:

$$K_1 = \frac{Z_1 - Z_f}{Z_1 + Z_f} = \frac{(0,01 - 1)Z_f}{(0,01 + 1)Z_f} \approx -1$$

i ma stałą wartość dla danych zestawionych w tablicy 5.2, ponieważ $Z_1 = 0,01\ Z_f = 2\,\Omega =$ const.

Dla linii długiej dopasowanej falowo, czyli dla $Z_2 = Z_f$, oscylogramy przebiegów napięcia w miejscu o współrzędnej $x \neq 0$ różnią się tylko czasem opóźnienia $t_0 = x/c_e$ (rys. 5.6). Różnice impedancji $\Delta_z^o = \pm\ 2\%$, jak również $\Delta_z^o = \pm\ 5\%$ (tabl. 5.2 oraz rys. 5.9) jest dopuszczalna, ponieważ współczynnik odbicia od końca linii długiej ma wartości odpowiednio $\pm 0,01$ oraz $\pm 0,025$, współczynnik dynamiczny odpowiednio 1,01; 0,99 oraz 1,02; 0,98.

Przy $\Delta_z^o = \pm 20\%$ zmiana amplitudy wynosi odpowiednio +9,1% ($K_2 = 0,091$, $k_d \approx 1,09$) oraz - 11% ($K_2 = -0,11$, $k_d \approx 0,89$). Zniekształcenie przebiegu napięcia (rys. 5.10a,b) jest już wyraźnie widoczne.

Tablica 5.2

Wielkości charakteryzujące przebiegi przedstawione na rys. 5.9 i 5.10

Lp.	$Z_z = R_z$	Z_2/Z_f	Δ_z^o	K_2	k_d	Rys.
-	Ω	-	%	-	-	-
1	2	3	4	5	6	7
1	204	1,02	2	0,01	1,01	5.9a
2	196	0,98	-2	-0,01	0,99	5.9b
3	210	1,05	5	0,024	1,02	5.9c
4	190	0,95	-5	-0,026	0,98	5.9d
5	220	1,1	10	0,048	1,05	5.9e
6	180	0,9	-10	-0,053	0,95	5.9f
7	240	1,2	20	0,091	1,09	5.10a
8	160	0,8	-20	-0,11	0.89	5.10b
9	300	1,5	50	0,2	1,19	5.10c
10	100	0,5	-50	-0,33	0,64	5.10d
11	∞	∞	∞	1	1,97	5.10e
12	0	0	-100	-1	0,03	5.10f

W krańcowym przypadku niedopasowania falowego, czyli gdy $Z_2 = \infty$ lub gdy $Z_2 = 0$ (tabl. 5.2), na przebiegach napięcia wyjściowego widać najwyraźniej skutek nakładania się fal - pierwotnej i odbitej. Współczynniki odbicia od brzegów i współczynniki dynamiczne wynoszą odpowiednio $K_{2\infty} = 1$, $k_d = 1,97$ i $K_{20} = -1$, $k_d = 0,03$.

Z oscylogramów przedstawionych na rys. 5.9 i 5.10 oraz z danych zestawionych w tablicy 5.1 i 5.2 wynika, że wraz ze wzrostem wartości Δ_z^o zmienia się wartość współczynnika dynamicznego i rośnie zniekształcanie napięcia na wyjściu przetwornika siły. Autor proponuje przyjęcie Δ_z^o (określonej zgodnie ze wzorami (2.28) i (5.7)) jako miary dokładności dopasowania falowego elementu sprężystego przetwornika siły. W zależności od wymaganej dokładności pomiaru autor proponuje przyjęcie $\Delta_z^o = \pm 10$; ± 5 lub $\pm 2\%$. Odpowiada to wartości współczynnika dynamicznego $k_d = 1$ (wzór 2.26) z niedokładnością odpowiednio: $\Delta_k^o \approx \pm 5$; $\pm 2,5$ lub $\pm 1\%$.

Oscylogram zmierzonego przebiegu napięcia przedstawiony na rys. 5.10e wykazuje cechy zgodności z teoretycznym przebiegiem siły przedstawionym na rys. 4.7b. Istniejące różnice są spowodowane niedoskonałością modelu drabinkowego linii długiej. Rys. 4.7b przedstawia przebieg siły, gdy $x = 0,5\ l$, obliczony dla bezstratnego elementu sprężystego o stałych rozłożonych na długości l. Rys. 5.10e przedstawia oscylogram przebiegu napięcia (jako elektrycznego analogu siły) zmierzonego dla $x = 0,5\ l$ drabinkowej linii długiej ze stratami. Straty linii (rezystancja cewek i upływność kondensatorów) są przyczyną tłumienia drgań własnych o pulsacji (np. wyznaczonej na podstawie rys. 5.10e):

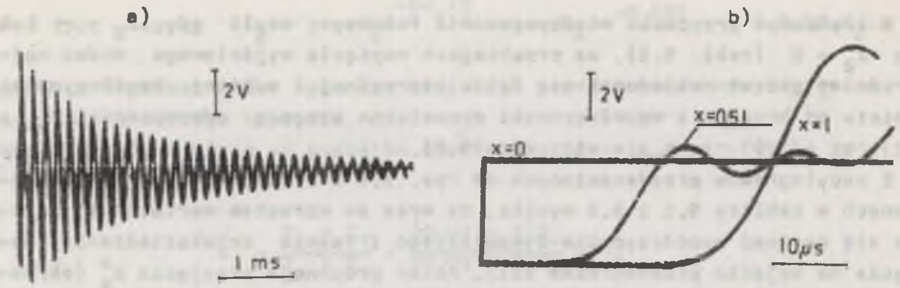
$$\nu_\infty = \frac{2\pi}{T_\infty} = \frac{2\pi}{160\ .\ 10^{-6}} \approx 39\ .\ 10^3\ \text{rad/s}.$$

Pulsacja własna ν modelu linii długiej dla $Z_1 = 0,01\ Z_f$ i $Z_2 = \infty$ jest prawie równa podstawowej pulsacji własnej $\nu_{1\infty}$ elementu sprężystego o początku swobodnym, a końcu zamocowanym sztywno, obliczonej zgodnie ze wzorem (7.10) dla $n = 1$, $l = 0,2$ m, $c = 5100$ m/s (stal), a mianowicie:

$$\nu_{1\infty} = (2n - 1)\frac{\pi}{2}\ .\ \frac{c}{l} = \frac{\pi}{2}\ .\ \frac{5100}{0,2} \approx 40\ .\ 10^3\ \text{rad/s}.$$

Na podstawie oscylogramów przedstawionych na rys. 5.10e i rys. 5.11a, po przekształceniu wzoru (2.24), obliczono tłumienie względne:

$$b_\infty = \frac{1}{\nu_\infty t_1} \ln \frac{u(0,5\ l;0)}{u(0,5\ l;t_1)} \approx 0,012, \qquad (5.8)$$



Rys. 5.11. Oscylogramy przebiegów napięcia u(x,t) drabinkowej linii długiej dla $Z_1 = 0{,}01\,Z_f$; $Z_2 = \infty$
a) x = 0,5 l, b) x = 0; 0,5 l; l

gdzie: $u(0{,}5\,l;0)$ i $u(0{,}5\,l;t_1)$ są wartościami napięcia w miejscu o współrzędnej $x = 0{,}5\,l$ linii długiej, odpowiednio dla $t = 0$ i po czasie t_1; oraz stałą czasową zanikania drgań fal odbitych $T_{z\infty} \approx 2$ ms.

Wartość $T_{z\infty}$ obliczona zgodnie ze wzorem podanym w p. 2.3 wynosi:

$$T_{z\infty} = \frac{1}{b_\infty \nu_\infty} = \frac{1}{0{,}012 \cdot 40 \cdot 10^3} \approx 2{,}1 \text{ ms}$$

i jest prawie równa wartości wyznaczonej na podstawie oscylogramów 5.10e i 5.11a.

W stalowym elemencie sprężystym drgania zanikają nieco wolniej, ponieważ tłumienie w stali ($b < 0{,}01$ [2]) jest mniejsze niż w modelu elektrycznym. Przebiegi napięcia w przedziale czasu ok. 50 μs dla $x = 0$; $0{,}5\,l$ i l oraz $Z_1 = 0{,}01\,Z_f$, $Z_2 = \infty$ przedstawia rys. 5.11b. Na rys. 5.10e i 5.11b widoczne są również oscylacje powstające wewnątrz poszczególnych ogniw modelu drabinkowego o pulsacji drgań:

$$\nu_\infty^* = \frac{2\pi}{15 \cdot 10^{-6}} \approx 420 \cdot 10^3 \text{ rad/s.}$$

Przebiegi przedstawione na rys. 5.11b wykazują cechy zgodności z przebiegami wyznaczonymi analitycznie i przedstawionymi na rys. 4.7. Należy oczywiście uwzględnić niedoskonałość modelu drabinkowego linii długiej.

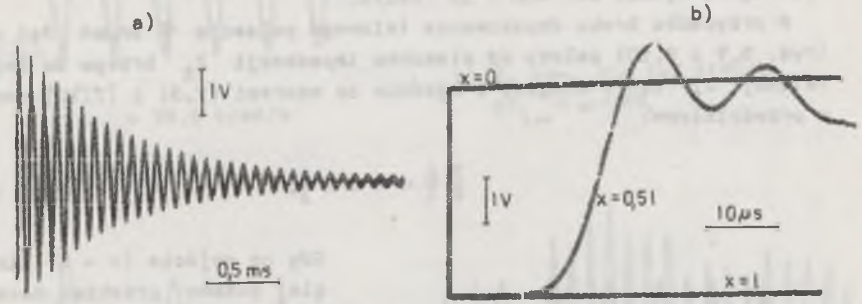
Oscylogram zmierzonego przebiegu napięcia, przedstawiony na rys.5.10f, również wykazuje cechy zgodności z analitycznie wyznaczonym przebiegiem siły przedstawionym na rys. 4.6b. Istniejące różnice spowodowane są tym, że model elektryczny jest linią długą ze stratami (jest to powodem zanikania fal odbitych), składającą się z dziesięciu ogniw o stałych skupionych (jest to przyczyną oscylacji wewnętrznych o pulsacji ν_o^*).

Pulsacja drgań własnych ν_o modelu linii długiej dla $Z_1 = 0{,}01\,Z_f$ i $Z_2 = 0$, wyznaczona na podstawie rys. 5.10e, wynosi:

$$\nu_o = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{2 \cdot \pi}{80 \cdot 10^{-4}} \approx 78{,}6\ 10^3 \text{ rad/s}$$

i jest prawie równa podstawowej pulsacji drgań własnych ν_{o1} elementu sprężystego o brzegach swobodnych, obliczonej ze wzoru (7.3) dla $n = 2$, $l = 0{,}2$ m, $c = 5100$ m/s, a mianowicie:

$$\nu_{o1} = (n-1)\pi\frac{c}{l} = \pi\frac{5100}{0{,}2} \approx 80\ 10^3 \text{ rad/s.}$$



Rys. 5.12. Oscylogramy przebiegów napięcie u(x,t) drabinkowej linii długiej dla $Z_1 = 0{,}01\,Z_f$; $Z_2 = 0$
a) x = 0,5 l, b) x = 0; 0,5 l; l

Tłumienie względne b_o oraz stałą czasową T_{zo} zanikania drgań fal odbitych wyznaczono na podstawie oscylogramów przedstawionych na rys. 5.10f oraz rys. 5.12a, odpowiednio:

$$b_o = \frac{1}{\nu_o t}\ln\frac{u(0{,}5\,l;0)}{u(0{,}5\,l;t)} = \frac{1}{78{,}6 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}}\ln\frac{72}{10} \approx 0{,}016,$$

$$T_{zo} \approx 0{,}8 \text{ ms.}$$

Wartość T_{zo} obliczona ze wzoru podanego w p. 2.3 wynosi:

$$T_{zo} = \frac{1}{b_o\nu_o} = \frac{1}{0{,}016 \cdot 78{,}6 \cdot 10^3} \approx 0{,}8 \text{ ms,}$$

i jest równa wartości wyznaczonej na podstawie oscylogramów 5.10f i 5.12a. Na rys. 5.10f i 5.12b dla $x = 0{,}5\,l$ widoczne są również oscylacje powstające wewnątrz poszczególnych ogniw modelu drabinkowego o pulsacji drgań:

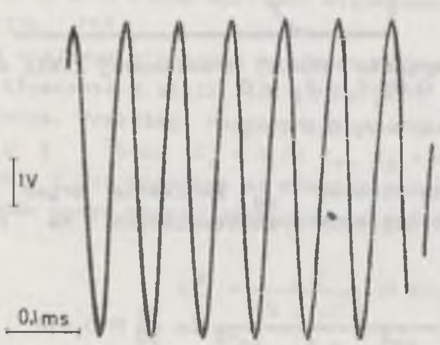
$$\vartheta^*_0 = \frac{2\pi}{16 \cdot 10^{-6}} \approx 390 \cdot 10^3 \text{ rad/s.}$$

Również przebiegi przedstawione na rys. 5.12b wykazują cechy podobieństwa z przebiegami wyznaczonymi analitycznie i przedstawionymi na rys. 4.6. Istniejące różnice są spowodowane stratami linii długiej oraz tym, że drabinkowy model linii długiej składa się z 10 ogniw o elementach skupionych (powoduje to oscylacje wewnętrzne o pulsacji $\vartheta^*_0 = 390 \cdot 10^3$ rad/s).

Z oscylogramów przedstawionych na rysunkach 5.5 i 5.6 (dla $Z_2 = Z_f$), 5.10e i 5.11b (dla $Z_2 = \infty$) oraz 5.10f i 5.12b (dla $Z_2 = 0$) wynika, że pulsacja ϑ^* oscylacji, powstających wewnątrz poszczególnych ogniw drabinkowego modelu linii długiej, prawie nie zależy od stopnia dopasowania falowego i wynosi ok. $400 \cdot 10^3$ rad/s.

W przypadku braku dopasowania falowego pulsacja ϑ drgań fal odbitych (rys. 5.9 i 5.10) zależy od stosunku impedancji Z_2 brzegu do impedancji falowej Z_f linii długiej i zgodnie ze wzorami (7.3) i (7.10) zawiera się w przedziałach:

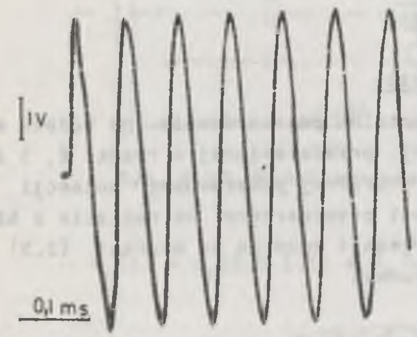
$$\frac{\pi}{2}\frac{c}{l} < \vartheta < \pi\frac{c}{l}.$$



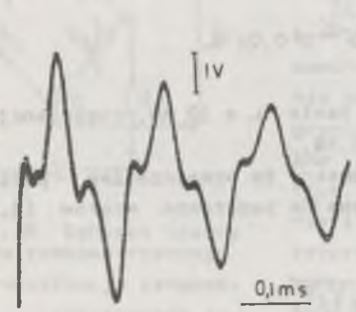
Rys. 5.13. Oscylogram przebiegu wejściowego napięcia harmonicznego o pulsacji $\omega = 2\vartheta_1 = 78{,}5$ krad/s

Gdy na wejście ($x = 0$) linii długiej podano przebieg harmoniczny napięcia, np. o pulsacji $\omega = 2\vartheta_1$ (rys. 5.13), to w przypadku linii dopasowanej falowo przebieg napięcia, np. w miejscu o współrzędnej $x = 0{,}5\ l$ (rys.5.14a), jest taki jak przebieg napięcia wejściowego, niezależnie od wartości pulsacji ω, a jedynie jest opóźniony o czas $t_o = x/c_e = 0{,}5\ l/c_e$. Przebieg przedstawiony na rys. 5.14a jest zgodny z przebiegiem wyznaczonym analitycznie i przedstawionym dla analogicznego przypadku (tzn. $Z_{m1} = 0$, $Z_{m2} = Z_{mf}$, $x = 0{,}5\ l$) na rys. 4.4b. Przebiegi 5.14a oraz 4.4b są identyczne, ponieważ istnieje jedna pulsacja napięcia wejściowego, a więc zgodnie ze wzorem (5.3) występuje jedna prędkość propagacji fali napięcia, a zatem szybkość narastania napięcia wyjściowego jest taka sama jak napięcia na wejściu linii długiej. W przypadku niedopasowania falowego linii długiej (np. dla $Z_2 = \infty$) przebieg napięcia w miejscu o współrzędnej $x = 0{,}5\ l$ (rys. 5.14b) jest zniekształcony falami odbitymi. Przebieg przedstawiony na rys. 5.14b wykazuje jednak cechy podobieństwa z przebiegiem wyznaczonym anali-

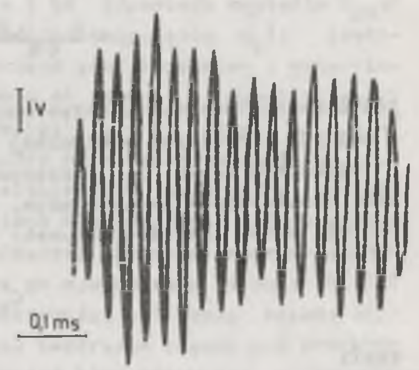
a) $Z_2 = Z_f$
$\omega = 2\vartheta_{1\infty} = 78{,}5$ krad/s



b) $Z_2 = \infty$
$\omega = 2\vartheta_{1\infty} = 78{,}5$ krad/s



c) $Z_2 = \infty$, $\omega = 107$ krad/s
$2\vartheta_{1\infty} < \omega < 3\vartheta_{1\infty}$



Rys. 5.14. Oscylogramy przebiegów napięcia $u(0{,}5\ l;\ t)$ w przekrojach o współrzędnej $x = 0{,}5\ l$ drabinkowej linii długiej, gdy $Z_1 = 0{,}01\ Z_f$

tycznie i przedstawionym dla analogicznego przypadku (tzn. $Z_{m1} = 0$, $Z_{m2} = \infty$, $x = 0{,}5\ l$, $\omega = 2\vartheta_1$) na rys. 4.3b. Istniejące różnice są spowodowane, jak to już uprzednio opisano, niedoskonałością modelu linii długiej.

Jeżeli pulsacja napięcia wejściowego nie jest całkowitą krotnością podstawowej pulsacji ϑ_1 drgań własnych linii długiej, to w przypadku braku dopasowania falowego ($Z_2 \neq Z_f$) zniekształcenie przebiegu napięcia wyjściowego, zgodnie z ogólnym rozwiązaniem równania (5.1) przy odpowiednich warunkach początkowych i brzegowych, jest funkcją pulsacji napięcia wymuszającego ω oraz pulsacji ϑ_1 drgań własnych linii długiej. Na rysunku 5.14c przedstawiono oscylogram przebiegu napięcia wyjściowego w miejscu o współrzędnej $x = 0{,}5\ l$ dla $Z_1 \approx 0$, $Z_2 = \infty$, $\omega = 107 \cdot 10^3$ rad/s, czyli $2\nu_1 < \omega < 3\nu_1$.

5.3. Badania na modelu mechanicznym

5.3.1. Tensometryczny przetwornik siły

Celem tego rozdziału jest eksperymentalne potwierdzenie na modelu mechanicznym wyników analizy teoretycznej, przedstawionej w rozdz. 2, 3 i 4.

Odkształcenie o pulsacji ω równej m-krotnej podstawowej pulsacji ν_1 drgań własnych elementu sprężystego jest przetwarzane na napięcie z błędem dynamicznym nie większym niż δ^o, jeżeli zgodnie ze wzorami (3.2) i (7.10) baza L tensometru spełnia warunek:

$$L \leqslant \frac{4\ l}{m\pi}\sqrt{6\delta^o}. \tag{5.9}$$

Przyjmując $l = 0{,}2$ m, $m = 6$ oraz $\delta^o = 1\%$, otrzymano:

$$L \leqslant \frac{4\ .\ 0{,}2}{6\pi}\sqrt{6\ .\ 10^{-2}} \approx 0{,}01\ \text{m}.$$

Zastosowano tensometry rezystancyjne o bazie $L = 10$ mm, rezystancji $R = 602{,}3\ \Omega$ i czułości statycznej $k_\varepsilon = 2{,}56$.

Pojemność kabli C_k łączących tensometry ze wzmacniaczem pomiarowym oraz oscyloskopem pamiętającym, obliczona na podstawie wzorów (3.3) i (7.10), winna spełniać warunek:

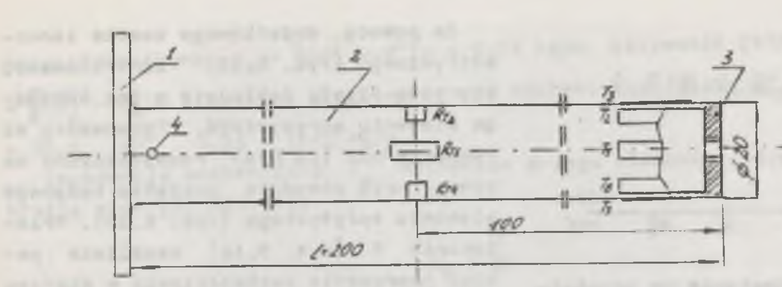
$$C_k \leqslant \frac{2l}{\pi c m R}\sqrt{\delta^o}, \tag{5.10}$$

czyli

$$C_k \leqslant \frac{2\ .\ 0{,}2}{\pi\ .\ 5100\ .\ 6\ .\ 602}\sqrt{10^{-2}} = 690\ \text{pF}.$$

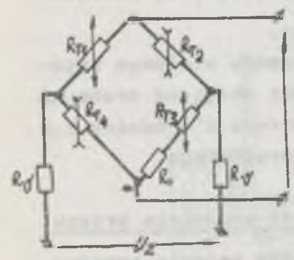
Zastosowano kable o sumarycznej pojemności $C_k \approx 300$ pF.

Model sprężystego elementu tensometrycznego przetwornika siły wykonano z jednorodnej stali o postaci cienkościennej rury o średnicach zewnętrznej $d_z = 20$ mm, wewnętrznej $d_w = 19$ mm i długości $l = 200$ mm (rys. 5.15). W połowie długości rury ($x = 0{,}5\ l$) naklejono 4 tensometry rezystancyjne o bazie $L = 10$ mm i połączono je w układ pełnego mostka Wheatstone'a (rys. 5.16). Napięcie $u_p(t)$ na przekątnej pomiarowej mostka, po uwzględnieniu wzoru (3.1), wynosi:



Rys. 5.15. Model tensometrycznego przetwornika siły

$$u_p(t) = u_p(0{,}5\ l;t) = U_z\,\frac{k_\varepsilon(1+\nu_{st})}{2}\,\varepsilon_{\acute{s}r}(0{,}5\ l;t) = 19{,}2\ \varepsilon_{\acute{s}r}(0{,}5\ l;t)\text{V}. \tag{5.11}$$

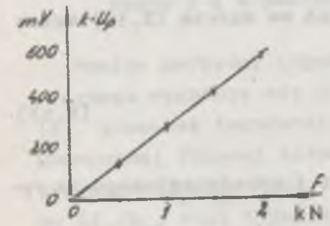


Rys. 5.16. Schemat ideowy mostka tensometrycznego

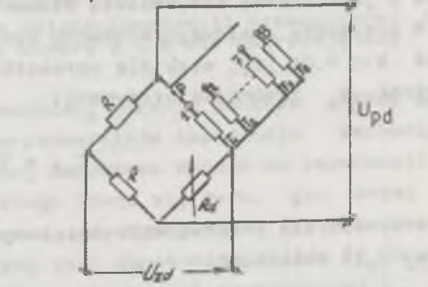
R_T - rezystancja tensometru, R_o - rezystancja zerująca układ przy $F(t)=0$, R_ϑ - rezystancja kompensująca wpływ temperatury otoczenia

Przyjęto: $\nu_{st} = 0{,}25$ (stała Poissona dla stali), $k_\varepsilon = 2{,}56$, $U_z = 12$ V.

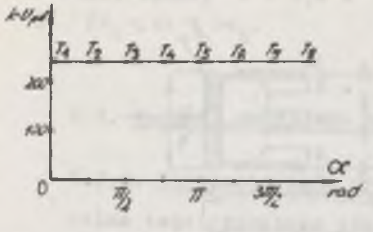
Sile $F_m = 2$ kN odpowiada napięcie $U_{pn} \approx 6$ mV. Do wzmocnienia napięcia $u_p(t)$ zastosowano wzmacniacz szerokopasmowy o wzmocnieniu napięciowym ok. 100 i o częstotliwości granicznej dolnej $f_d = 0$, górnej $f_g = 60$ kHz i szybkości narastania napięcia ok. 0,3 V/µs. Układ elektryczny wyzerowano statycznie i zapewniono minimalizację błędu temperaturowego. Czułość statyczna wykonanego przetwornika siły po wzmocnieniu wynosi ok. 0,3 mV/N. Błąd liniowości obliczony metodą najmniejszej sumy kwadratów błędów nie przekracza 0,2%. Również błąd histerezy w zakresie 0 do 2 kN nie przekracza 0,2% i na rys. 5.17 nie jest widoczny.



Rys. 5.17. Charakterystyka statyczna badanego przetwornika siły



Rys. 5.18. Schemat ideowy mostka dodatkowego



Rys. 5.19. **Napięcie na przekątnej pomiarowej mostka dodatkowego**

Za pomocą dodatkowego mostka tensometrycznego (rys. 5.18) kontrolowano, czy siła działa dokładnie w osi badanego elementu sprężystego. Tensometry są równomiernie (co $\pi/4$) rozmieszczone na zewnętrznym obwodzie początku badanego elementu sprężystego (rys. 5.15). Przełącznik P (rys. 5.18) umożliwia pomiar naprężenia mechanicznego w miejscu naklejenia poszczególnych tensometrów $T_1, T_2, \ldots, T_8$. Wyniki pomiarów napięcia na wyjściu mostka dodatkowego kU_{pd}, proporcjonalne do naprężenia mechanicznego w miejscu naklejenia poszczególnych tensometrów $T_1, T_2, \ldots, T_8$ przedstawia rys. 5.19. Poszczególne wartości napięcia U_{pdn} różniły się mniej niż 3% od średniej wartości napięcia $U_{pdśr} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{8} U_{pdn}$. Oznacza to, że element sprężysty jest obciążony prawie osiowo i ma prawie jednakową grubość ścianki.

Początek $(x = 0)$ elementu sprężystego jest zakończony stalowym krążkiem o grubości 2 mm i masie ok. 4 g. W osi krążka jest wkręcona śruba M5 o długości 4 mm. W osi śruby jest wlutowana stalowa struna o średnicy 1,2 mm, doprowadzająca siłę $F(t)$ do badanego elementu sprężystego.

5.3.2. Praktyczna realizacja mechanicznej impedancji mocowania brzegu

Zgodnie z analogią elektromechaniczną autor wprowadza pojęcie impedancji mechanicznej falowej Z_{mf}, definiując ją następująco (wzór (5.4) i tabl. 5.1):

$$Z_{mf} = \sqrt{\frac{B_o + j\omega m_o}{j\omega \frac{1}{k_o}}}. \tag{5.12}$$

gdzie B_o, m_o, k_o są odpowiednio: jednostkowym tłumieniem, jednostkową masą i jednostkową sztywnością elementu sprężystego.

W przypadku stalowego elementu sprężystego stopień tłumienia ma wartość $b < 0{,}01$ [2], więc dla uproszczenia obliczeń we wzorze (5.12) można pominąć B_o i wówczas otrzymamy:

$$Z_{mf} = \sqrt{k_o m_o}. \tag{5.13}$$

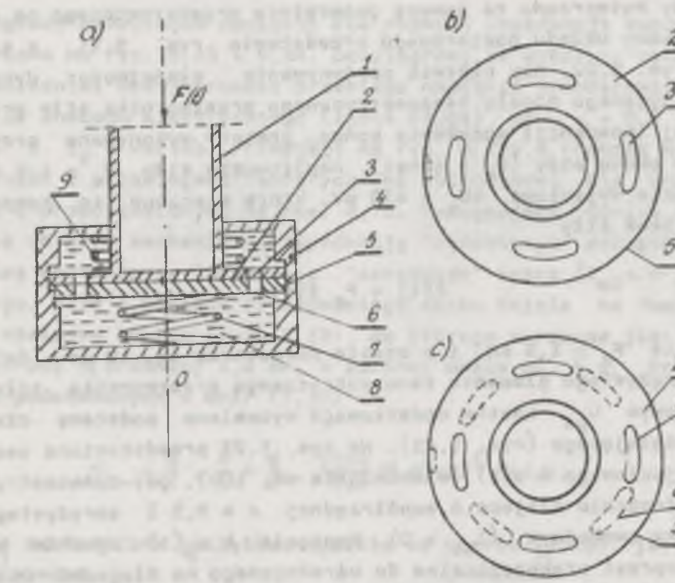
Na przykład dla przetwornika opisanego w p. 5.3.1 i przedstawionego na rysunku 5.15 obliczono:

masę jednostkową $m_o = \frac{\pi}{4}(d_z^2 - d_w^2)\rho = 0{,}24$ kg/m, sztywność jednostkową $k_o = \frac{\pi}{4}(d_z^2 - d_w^2)E = 6{,}4$ MN oraz impedancję mechaniczną falową $Z_{mf} = \sqrt{k_o m_o} = \sqrt{6{,}4 \cdot 10^6 \cdot 0{,}24} = 1240$ kg/s.

Impedancję mechaniczną Z_m mocowania brzegu elementu sprężystego określa wzór [5, 42, 58]:

$$Z_m = \frac{F}{v}, \tag{5.14}$$

gdzie F jest siłą działającą na brzeg, v jest składową prędkości zgodną z kierunkiem siły w punkcie jej przyłożenia.



Rys. 5.20

a) model urządzenia umożliwiającego zmianę impedancji mechanicznej, b) otwory 3 i 6 pokrywają się, c) otwory 3 i 6 nie pokrywają się

Pomiar wartości impedancji mechanicznej w danym punkcie układu mechanicznego wykonuje się przy użyciu przetworników impedancji mechanicznej [6]. Stosunek impedancji mechanicznej mocowania brzegu do impedancji mechanicznej falowej elementu sprężystego równa się zeru, gdy brzeg jest swobodny $(Z_m/Z_{mf} = 0)$, nieskończoności, gdy brzeg jest sztywno zamocowany $(Z_m/Z_{mf} = \infty)$ i jedności, gdy brzeg jest dopasowany falowo $(Z_m/Z_{mf} = 1)$.

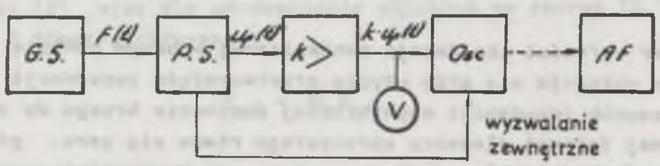
Do fizycznej realizacji nastawialnej impedancji mechanicznej Z_{m2} mocowania końca $(x = l)$ elementu sprężystego (rys. 5.15) autor opracował [48] układ tłumika hydraulicznego przedstawiony na rys. 5.20a. Koniec elementu sprężystego i jest zakończony krążkiem 2 z otworami 3 (rys. 5.20b). Krążek 3 może się przemieszczać osiowo i obracać wokół osi O. Krążek 3 spoczywa na krążku 5 z otworami 6. Krążek 5 może się tylko przemieszczać osiowo. Jeżeli siła $F(t) = 0$, to położenie krążków 2 i 5 ustalają sprężyny 7 i 9 o małej sztywności. Przestrzeń pod oraz nad krążkami wypełniona jest olejem (lub smarem) o odpowiedniej lepkości. Minimalną impedancję mechaniczną otrzymuje się, gdy otwory 3 i 6 pokrywają się (rys. 5.20b), a maksymalną, gdy otwory 3 i 6 są względem siebie całkowicie przesunięte (rys. 5.20c). Pośrednie wartości impedancji mechanicznej otrzymuje się przy częściowym pokrywaniu się otworów 3 i 6. Urządzenie to wykorzystano w badaniu dynamicznych właściwości tensometrycznego przetwornika siły.

5.3.3. Pomiar odpowiedzi skokowej tensometrycznego przetwornika siły

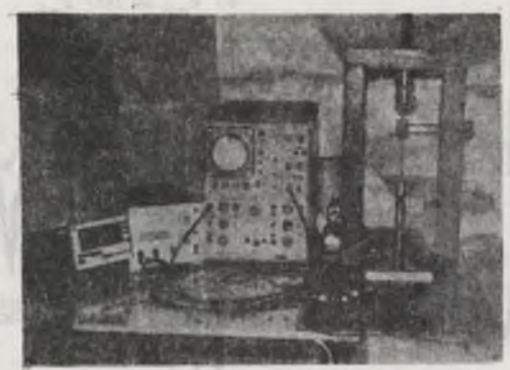
Skok siły wytworzono za pomocą generatora przedstawionego na rys. 4.5a. Schemat blokowy układu pomiarowego przedstawia rys. 5.21, a stanowisko pomiarowe rys. 5.22. Aby ułatwić porównywanie właściwości dynamicznych badanego fizycznego modelu tensometrycznego przetwornika siły przy różnej mechanicznej impedancji mocowania końca, pomiary wykonywano przy stałej amplitudzie skoku siły (F_m = const). Amplitudzie siły $F_m = 1{,}5$ kN odpowiada napięcie wyjściowe $kU_p = 430$ mV, które mierzono za pomocą woltomierza V. Skok siły

$$F(t) = F_m\, \mathbb{1}(t)$$

o amplitudzie $F_m = 1{,}5$ kN i o czasie narastania ok. 10 μs działał na początek sprężystego elementu tensometrycznego przetwornika siły. Napięciem pomiarowym U_{pd} mostka dodatkowego wyzwalano podstawę czasu oscyloskopu pamiętającego (rys. 5.21). Na rys. 5.23 przedstawiono oscylogramy napięcia wyjściowego $k\,u(t)$ (wzmocnienie ok. 100), gdy tensometry były naklejone w otoczeniu miejsca o współrzędnej $x = 0{,}5\ l$ sprężystego elementu o początku swobodnym ($Z_{m1} = 0$). Napięcie $k\,u_p(t)$ zgodnie ze wzorem (3.1) jest wprost proporcjonalne do uśrednionego na długości bazy tensometru odkształcenia względnego $\varepsilon_{śr}$ (0,5 l;t).



Rys. 5.21. Schemat blokowy układu pomiarowego
G.S. – generator skoku siły, P.S. – tensometryczny przetwornik siły, k – wzmacniacz pomiarowy, Osc – oscyloskop z pamięcią, AF – aparat fotograficzny, V – woltomierz



Oscylogramy przebiegów napięcia dla różnych impedancji mocowania końca przedstawiono na rys. 5.23 i 5.24. Oscylogramy te wykazują cechy zgodności z odpowiednimi oscylogramami przebiegu napięcia przedstawionymi na rys. 5.9 do 5.12 analogu elektrycznego (linia długa), gdy $x = 0{,}5\ l$; dla $Z_1 = 0{,}01\ Z_f$ i Z_2' = variab. Przebiegi na rys. 5.23a,b również wykazują cechy zgodności z przebiegami teoretycznymi obliczonymi dla analogicznego przypadku i przedstawionymi na rys. 4.7b. Występujące różnice są spowodowane różną od zera mechaniczną impedancją "swobodnego" początku ($Z_{m1} > 0$) i skończoną mechaniczną impedancją "sztywnego" końca ($Z_{m2} < \infty$) elementu sprężystego. Siła o postaci rzeczywistego skoku działa na "swobodny" początek o stalowym krążku (rys. 5.15), do którego wkręcona jest śruba M5x4 wraz ze struną o średnicy 1,2 mm, o łącznej masie ok. 5 g. Przy pulsacji $\nu_{1\infty}$ drgań podstawowych – wzór (7.10)

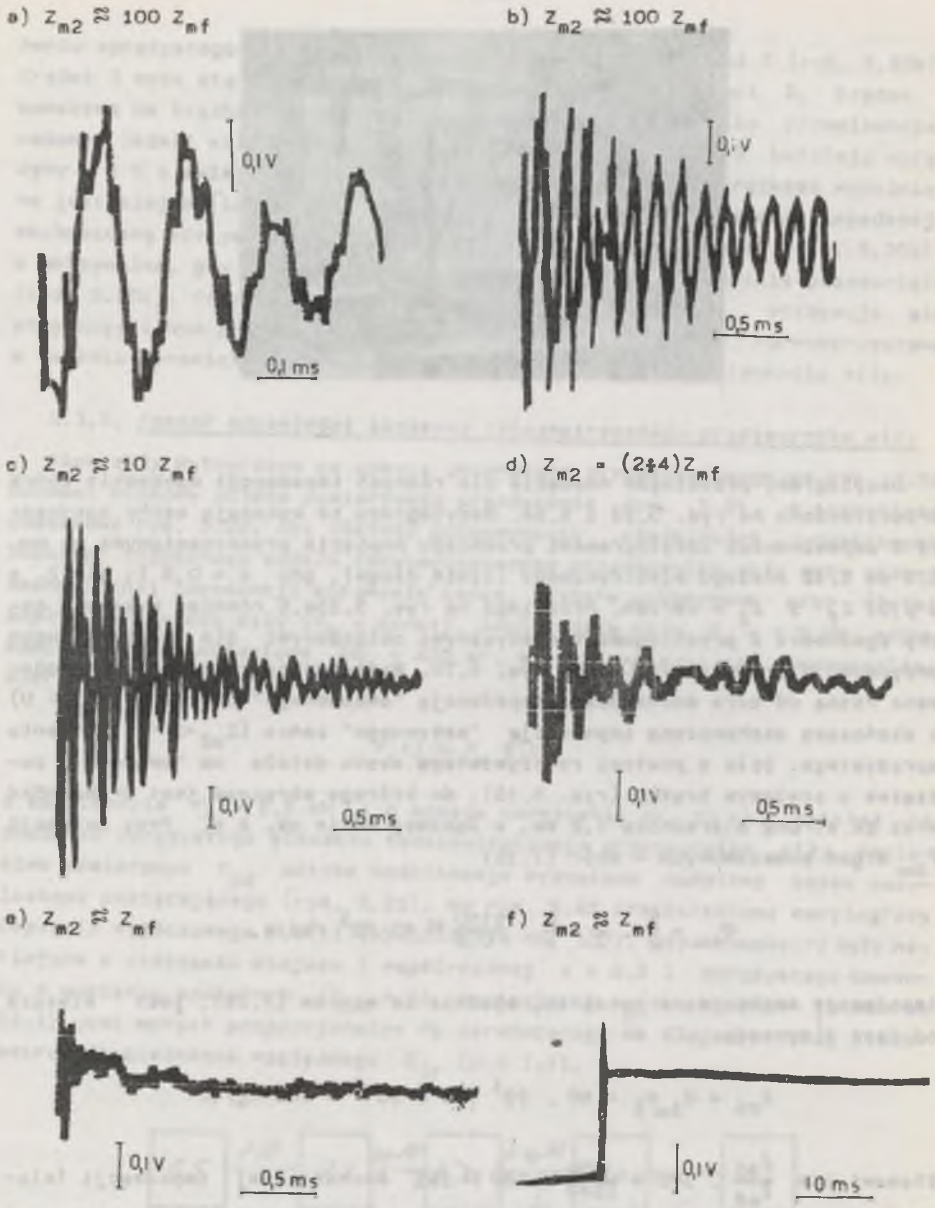
$$\nu_{1\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{l} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{5100}{0{,}2} \approx 40\cdot 10^3 \text{ rad/s},$$

impedancja mechaniczna początku, zgodnie ze wzorem (7.26), jest większa od zera i wynosi:

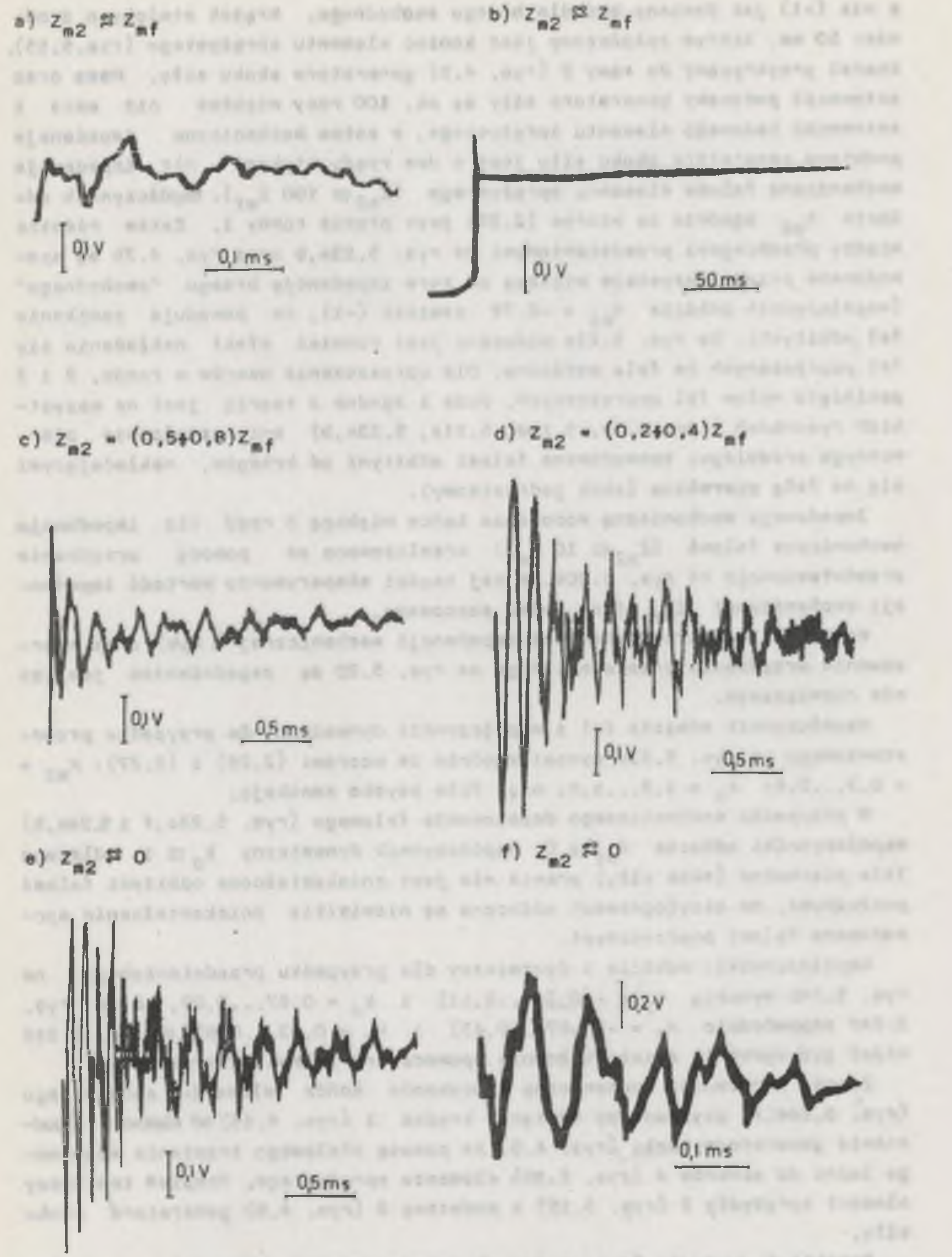
$$Z_{m1} = \nu_{1\infty} m_1 = 40\ .\ 10^3\ .\ 5\ .\ 10^{-3} = 200 \text{ kg/s}.$$

Stanowi ona $\frac{Z_{m1}}{Z_{mf}}\ .\ 100 = \frac{200}{1240}\ .\ 100 \approx 16\%$ mechanicznej impedancji falowej. Współczynnik odbicia fal od początku elementu sprężystego, obliczony zgodnie ze wzorem (5.5) i tabl. 5.1, wynosi:

$$K_{m1} = \frac{Z_{m1} - Z_{mf}}{Z_{m1} + Z_{mf}} = \frac{200 - 1240}{200 + 1240} = -0{,}72,$$



Rys. 5.23. Oscylogramy przebiegów napięcia wyjściowego $(k\, U_p)$ tensometrycznego przetwornika siły dla $Z_{m1} \cong 0$, Z_{m2} = variab.



Rys. 5.24. Oscylogramy przebiegów napięcia wyjściowego (kU_p) tensometrycznego przetwornika siły dla $Z_{m1} \cong 0$, Z_{m2} = variab.

a nie (-1) jak powinno być dla brzegu swobodnego. Krążek stalowy o średnicy 50 mm, którym zakończony jest koniec elementu sprężystego (rys.5.15), został przykręcony do ramy 2 (rys. 4.5) generatora skoku siły. Masa oraz sztywność podstawy generatora siły są ok. 100 razy większe niż masa i sztywność badanego elementu sprężystego, a zatem mechaniczne impedancja podstawy generatora skoku siły jest o dwa rzędy większa niż impedancja mechaniczna falowa elementu sprężystego ($Z_{m2} \approx 100\ Z_{mf}$). Współczynnik odbicia K_{m2} zgodnie ze wzorem (2.27) jest prawie równy 1. Zatem różnice między przebiegami przedstawionymi na rys. 5.23a,b oraz rys. 4.7b są spowodowane przede wszystkim większą od zera impedancją brzegu "swobodnego" (współczynnik odbicia $K_{m1} = -0{,}72$ zamiast (-1), co powoduje zanikanie fal odbitych). Na rys. 5.23a widoczny jest również efekt nakładania się fal poprzecznych na fale wzdłużne. Dla uproszczenia wzorów w rozdz. 2 i 3 pominięto wpływ fal poprzecznych. Duże i zgodne z teorią jest na wszystkich rysunkach (tzn. 4.7b, 5.10e, 5.11a, 5.23a,b) zniekształcenie pierwotnego przebiegu, spowodowane falami odbitymi od brzegów, nakładającymi się na falę pierwotną (skok jednostkowy).

Impedancję mechaniczną mocowania końca większą o rząd niż impedancja mechaniczna falowa ($Z_{m2} \approx 10\ Z_{mf}$) zrealizowano za pomocą urządzenia przedstawionego na rys. 5.20a. W tej części eksperymentu wartość impedancji mechanicznej Z_{m2} jest tylko szacowana.

Konstrukcja wzorca jednostki impedancji mechanicznej (1 kg/s) oraz wzorcowanie urządzenia przedstawionego na rys. 5.20 są zagadnieniem jeszcze nie rozwiązanym.

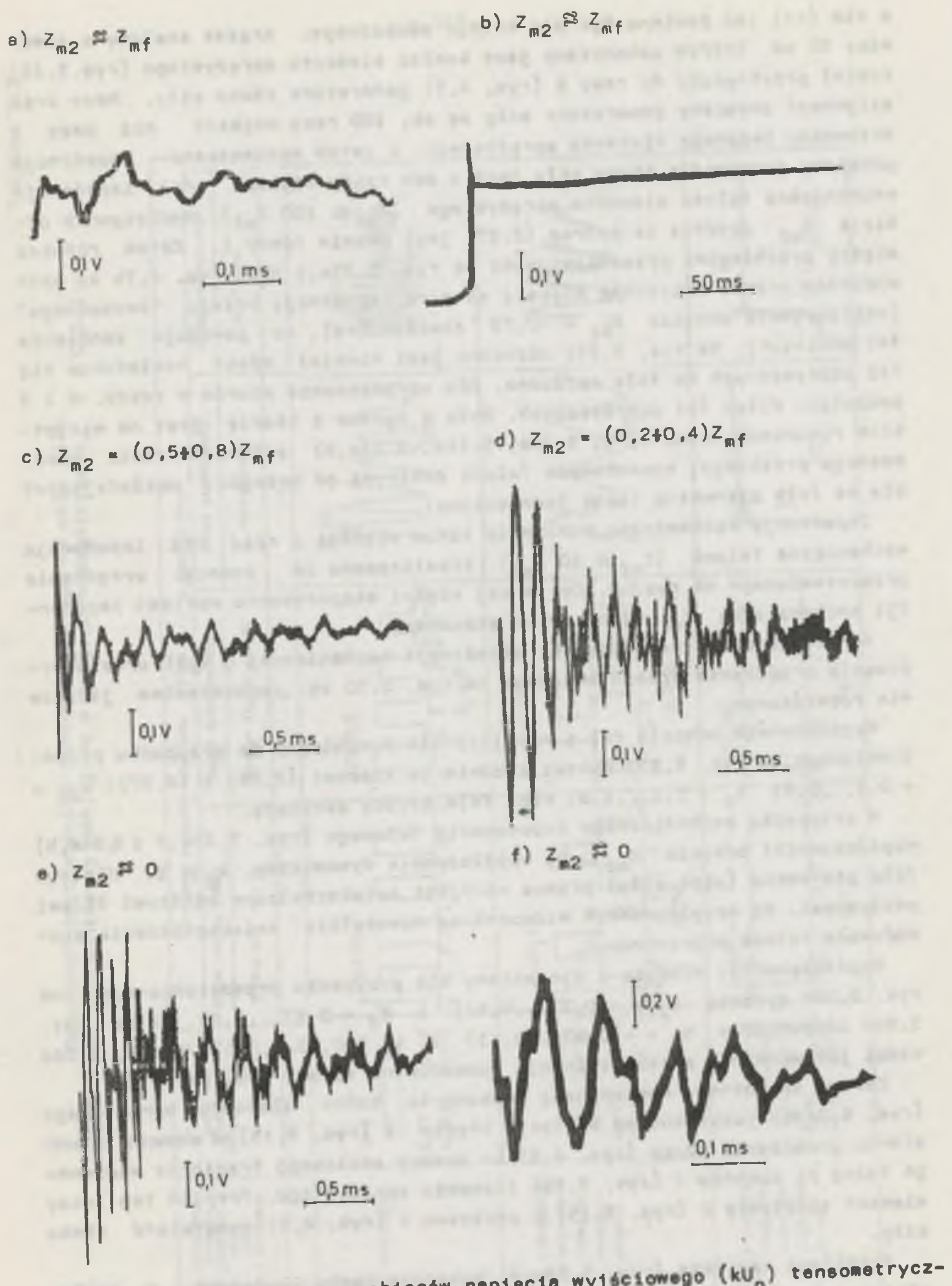
Współczynnik odbicia fal i współczynnik dynamiczny dla przypadku przedstawionego na rys. 5.23d wynosi zgodnie ze wzorami (2.26) i (2.27): $K_{m2} = 0{,}3...0{,}6$; $k_d = 1{,}3...1{,}6$; więc fale szybko zanikają.

W przypadku mechanicznego dopasowania falowego (rys. 5.23e,f i 5.24a,b) współczynniki odbicia $K_{m2} \approx 0$, współczynnik dynamiczny $k_d \approx 1$, dlatego fala pierwotna (skok siły) prawie nie jest zniekształcona odbitymi falami podłużnymi. Na oscylogramach widoczne są niewielkie zniekształcenia spowodowane falami poprzecznymi.

Współczynniki: odbicia i dynamiczny dla przypadku przedstawionego na rys. 5.24c wynoszą $K_2 = -(0{,}33...0{,}11)$ i $k_d = 0{,}67...0{,}89$, a na rys. 5.24d odpowiednio $K_2 = -(0{,}67...0{,}43)$ i $k_d = 0{,}33...0{,}57$. Na rys. 5.24d widać już wyraźnie zniekształcenie spowodowane falami odbitymi.

Zerową impedancję mechaniczną umocowania końca elementu sprężystego (rys. 5.24e,f) uzyskano po odcięciu krążka 1 (rys. 5.15) od elementu w podstawie generatora skoku (rys. 4.5) za pomocą stalowego trzpienia włożonego luźno do otworów 4 (rys. 5.15) elementu sprężystego. Trzpień ten łączy element sprężysty 2 (rys. 5.15) z podstawą 2 (rys. 4.5) generatora skoku siły.

Przebiegi napięcia (rys. 5.24e,f) wykazują cechy zgodności z analogicznymi przebiegami napięcia przedstawionymi na rys. 5.10f i 5.12a ana-



Rys. 5.24. Oscylogramy przebiegów napięcia wyjściowego (kU_p) tensometrycznego przetwornika siły dla $Z_{m1} \approx 0$, Z_{m2} = variab.

a nie (-1) jak powinno być dla brzegu swobodnego. Krążek stalowy o średnicy 50 mm, którym zakończony jest koniec elementu sprężystego (rys.5.15), został przykręcony do ramy 2 (rys. 4.5) generatora skoku siły. Masa oraz sztywność podstawy generatora siły są ok. 100 razy większe niż masa i sztywność badanego elementu sprężystego, a zatem mechaniczna impedancja podstawy generatora skoku siły jest o dwa rzędy większa niż impedancja mechaniczna falowa elementu sprężystego ($Z_{m2} \approx 100\ Z_{mf}$). Współczynnik odbicia K_{m2} zgodnie ze wzorem (2.27) jest prawie równy 1. Zatem różnice między przebiegami przedstawionymi na rys. 5.23a,b oraz rys. 4.7b są spowodowane przede wszystkim większą od zera impedancją brzegu "swobodnego" (współczynnik odbicia $K_{m1} = -0{,}72$ zamiast (-1), co powoduje zanikanie fal odbitych). Na rys. 5.23a widoczny jest również efekt nakładania się fal poprzecznych na fale wzdłużne. Dla uproszczenia wzorów w rozdz. 2 i 3 pominięto wpływ fal poprzecznych. Duże i zgodne z teorią jest na wszystkich rysunkach (tzn. 4.7b, 5.10e, 5.11a, 5.23a,b) zniekształcenie pierwotnego przebiegu, spowodowane falami odbitymi od brzegów, nakładającymi się na falę pierwotną (skok jednostkowy).

Impedancję mechaniczną mocowania końca większą o rząd niż impedancja mechaniczna falowa ($Z_{m2} \approx 10\ Z_{mf}$) zrealizowano za pomocą urządzenia przedstawionego na rys. 5.20a. W tej części eksperymentu wartość impedancji mechanicznej Z_{m2} jest tylko szacowana.

Konstrukcja wzorca jednostki impedancji mechanicznej (1 kg/s) oraz wzorcowanie urządzenia przedstawionego na rys. 5.20 są zagadnieniem jeszcze nie rozwiązanym.

Współczynnik odbicia fal i współczynnik dynamiczny dla przypadku przedstawionego na rys. 5.23d wynosi zgodnie ze wzorami (2.26) i (2.27): $K_{m2} = 0{,}3...0{,}6$; $k_d = 1{,}3...1{,}6$; więc fale szybko zanikają.

W przypadku mechanicznego dopasowania falowego (rys. 5.23e,f i 5.24a,b) współczynniki odbicia $K_{m2} \approx 0$, współczynnik dynamiczny $k_d \approx 1$, dlatego fala pierwotna (skok siły) prawie nie jest zniekształcona odbitymi falami podłużnymi. Na oscylogramach widoczne są niewielkie zniekształcenia spowodowane falami poprzecznymi.

Współczynniki: odbicia i dynamiczny dla przypadku przedstawionego na rys. 5.24c wynoszą $K_2 = -(0{,}33...0{,}11)$ i $k_d = 0{,}67...0{,}89$, a na rys. 5.24d odpowiednio $K_2 = -(0{,}67...0{,}43)$ i $k_d = 0{,}33...0{,}57$. Na rys. 5.24d widać już wyraźnie zniekształcenie spowodowane falami odbitymi.

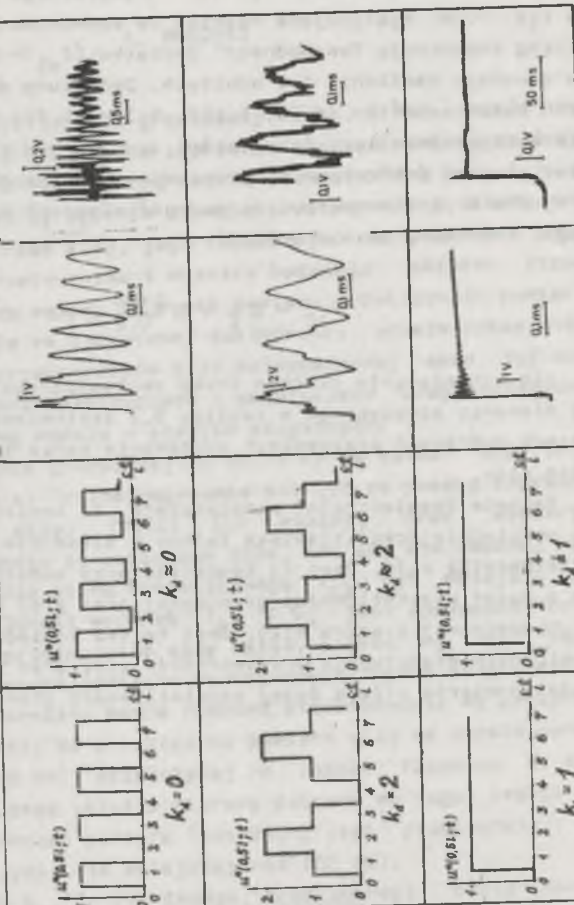
Zerową impedancję mechaniczną umocowania końce elementu sprężystego (rys. 5.24e,f) uzyskano po odcięciu krążka 1 (rys. 5.15) od elementu w podstawie generatora skoku (rys. 4.5) za pomocą stalowego trzpienia włożonego luźno do otworów 4 (rys. 5.15) elementu sprężystego. Trzpień ten łączy element sprężysty 2 (rys. 5.15) z podstawą 2 (rys. 4.5) generatora skoku siły.

Przebiegi napięcia (rys. 5.24e,f) wykazują cechy zgodności z analogicznymi przebiegami napięcia przedstawionymi na rys. 5.10f i 5.12a ana-

Tablica 5.3

Odpowiedź przetwornika tensometrycznego na skok siły.
Przetwornik pośredniczący naklejono w miejscu b współrzędnej $x = 0{,}5\ l$

Lp.	Sprężysty element przetwornika siły o brzegach	Szkic elementu sprężystego	Uśrednione napięcie wyjściowe $u^*(0{,}5\ l;t)$ w funkcji czasu: Model matematyczny – Wykres dla b = 0	Model matematyczny – Wykres dla b = 0,02	Model elektryczny – Oscylogram	Model mechaniczny – Oscylogram
	1	2	3	4	5	6
1	swobodnych	x=0, x=l; $Z_{m1}=0$, $K_1=-1$; $Z_{m2}=0$, $K_2=-1$	$k_d=0$	$k_d \approx 0$		
2	o początku swobodnym, końcu zamocowanym sztywno	x=0, x=l; $Z_{m1}=0$, $K_1=-1$; $Z_{m2}=\infty$, $K_2=1$	$k_d=2$	$k_d \approx 2$		
3	o początku swobodnym, końcu dopasowanym falowo	x=0, x=l; $Z_{m1}=0$, $K_1=-1$; $Z_{m2}=Z_{mf}$, $K_2=0$	$k_d=1$	$k_d \approx 1$		



logu elektrycznego (linia długa) dla $x = 0,5\ l$, $Z_1 = 0,01\ Z_f$ i $Z_2 = 0$. Oscylogramy na rys. 5.24e,f również wykazują cechy zgodności z przebiegiem teoretycznym obliczonym dla analogicznego przypadku i przedstawionym na rys. 4.6b. Występujące różnice są spowodowane większą od zera mechaniczną impedancją "swobodnego" początku ($Z_{m1} > 0$) elementu sprężystego, co powoduje zanikanie fal odbitych. Jednakowo duże jest natomiast na wszystkich rysunkach (tzn. 4.6b, 5.10f, 5.12e, 5.24e i 5.24f) zniekształcenie pierwotnego przebiegu (skok siły) spowodowane falami odbitymi. Jednakowa jest również (obliczona na podstawie tych rysunków) pulsacja fal odbitych i zgodna z podstawową pulsacją drgań własnych badanego elementu sprężystego, obliczona ze wzoru (7.3):

$$\nu_{10} = \pi \frac{c}{l} = \pi \frac{5100}{0,2} \approx 80 \cdot 10^3 \text{ rad/s}.$$

Dla zobrazowania skutków braku mechanicznego dopasowania falowego brzegu elementu sprężystego w tablicy 5.3 zestawiono wyniki uzyskane przy trzech wybranych przypadkach umocowania końca tensometrycznego przetwornika siły.

Badania doświadczalne potwierdzają, że konieczne jest stosowanie modelu uwzględniającego zjawiska falowe w elemencie sprężystym rzeczywistego przetwornika siły. Jest to konieczne przy konstruowaniu przetworników siły o dużej częstotliwości granicznej oraz przy wykonywaniu pomiarów siły szybkozmiennej i udaru siły. Jest to też konieczne do rzetelnej oceny dynamicznych właściwości przetworników siły oraz do rzetelnej oceny dokładności pomiarów siły o dużej częstotliwości granicznej.

6. WNIOSKI

Siłę zmienną o częstotliwości granicznej do ok. 2 Hz, czyli siłę o czasie narastania ponad 1 s, można poprawnie mierzyć dokonując interpretacji wyników zgodnie z elementarną teorią przedstawioną w p. 2.2. Do takich pomiarów użyteczne są ogólnie używane przetworniki i układy pomiarowe. Sztywność przetwornika siły, jego impedancja mechaniczna i dopasowanie falowe, wymiary przetwornika i wymiary badanego obiektu fizycznego nie mają w tym zakresie wpływu na wynik pomiaru. Dokładność pomiaru siły wynika przede wszystkim ze statycznej dokładności przetwornika siły. Dokładność wzorcowania przetworników siły wolnozmiennej może być oceniana wg zasad jak dla pomiarów statycznych z ewentualnym uwzględnieniem opisu zjawisk dynamicznych wg modelu o stałych skupionych.

Siłę o częstotliwości granicznej od ok. 2 Hz do kilku kHz (stromość $d\sigma/dt = (1...10^3)$ GPa/s) można poprawnie mierzyć za pomocą konwencjonalnych przetworników siły, jeżeli ich wymiary oraz wymiary badanego obiektu fizycznego są względnie małe, tak aby dla zadanej wartości Δ_2^o (p. 2.3) czas trwania stanu nieustalonego $t_{\Delta 2}$ był mniejszy niż czas τ_n narastania siły. Jeżeli warunek $t_{\Delta 2} < \tau_n$ jest spełniony, to metrologiczne właściwości przetwornika siły należy dobrać wg reguł wynikających z elementarnej teorii pomiarów dynamicznych. Ocenę dokładności wzorcowania takich przetworników można również przeprowadzić wg kryteriów wynikających z tej teorii. Na przykład do pomiaru siły o czasie narastania $\tau_n > 10^{-2}$ s ($f_{gs} < 100$ Hz), działającej na obiekt fizyczny o długości $l < 1$ m, przetwornik oraz układ pomiarowy dobrane wg reguł teorii elementarnej zapewnią poprawność pomiaru (potrzebny jest przetwornik siły o częstotliwości granicznej nie mniejszej niż 100 Hz).

Gdy jednak $t_{\Delta 2} > \tau_n$, to dla danego, oczekiwanego czasu narastania siły oraz danej długości przetwornika i obiektu fizycznego należy tak dopasować impedancję mechaniczną falową przetwornika siły do impedancji falowej badanego obiektu fizycznego, aby różnice impedancji była nie większe niż określona wartość Δ_z^o (p. 2.3). Wzorcowanie przetworników siły o częstotliwości granicznej rzędu setek i tysięcy herców należy przeprowadzać w warunkach dopasowania falowego wszystkich elementów przenoszenia siły, a rzetelną ocenę dokładności wzorcowania można otrzymać w oparciu o falową teorię zjawisk związanych z przenoszeniem sił szybkozmiennych. Dokładność pomiaru siły szybkozmiennej i dokładność wzorcowania przetwornika wynikają wówczas przede wszystkim ze stopnia dopasowania falowego elementów mechanicznych układu przenoszenia siły.

Zwłaszcza krytyczne jest dopasowanie falowe przetwornika siły do badanego obiektu fizycznego, gdy częstotliwość graniczna siły wynosi kilka kHz lub więcej. Odpowiada to sile o czasie narastania $\tau_n < 1$ ms. Jeżeli dokładne dopasowanie falowe jest niewykonalne, to należy do mierzenia użyć tensometrów rezystancyjnych bezpośrednio naklejonych na badanym obiekcie fizycznym.

Naklejając odpowiednią ilość tensometrów wzdłuż obiektu i mierząc odkształcenie $\varepsilon(x,t)$ w miejscach o współrzędnych x, można wyznaczyć doświadczalnie funkcje własne obiektu (p. 7.1). Można zapewnić poprawne mierzenie siły niezależnie od przestrzennego rozkładu funkcji własnych wzdłuż sprężystego elementu (przetwornika czy obiektu), jeżeli użyje się dwóch przetworników pośredniczących, mających wejścia o tej samej współrzędnej i przetwarzających dwie wielkości, których funkcje własne są przesunięte względem siebie o $\pi/2$ (p. 2.3).

Dokładność wyników analizy teoretycznej zjawisk związanych z przenoszeniem sił, opartej na modelach falowych, została dobrze potwierdzona eksperymentalnie za pomocą modelowania elektrycznego i na realnych mechanicznych modelach fizycznych (rozdz. 5). Istniejące różnice między wynikami otrzymanymi w różny sposób dają się łatwo i jednoznacznie wytłumaczyć jako wynik świadomie przyjętych uproszczeń.

W szczególności w pracy otrzymano następujące praktyczne wyniki badań:

Sformułowano kryteria zapewniające daną dokładność pomiaru siły o dowolnej szybkości zmian i dowolnym przebiegu (rozdz. 2).

Podano warunki fizyczne wzorcowania przetworników siły zmiennej (rozdz. 4).

Podano sposób wykonania przetwornika mierzącego poprawnie siłę niezależnie od rozkładu funkcji własnych (rozdz. 2, wzór (2.32)).

Wprowadzono kryterium mechanicznego dopasowania falowego i wykorzystano go do sformułowania wymagań do budowy niezniekształcającego przetwornika siły, do minimalizacji błędu sprzężenia przetwornika siły z badanym obiektem fizycznym i do wzorcowania przetworników siły zmiennej.

Wyniki badań przedstawione w pracy wyjaśniają przyczyny znacznych błędów wykonywanych pomiarów sił szybkozmiennych. W ogólnym przypadku nie można bowiem poprawnie planować pomiarów sił ani ich wykonywać i interpretować otrzymanych wyników, jeżeli takie cele chce się osiągnąć posługując się elementarną teorią zjawisk dynamicznych.

Praktyczne wykonanie dokładnych pomiarów wymaga rozwiązania problemu realizacji dopasowania falowego elementu sprężystego, zwłaszcza o dużej impedancji falowej przetwornika.

Teoria przedstawiona w pracy może mieć zastosowanie do pomiaru innych pochodnych wielkości mechanicznych dynamicznych, jeżeli w przetwornikach do pomiaru tych wielkości mają zastosowanie elementy sprężyste (np. pomiar ciśnienia, pomiar momentu skręcającego lub gnącego).

Do rozwiązania pozostają jeszcze następujące zagadnienia:

Opracowanie uniwersalnego sposobu dopasowania mechanicznego falowego elementów w mechanicznych układach pomiarowych.

Konstrukcja wzorca miary impedancji mechanicznej oraz opracowanie odpowiednich metod pomiaru tej impedancji.

Opracowanie zasad korekcji dynamicznej wyników obciążonych błędami spowodowanymi mechanicznym niedopasowaniem falowym przetwornika siły do badanego obiektu fizycznego. Opracowanie zasad korekcji powinno odpowiedzieć na pytania: czy w ogólnym przypadku zagadnienie jest rozwiązalne, jakie są warunki rozwiązalności i jakie są warunki realizacji korekcji dynamicznej o założonej dokładności.

7. DODATEK

7.1. Drgania własne i funkcje własne elementu sprężystego

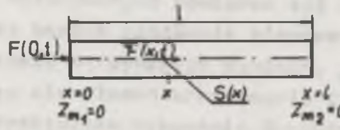
Na podstawie wzoru (2.24) i rys. 2.10 założono zerowe tłumienie strukturalne przy analizowaniu zjawisk zachodzących w elemencie sprężystym w czasie $t < 6\ l/c$. Błąd analizy wynikający z takiego uproszczenia nie przekracza wartości Δ_1^0 ($\pm$ 2%).

Zakładając dla elementu sprężystego: zerowe tłumienie ($B_1 = 0$), jednorodny materiał ($\rho(x) = 0$), stały przekrój ($S(x) = S$) i zerowe wymuszenie $F_1(x,t) = 0$, równanie (2.21) przyjmuje postać:

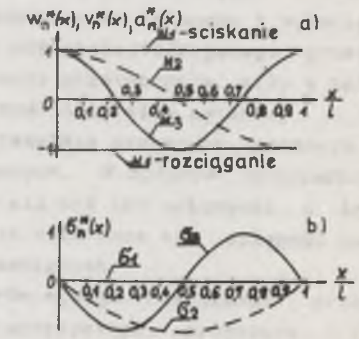
$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{7.1}$$

gdzie c jest prędkością propagacji fali odkształceniowej (ściskającej lub rozciągającej) wzdłuż elementu sprężystego wyznaczoną ze wzoru:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{7.2}$$



Rys. 7.1. Model elementu sprężystego o brzegach swobodnych



Rys. 7.2. Unormowane funkcje własne
a) przemieszczenia $w_n^*(x)$, prędkości $v_n^*(x)$ i przyspieszenia $a_n^*(x)$,
b) naprężenia mechanicznego $\sigma_n^*(x)$

Rozwiązując równanie (7.1) z uwzględnieniem właściwości elementu sprężystego o brzegach swobodnych (tzn. zerowe impedancje mechaniczne mocowania brzegów $Z_{m1} = Z_{m2} = 0$) - rys. 7.1, czyli dla warunków brzegowych [22, 61]

$$\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{i} \quad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0,$$

otrzymuje się wartości pulsacji poszczególnych postaci drgań własnych nietłumionych elementu sprężystego:

$$\nu_{on} = (n-1)\frac{\pi c}{l}, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,2,3,\dots, \tag{7.3}$$

funkcje własne przemieszczenia $w_n(x)$, prędkości $v_n(x)$ i przyspieszenia $a_n(x)$ [54, 56]:

$$w_n(x) = v_n(x) = a_n(x) = B_n\cos\frac{\nu_n}{c}x = B_n\cos(n-1)\frac{\pi x}{l}, \tag{7.4}$$

oraz funkcje własne naprężenia mechanicznego $\sigma_n(x)$:

$$\sigma_n(x) = -B_nE\frac{\nu_n}{c}\sin\frac{\nu_n}{c}x = -B_nE\frac{\nu_n}{c}\sin(n-1)\frac{\pi x}{l}, \tag{7.5}$$

jak również funkcje wartości chwilowych w miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego, określające:

przemieszczenie

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(C_n\sin\nu_nt + D_n\cos\nu_nt)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \tag{7.6}$$

naprężenie mechaniczne

$$\sigma(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_nE\frac{\nu_n}{c}(C_n\sin\nu_nt + D_n\cos\nu_nt)\sin\frac{\nu_n}{c}x, \tag{7.7}$$

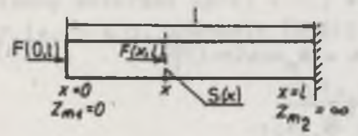
prędkość

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\nu_n(C_n\cos\nu_nt - D_n\sin\nu_nt)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \tag{7.8}$$

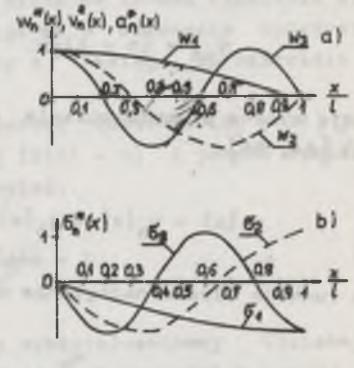
i przyspieszenie

$$a(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 (C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \qquad (7.9)$$

gdzie B_n jest stałą zdeterminowaną konstrukcją elementu sprężystego (warunkami brzegowymi); C_n, D_n są stałymi zdeterminowanymi warunkami początkowymi.



Rys. 7.3. Model elementu sprężystego o początku swobodnym i końcu sztywno zamocowanym



Rys. 7.4. Unormowane funkcje własne
a) przemieszczenia $w_n^*(x)$, prędkości $v_n^*(x)$ i przyspieszania $a_n^*(x)$,
b) naprężenia mechanicznego $\sigma_n^*(x)$

Postępując podobnie dla elementu sprężystego o początku swobodnym ($Z_{m1} = 0$), a końcu sztywno zamocowanym (nieskończenie duża impedancja mechaniczna mocowania, $Z_{m2} = \infty$) - rys. 7.3, tzn. rozwiązując równanie (7.1) dla warunków brzegowych

$$\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{i} \quad w(l,t) = 0,$$

otrzymuje się wartości pulsacji drgań własnych:

$$\nu_{on} = (2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{l}, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad (7.10)$$

funkcje własne:

$$w_n(x) = v_n(x) = a_n(x) = B_n\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}, \qquad (7.11)$$

$$\sigma_n(x) = -B_n E\frac{\nu_n}{c}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}, \qquad (7.12)$$

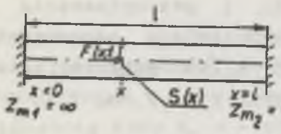
oraz funkcje wartości chwilowych:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(C_n\sin\nu_n t + D_n\cos\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \qquad (7.13)$$

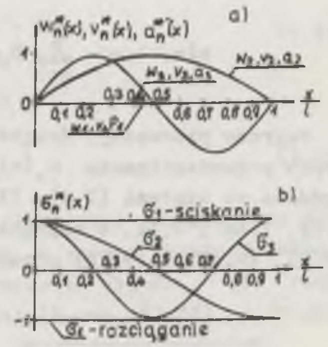
$$\sigma(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n E\frac{\nu_n}{c}(C_n\sin\nu_n t + D_n\cos\nu_n t)\sin\frac{\nu_n}{c}x, \qquad (7.14)$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\nu_n(C_n\cos\nu_n t - D_n\sin\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \qquad (7.15)$$

$$a(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n\nu_n^2(C_n\sin\nu_n t + D_n\cos\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x.$$



Rys. 7.5. Model elementu sprężystego o brzegach sztywno zamocowanych



Rys. 7.6. Unormowane funkcje własne
a) przemieszczenia $w_n^*(x)$, prędkości $v_n^*(x)$ i przyspieszenia $a_n^*(x)$,
b) naprężenia mechanicznego $\sigma_n^*(x)$

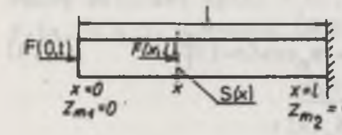
Dla elementu o brzegach sztywno zamocowanych ($Z_{m1} = Z_{m2} = \infty$) - rys. 7.5, o warunkach brzegowych $w(0,t) = 0$ i $w(l,t) = 0$, otrzymuje się wartości pulsacji drgań własnych:

$$\nu_{on} = (n-1)\frac{\pi c}{l}, \qquad (7.16)$$

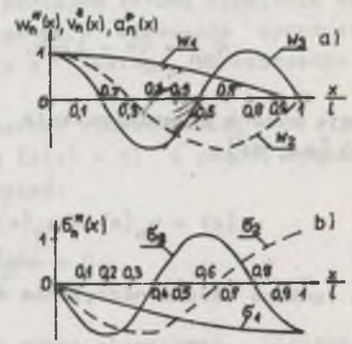
i przyspieszenie

$$a(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 (C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \tag{7.9}$$

gdzie B_n jest stałą zdeterminowaną konstrukcją elementu sprężystego (warunkami brzegowymi); C_n, D_n są stałymi zdeterminowanymi warunkami początkowymi.



Rys. 7.3. Model elementu sprężystego o początku swobodnym i końcu sztywno zamocowanym



Rys. 7.4. Unormowane funkcje własne

a) przemieszczenie $w_n^*(x)$, prędkości $v_n^*(x)$ i przyspieszenia $a_n^*(x)$,
b) naprężenia mechanicznego $\sigma_n^*(x)$

Postępując podobnie dla elementu sprężystego o początku swobodnym ($Z_{m1} = 0$), a końcu sztywno zamocowanym (nieskończenie duża impedancja mechaniczna mocowania, $Z_{m2} = \infty$) - rys. 7.3, tzn. rozwiązując równanie (7.1) dla warunków brzegowych

$$\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{i} \quad w(l,t) = 0,$$

otrzymuje się wartości pulsacji drgań własnych:

$$\nu_{on} = (2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{l}, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,2,3,\dots \tag{7.10}$$

funkcje własne:

$$w_n(x) = v_n(x) = a_n(x) = B_n \cos(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}, \tag{7.11}$$

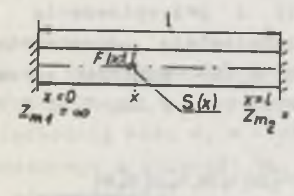
$$\sigma_n(x) = -B_n E \frac{\nu_n}{c}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}, \tag{7.12}$$

oraz funkcje wartości chwilowych:

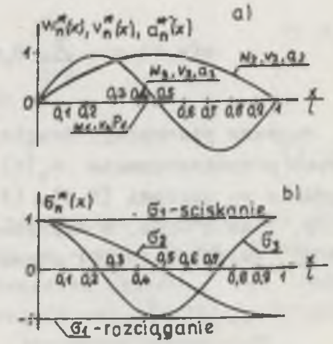
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \tag{7.13}$$

$$\sigma(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n E \frac{\nu_n}{c}(C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\sin\frac{\nu_n}{c}x, \tag{7.14}$$

$$\left.\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n (C_n \cos\nu_n t - D_n \sin\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \\ a(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 (C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$



Rys. 7.5. Model elementu sprężystego o brzegach sztywno zamocowanych



Rys. 7.6. Unormowane funkcje własne

a) przemieszczenia $w_n^*(x)$, prędkości $v_n^*(x)$ i przyspieszenia $a_n^*(x)$,
b) naprężenia mechanicznego $\sigma_n^*(x)$

Dla elementu o brzegach sztywno zamocowanych ($Z_{m1} = Z_{m2} = \infty$) - rys. 7.5, o warunkach brzegowych $w(0,t) = 0$ i $w(l,t) = 0$, otrzymuje się wartości pulsacji drgań własnych:

$$\nu_{on} = (n-1)\frac{\pi c}{l}, \tag{7.16}$$

funkcje własne:

$$w_n(x) = v_n(x) = a_n(x) = B_n \sin(n-1)\frac{\pi}{l}x, \qquad (7.17)$$

$$\sigma_n(x) = BE\frac{\nu_n}{c}\cos(n-1)\frac{\pi}{l}x, \qquad (7.18)$$

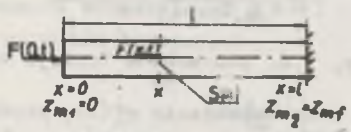
oraz funkcje wartości chwilowych:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\sin\frac{\nu_n}{c}x, \qquad (7.19)$$

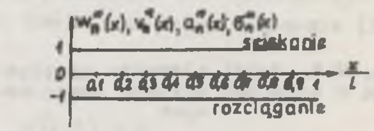
$$\sigma(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n E\frac{\nu_n}{c}(C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\cos\frac{\nu_n}{c}x, \qquad (7.20)$$

$$\left.\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\nu_n(C_n \cos\nu_n t - D_n \sin\nu_n t)\sin\frac{\nu_n}{c}x, \\ a(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} B_n\nu_n^2(C_n \sin\nu_n t + D_n \cos\nu_n t)\sin\frac{\nu_n}{c}x. \end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

Wykresy pierwszej, drugiej i trzeciej unormowanych postaci funkcji własnych przemieszczenia $w_n(x)$, prędkości $v_n(x)$ i przyspieszenia $a_n(x)$ zgodnie ze wzorami (7.4), (7.11) i (7.17) przedstawiają odpowiednio rys. 7.2a, 7.4a i 7.6a, a naprężenia mechanicznego $\sigma_n(x)$ zgodnie ze wzorami (7.5), (7.12) i (7.18) przedstawiają odpowiednio rys. 7.2b, 7.4b i 7.6b.



Rys. 7.7. Model elementu sprężystego o początku swobodnym i końcu dopasowanym falowo



Rys. 7.8. Unormowane funkcje własne przemieszczenia $w_n^*(x)$, prędkości $v_n^*(x)$, przyspieszenia $a_n^*(x)$ i naprężenia mechanicznego $\sigma_n^*(x)$

Odpowiednio dla elementu sprężystego o początku swobodnym $(Z_{m1} = 0)$ i końcu dopasowanym falowo $(Z_{m2} = Z_{mf})$ - rys. 7.7, otrzymano funkcje własne:

$$w_n(x) = v_n(x) = a_n(x) = \sigma_n(x) = B = \text{const.} \qquad (7.22)$$

Wykresy unormowanych postaci funkcji własnych przedstawia rys. 7.8.

Z rys. 7.2, 7.4 i 7.6 wynika, że poszczególne postacie przestrzennego rozkładu naprężenia mechanicznego są przesunięte o ćwierć długości fali względem odpowiednich postaci przestrzennego rozkładu przemieszczenia, prędkości czy przyspieszenia. W danym miejscu o współrzędnej x elementu sprężystego, strzałce przemieszczenia, prędkości czy przyspieszenia odpowiada węzeł naprężenia mechanicznego i odwrotnie.

7.2. Impedancja mechaniczna

Układy mechaniczne drgające o parametrach skupionych można przedstawić za pomocą modelu o odpowiednim układzie mas, sprężyn i tłumików. Można wyróżnić:

siłę bezwładności $F_{(m)}$ - rys. 7.9a

$$F_{(m)} = am, \qquad (7.23)$$

siłę odkształcenia postaciowego $F_{(k)}$ - rys. 7.9b

$$F_{(k)} = k_s w, \qquad (7.24)$$

siłę tłumienia wiskotycznego $F_{(B)}$ - rys. 7.9c

$$F_{(B)} = Bv, \qquad (7.25)$$

gdzie: a - jest przyspieszeniem masy m, B - tłumieniem wiskotycznym układu mechanicznego, k_s - sztywnością tego układu, m - masą skupioną układu, v - prędkością masy m, w - przemieszczeniem początku układu. Dla ruchu harmonicznego o pulsacji ω, zgodnie ze wzorami (5.14), (7.23) ..., (7.25), można napisać [42]:

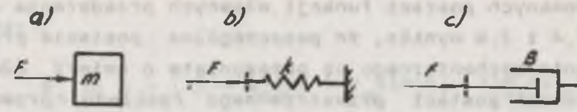
$Z_{m(m)} = X_{m(m)} = j\omega m$ - reaktancja mechaniczna bezwładnościowa,

$Z_{m(k)} = X_{m(k)} = k_s/j\omega$ - reaktancja mechaniczna odkształceniowa,

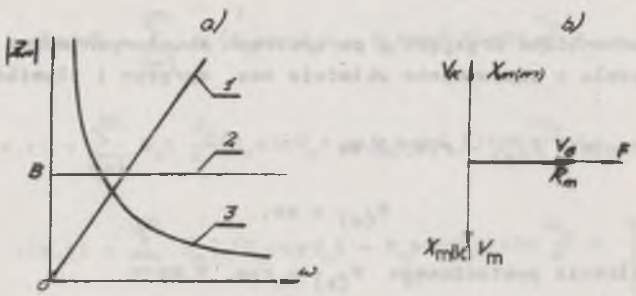
$Z_{m(B)} = R_m = B$ - opór mechaniczny tłumienia wiskotycznego.

Moduły poszczególnych składowych impedancji mechanicznej przedstawia rys. 7.10a, a wykresy składowych prędkości: bezwładnościowej v_m, tłumieniowej v_B i odkształceniowej v_k oraz wykresy reaktancji mechanicznej bezwładnościowej $X_{m(m)}$, odkształceniowej $X_{m(k)}$ i oporu mechanicznego R_m dla przypadku, gdy $F(t) = F_m \sin\omega t$ przedstawia rys. 7.10b. Impedancja mechaniczna jest wielkością zespoloną

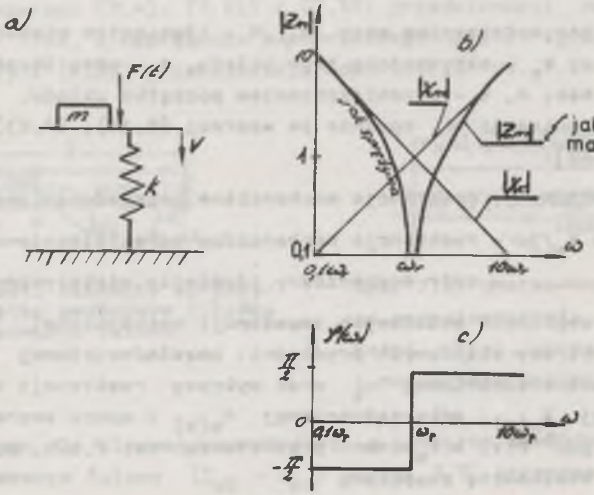
$$Z_m = R_m + j\left(\omega m - \frac{k_s}{\omega}\right) = |Z_m| e^{j\varphi_m} \qquad (7.26)$$



Rys. 7.9. Działanie siły
a) na masę m, b) na układ o sztywności k_s, c) na układ o tłumieniu wiskotycznym B



Rys. 7.10
a) wykresy modułów składowych impedancji mechanicznej
1 - bezwładnościowej, 2 - tłumieniowej, 3 - odkształceniowej
b) wykres wskazowy siły F, składowych prędkości v i składowych impedancji mechanicznej Z_m



Rys. 7.11
a) model, b) moduł, c) faza impedancji mechanicznej, układu siły działającej na masę skupioną podpartą sprężyną

gdzie: $|Z_m| = \sqrt{R_m^2 + (\omega m - k_s/\omega)^2}$ jest modułem impedancji mechanicznej,

$\varphi_m = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega m - k_s/\omega}{R_m}$ jest argumentem impedancji mechanicznej.

Jeżeli siła F(t) działa na masę skupioną m, podpartą sprężyną o sztywności k_s (rys. 7.11a), to impedancja mechaniczna układu wynosi:

$$Z_m = j(\omega m - k_s/\omega).$$

W rezonansie, czyli przy

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{k_s}{m}}$$

następuje zmiana charakteru impedancji mechanicznej (rys. 7.11b,c). Dla $\omega < \omega_r$ impedancja ma charakter odkształceniowy (układ zachowuje się jak sprężyna). Dla $\omega > \omega_r$ impedancja ma charakter bezwładnościowy (układ zachowuje się jak masa). Przy $\omega = \omega_r$ mechaniczna impedancja jest równa zeru, tzn. że prawie zerowa siła może spowodować bardzo dużą amplitudę drgań, jeżeli układ mechaniczny nie jest tłumiony. Zatem przez odpowiedni dobór masy skupionej m i sztywności k_s sprężyny możne przy pulsacji $\omega = \omega_r$ zrealizować zerową impedancję mechaniczną mocowania brzegu sprężystego elementu przetwornika siły. Należy zauważyć, że przy $\omega = \omega_r$ składowa rzeczywista prędkości $\mathrm{Re}\{v\}$, będące w fazie z siłą wymuszającą, ma wartość maksymalną, a składowa urojona prędkości $I_m\{v\}$, będąca prostopadła do siły wymuszającej, ma wartość zerową. Właściwość te jest wykorzystywana w praktyce do pomiaru wartości pulsacji rezonansowej ω_r.

Jeżeli siła F(t) działa na masę skupioną m poprzez sprężynę o sztywności k_s (rys. 7.12), to admitancja mechaniczna (odwrotność impedancji mechanicznej) układu wynosi:

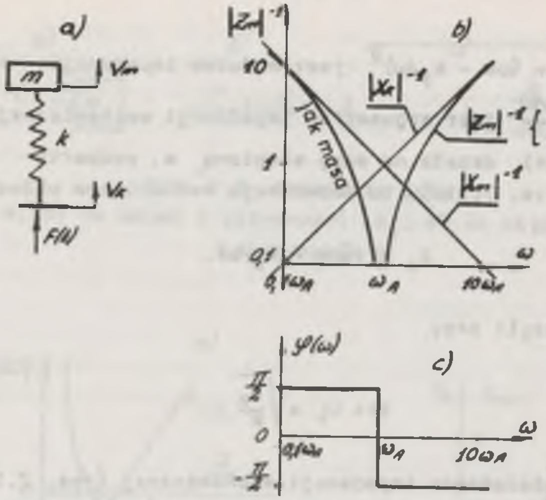
$$\frac{1}{Z_m} = j\left(\frac{\omega}{k_s} - \frac{1}{\omega m}\right).$$

W rezonansie, czyli przy

$$\omega = \omega_A = \sqrt{\frac{k_s}{n}}$$

następuje zmiana charakteru admitancji mechanicznej (rys. 7.12b,c).

Dla $\omega < \omega_A$ admitancja ma charakter bezwładnościowy (jak masa), a dla $\omega > \omega_A$ admitancja ma charakter odkształceniowy (jak sprężyna). Przy $\omega = \omega_A$ admitancja mechaniczna jest równa zeru, czyli impedancja mechaniczna jest nieskończenie wielka. Znaczy to, że przez odpowiedni dobór struktury układu zawierającego masę skupioną m i sprężynę o sztywności k_s, tak jak



Rys. 7.12

a) model, b) moduł, c) faza admitancji mechanicznej, układu siły działającej poprzez sprężynę na masę skupioną

na rys. 7.12a, można przy pulsacji $\omega = \omega_A$ otrzymać nieskończenie wielką impedancję mechaniczną mocowania brzegu sprężystego elementu przetwornika siły, czyli można praktycznie zrealizować brzeg sztywno zamocowany.

W układach mechanicznych złożonych z kilku mas i kilku sprężyn będzie kilka różnych pulsacji, przy których wystąpią rezonanse lokalne.

Ze wzoru (7.26) oraz z rys. 7.10a wynika, że tylko mechaniczna impedancja tłumieniowa (tłumienie wiskotyczne) ma wartość stałą, niezależną od pulsacji działającej siły.

LITERATURA

[1] Abramczuk G.A.: Wlijanije swiazujuszczego na pieriedatocznuju i impulsnuju pierechodnuju charakteristiki nakleiwajemych połuprowodnikowych tienzorezistorow. Mietrołogija 1978, Nr 10.

[2] Baumann E.: Elektrische Kraftmesstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1976.

[3] Bielajew W.I.: Wysokoskorostnaja dieformacija mietałłow. Mińsk 1976.

[4] Braginskij K.I.: Izmierienije paramietrow udarnogo impulsa. Mietrołogija 1978, Nr 11.

[5] Broch J.T.: Messungen von Mechanischen Schwingungen und Stossen. Brüel und Kjaer. Danemark 1970.

[6] Brüel and Kjaer: Instrumenty do analizy dźwięku, wibracji oraz sygnałów elektrycznych. Katalog 1978.

[7] Cholewicki T.: Elektrotechnika teoretyczna. T. I i II. WNT, Warszawa 1973.

[8] Coulson C.A., Jeffrey A.: Fale. Modele matematyczne. WNT, Warszawa 1982.

[9] Czajkowski J.: Estymacja parametrów dynamicznych modeli maszyn elektrycznych. ZN AGH nr 111, Kraków 1979.

[10] Czajkowski J., Wołek M.: Miernictwo wielkości nieelektrycznych. AGH, Kraków 1981.

[11] Dambacher H.: Force measuring devices for the investigation of testing machines during static and dynamic loading. VD I - Berichte. Nr 212, 1974.

[12] Doebelin E.O.: Measurement systems. Mc Graw-Hill Book Company, 1976.

[13] Dripke M.: Przyczyna i wpływ dynamicznych błędów pomiaru w pomiarach siły i deformacji. Zwick-Werkstoff-Prüfmaschinen 1980.

[14] Dynamika maszyn. Modelowanie i analiza dynamiczna wirników. Modelowanie układów podlegających zderzeniom. Praca zbiorowa IPPT - PAN. Ossolineum 1979.

[15] Ecker W.: Verwirklichung von Sprung und Stossfunktion mit grossen Kraften zur Analyse Mechanische Systeme. Messen + Prüfen 1974. Nr 5.

[16] Ecker W., Zinecker R.: Anwendung der Schwingungs - eigenschaften mechanischer Systeme. Messen + Prüfen. 1982, Nr 3.

[17] Gryboś R.: Podłużne uderzenie masą w pręt lepkosprężysty półnieskończony. Rozpr. Inż. PAN. IPPT 1977.

[18] Gryboś R.: Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych. PWN, Warszawa 1969.

[19] Hagel R.: Miernictwo dynamiczne. WNT, Warszawa 1975.

[20] Hagel R., Zakrzewski J.: Miernictwo dynamiczne. (Przyjęto do druku). WNT, Warszawa.

[21] Hagel R., Pasecka O.: Miernictwo wielkości nieelektrycznych metodami elektrycznymi. Cz. II. Metody pomiarowe. Gliwice 1982.

[22] Kaliski S.: Drganie i fale. PWN, Warszawa 1966.

[23] Kaczmarek Z.: Wytwarzanie impulsu siły do wzorcowania dynamicznego przetworników sił i ciśnień. XIV MKM Częstochowa 1979.

[24] Kaczmarek Z.: Metody pomiaru siły, długotrwałości i częstotliwości uderzeń górniczych wiertarek obrotowych i obrotowo-udarowych. Cuprum 1979, Nr 1.

[25] Kaczmarek Z.: Wpływ efektu stykowego w elemencie sprężystym przetwornika na dokładność pomiaru krótkotrwałych impulsów siły. V KNT Instytut Lotnictwa, Warszawa 1981.

[26] Kilczewskij N.A.: Dinamiczeskoje kontaktnoje szatie twiordych tieł. UDAR Naukowa Dumka, Kijew 1976.

[27] Kisielew J.I. i in.: Issledowanije tienzoriezistorow pri udarnom rastjażenii w uprugoj obłasti. Izmier. Techn. 1980. Nr 7.

[28] Klepacki W.: Zagadnienie pomiaru drgań na przykładzie identyfikacji dynamicznej struktury samolotu. Miernictwo Dynamicznych Wielkości Mechanicznych. Instytut Lotnictwa, Warszawa 1982.

[29] Kohlhaas G. i in.: Dynamische Kalibrierung instrumentierter Pendelschlagwerke. Materialprüfung 1981, Nr 4.

[30] Kowalski K.: Pomiar energii uderzenia młotków i wiertarek udarowych. PAK 1981, Nr 1.

[31] Kučera J. i in.: Kalibrierung der Kraftmessers für eine 10-kJ Pendelschlaghamer. Materialprüfung 1981, Nr 6.

[32] Layer E.: Podstawy teorii wzorcowania systemów pomiarowych w aspekcie błędów dynamicznych. ZN AGH Nr 139, Kraków 1981.

[33] Loos H.R.: Messsystem zur Messung dynamischer Vorgänge, demonstriert an einem Modell - Verbrennungsmotor-Anwendungsbericht. ATM 1976 Heft 7/8.

[34] Metal A. i in.: Wstęp do teorii pomiarów dynamicznych. ZN Politechniki Szczecińskiej, Nr 48, Szczecin 1963.

[35] Miernictwo dynamiczne wielkości mechanicznych. V Konferencja Naukowo Techniczna w Instytucie Lotnictwa. Część I i II. Instytut Lotnictwa, Warszawa 1981.

[36] Morecki A.: Miernictwo mechanicznych parametrów maszyn metodami elektrycznymi. PWN, Warszawa 1972.

[37] Morecki A., Nazarczuk K.: Zarys miernictwa dynamicznego wielkości mechanicznych. WPW, Warszawa 1981.

[38] Mordziński K.: Metoda badania i oceny błędów wskazań układów wytwarzających siły zmienne. Praca doktorska. PKNMiJ. Warszawa 1979.

[39] MTS Systems Corporation. Minneapolis Minnesota, USA 1980.

[40] Müller L.: Pomiary drgań i hałasów maszyn. Gliwice 1971.

[41] Nieganow A.S. i in.: Elektronnyj impulsomier siły EIS-4. Izmier. Techn. 1976, Nr 12.

[42] Olesen H.P., Rendal R.B.: A guide to mechanical impedance and structural response techniques. Brüel and Kjaer. Application notes. 1979, Nr 17 - 179.

[43] Olesen i in.: Strukturresonanzen - Mechanische Impedanz - Komplexer Elastizitätsmodul. Messen + Prüfen 1980. Nr 1/2.

[44] Osiński Z.: Tłumienie drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1979.

[45] Parchański J.: Wzorcowanie dynamiczne przetworników pomiarowych wielkości mechanicznych. Sympozjum nt. Problemy miernictwa dynamicznego. IMEiE + Energopomiar, Gliwice 1974.

[46] Parchański J., Rojek W.: Sposób określenia stopnia zagrożenia tąpaniami w górotworze naruszonym eksploatacją. Patent Nr 97801 z dnia 13.12.1975 r.

[47] Parchański J., Leks J.: Wielostopniowy przetwornik siły. Patent Nr 111446 z dnia 18.11.1976 r.

[48] Parchański J.: Sposób eliminacji fal odbitych w elemencie sprężystym czujnika do pomiaru sił szybkozmiennych. Patent Nr 118428 z dnia 22. 12.1978 r.

[49] Parchański J.: Układ elektryczny wagi elektromechanicznej z tensometrycznymi przetwornikami nacisku. Patent Nr 120765 z dnia 25.03. 1978 r.

[50] Parchański J.: Pomiary sił szybkozmiennych. VI Krajowa Konferencja Metrologii i Budowy Aparatury Pomiarowej nt. Metrologia - czynnik postępu w nauce i technice. Prace Naukowe IME Politechnika Wrocławska Nr 19, Wrocław 1979.

[51] Parchański J.: Dokładność badań za pomocą wzorcowych impulsów siły. ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 71, Gliwice 1981.

[52] Parchański J.: Błąd Dynamiczny przy pomiarach skoku siły. ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 71, Gliwice 1981.

[53] Parchański J.: Błąd dynamiczny przy pomiarach siły harmonicznej. ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 71, Gliwice 1981.

[54] Parchański J.: Dokładność pomiarów wybranych wielkości mechanicznych dynamicznych. III Konf. Nauk. Techn. nt. Metody pomiarowe w technice lotniczej. ITWL, Warszawa 1981.

[55] Parchański J.: Wpływ zjawiska falowego na dokładność wzorcowania dynamicznego przetworników siły. Sympozjum Metrologia 80. Centrum U-P M i SP Politechnika Warszawska, Warszawa 1981.

[56] Parchański J.: Wpływ zjawiska falowego na dokładność pomiarów siły dynamicznej. XV MKM-81, Warszawa 1981.

[57] Piełliniec W.S. i in.: Gosudarstwiennyj specjalnyj etałon jedinicy uskorienija pri udarnom dwiżenii. Izmier. Techn. 1975, Nr 8.

[58] Polska Norma PN/T-01009. Słownictwo telekomunikacyjne, elektroakustyka. Nazwy i określenia. PKN, Warszawa 1969.

[59] Rohrbach Ch.: Handbuch für elektrische Messen mechanischer Grössen. VDI Verlag. Düsseldorf, 1967.

[60] Romer E.: Miernictwo przemysłowe. PWN, Warszawa 1978.

[61] Solecki R., Szymkiewicz J.: Układy prętowe powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne. B.Sz.A. Arkady, Warszawa 1964.

[62] Sowremiennaja apparatura dla izmierienija paramietrow udara. Obzornaja informacija. GKSSM SSSR, Moskwa 1973.

[63] Stein P.K.: A new conceptual and mathematical transducer modell application to impedance - based transducer such as strain gages. VDI Berichte. 1972, Nr 176.

[64] Świętoniowski A.: Zjawiska dynamiczne w konwencjonalnych klatkach walcowniczych. Praca doktorska AGH, Kraków 1977.

[65] Woschni E.G.: Messdynamik. S. Hirzel Verlag Leipzig 1972.

[66] Woschni E.G.: Relations between the different definitions of dynamic errors in measurements and results for practical application. VIII IMECO Congress. Moscow 1979.

[67] Żuchowski A.: Technika pomiarów dynamicznych. Politechnika Szczecińska, Szczecin 1974.

[68] Żuchowski A.: Uproszczone modele dynamiki liniowej aparatury pomiarowej. Sympozjum nt. Metrologia wielkości mechanicznych. Warszawa 1976.

[69] Żuchowski A.: O dynamicznych właściwościach elektromechanicznych przyrządów pomiarowych. PAK 1977, Nr 11.

POMIAR SIŁY ZMIENNEJ W CZASIE

S t r e s z c z e n i e

Przeanalizowano zagadnienie dokładności pomiaru siły wolnozmiennej, stosując elementarną teorię, przy której zakłada się, że masa, sztywność i tłumienie są przestrzennie skupione, a matematyczny opis jest równaniem różniczkowym zwyczajnym o stałych współczynnikach. Głównym zagadnieniem pracy jest analiza zjawisk falowych występujących w układach mechanicznych przy pomiarach siły o dużej częstotliwości zmian. Sformułowano kryteria, których spełnienie zapewni mierzenie siły ze znaną dokładnością. Podano warunki fizyczne wzorcowania przetworników siły zmiennej w czasie. Wprowadzono kryterium mechanicznego dopasowania falowego i wykorzystano je do sformułowania wymagań do konstrukcji niezniekształcającego przetwornika siły, do minimalizacji błędu sprzężenia przetwornika siły z badanym obiektem fizycznym i do wzorcowania przetworników siły zmiennej. Do rozwiązania takiego zadania pomiarowego przyjęto wierniejszy model zjawisk fizycznych, który uwzględnia zjawiska falowe w materiałach konstrukcyjnych układu mechanicznego i ich właściwości przestrzenne (np. ciągły rozkład masy, sztywności i tłumienia oraz warunki początkowe i brzegowe). Odpowiednim zapisem matematycznym tego modelu jest w tym przypadku równanie różniczkowe cząstkowe. Wybrane zjawiska badano doświadczalnie na fizycznych modelach, uzyskując potwierdzenie zgodności z przewidywaniami teoretycznymi.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ

Р е з ю м е

В статье рассматриваются вопросы точности измерения медленно переменной
силы, принимая элементарную теорию. При этом принимается, что масса, жёст-
кость и тушение пространственно сосредоточены, а математическое описание,
является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициен-
тами. Главной проблемой работы, является анализ волновых явлений, выступаю-
щих в механических системах во время измерения силы с большой частотой из-
менений. Формулируются критерия, выполнение которых обеспечит измерение си-
лы о известной точностью. Даются физические условия калибровки преобразова-
телей переменной силы, во времени. Вводится критерий механического волнового
подбора и его использование для формулировки требований по отношению к кон-
струкции не искажающего преобразователя силы, к минимализации погрешности
оцепления преобразователя силы с исследуемым физическим объектом и для ка-
либровки преобразователей переменной силы. Для решения такой измерительной
задачи применяется точную модель физических явлений, которая учитывает вол-
новое явление в конструкционных материалах механической системы и его про-
странственные свойства (напр. непрерывное разложение массы, жёсткость и ту-
шение, а также начальные и краевые условия). Соответствующей математической
записью этой модели, является в этом случае дифференциальное частичное урав-
нение. Избранные явления были исследованы опытным путём на физических моде-
лях и получили подтвержение сходимости с теорией.

THE TIME MEASUREMENTS OF THE VARIABLE FORCE

S u m m a r y

The measurements accuracy of the slow-variable force has been analysed by elementary theory. This theory establishes that mass, rigidity and damping are spatialy concentrated and mathematical discription is on ordinary differential equation with stable coefficients. The main problem of this work is an analysis of wave phenomena in mechanical systems where force at the high frequency is measured. The criteria which secure the measurement of the force with known precision have been formulated. The physical conditions of transducers calibration of the force variable in time are given. Mechanical impedance matching criterion has been introduced. This criterion has been utilized to formulate the requirements for the proper construction of the undistorting force transducer. This criterion has been used to minimize the error of coupling force transducer with physical object under test end also to variable force transducers calibration. In order to solve such measurement task, more faithful model of physical phenomena has been introduced. In this model the wave phenomena in constructional materials of mechanical system and their spatial properties (e.g. continuous distribution of mass, rigidity, damping, initial and boundary conditions) are considered. A partial differential equation has proved to be the right mathematical description of this model. Some of the phenomena have been examined by using physical models. Theoretical predictions have been confirmed by the results.

Cena zł 78,-