

Zygmunt KLESZCZEWSKI, Andrzej KLIMASEK

WYKORZYSTANIE METODY REZONANSOWEJ WYZNACZANIA STAŁYCH SPRĘŻYSTYCH DO MATERIAŁÓW O STRUKTURZE ROMBOWEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób postępowania przy wyznaczaniu kompletu stałych sprężystych materiału o symetrii rombowej metodą rezonansową. Metoda rezonansowa została zastosowana dla cienkich płytek kołowych o swobodnym brzegu, podpartych w czterech punktach na przecięciu linii węzłowych pierwszego i drugiego rezonansu.

W opisanym układzie pomiarowym próbka wykonuje drgania giętne pobudzana metodą elektrostatyczną.

W pracy podane są również równania określające częstotliwości drgań dla anizotropowych płytek kołowych o różnej orientacji krystalograficznej.

Zaproponowany sposób postępowania został zweryfikowany doświadczalnie przy wykorzystaniu do badań monokryształów $\text{NaKCl}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot \text{H}_2\text{O}$.

APPLICATION OF RESONANCE METHOD FOR DETERMINATION OF ELASTIC CONSTANTS OF ORTHORHOMBIC STRUCTURE

Summary. The resonance method for determination of elastic constant set of rhombohedral crystals is presented. The resonance method has been applied to thin, circular plates with free edge, supported in four crossing points of nodal lines of the first and the second resonance. In described system the sample performs flexural vibrations and is excited by electrostatic method.

In the paper expressions for vibration frequencies of anisotropic angular plates with different crystallographic orientations are given.

The proposed method has been verified experimentally for $\text{NaKCl}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot \text{H}_2\text{O}$ mono-crystals.

1. Wstęp

Metody rezonansowe polegają na wyznaczaniu częstotliwości rezonansowych drgań odpowiednio wyciętych i zorientowanych próbek krystalicznych o różnym kształcie (pręty, płytki kołowe itd.). Wybrane elementy mogą być pobudzane tak, aby wywołać w nich różne typy drgań (np. drgania podłużne, poprzeczne skrętne, giętne itd.).

Metoda ta uwarunkowana jest tym, że częstotliwości rezonansowe zależą od wymiarów geometrycznych próbek, gęstości materiału i stałych sprężystych.

W przedstawianej pracy wykorzystuje się metodę rezonansową dla próbek w kształcie płytek kołowych o swobodnym brzegu, podpartych w czterech punktach na przecięciu się linii węzłowych pierwszego i drugiego rezonansu.

2. Podstawy teoretyczne metody

Zasadniczym celem jest określenie częstotliwości drgań rezonansowych cienkiej anizotropowej płyty kołowej o swobodnym brzegu. Zagadnienie sprowadza się do rozwiązania przy odpowiednich warunkach brzegowych równania [1,2]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho h \omega^2 w = 0, \quad (1)$$

gdzie: $w = w(x, y)$ – funkcja ugięcia płyty,

ω – częstotliwość kołowa,

h – grubość płytki kołowej,

ρ – gęstość materiału płyty.

Współczynniki sprężystości występujące w D_{ij} , w przypadku gdy kierunki główne sprężystości nie pokrywają się z osiami układu współrzędnych związanymi z płytą, są funkcjami kątów pomiędzy tym układem a kierunkami głównymi.

Pod względem sprężystym ciało stałe wygodnie jest czasami opisać tzw. technicznymi stałymi sprężystymi.

W przypadku struktury rombowej (w przypadku płytek kołowych cienkich używa się czasami określenia symetria ortorombowa) występuje 9 niezależnych stałych E_1, E_2, E_3 (moduły Younga), ν_1, ν_2, ν_3 (stałe Poissona), G_{12}, G_{13}, G_{23} (moduły sztywności). Taka liczba technicznych stałych sprężystych powoduje, że równanie drgań giętych płyty o swobodnym brzegu przyjmuje postać:

$$D'_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D'_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho h \omega^2 w = 0, \quad (2)$$

Równanie to można stosować, gdy kierunki główne sprężystości pokrywają się z układem współrzędnych (x', y', z') związanym z orientacją próbki [3].

W pracy [3] wykazano, że równanie (2) można stosować, gdy płaszczyzna środkowa płyty jest równoległa do krystalograficznych płaszczyzn (100), (010), (001) i (110). W innych przypadkach zmieniają się współczynniki D'_j w równaniu drgań.

Sposób rozwiązania równania (2) jest przedstawiony również w pracy [3]. Przyjmuje się, że znane są wartości własne i odpowiadające im funkcje własne dla płytek kołowych izotropowych o swobodnym brzegu w przedziale $(0, R)$, $(0, 2\pi)$ [1, 2].

Otrzymuje się następujące wyrażenia dla częstotliwości kołowej płytek o różnej orientacji:

$$\begin{aligned}\omega_{001}^2 &= a_1 \frac{h^2}{R^4} E_1 + b_1 \frac{h^2}{R^4} G_{12} + c_1 \frac{h^2}{R^4} E_2, \\ \omega_{100}^2 &= a_2 \frac{h^2}{R^4} E_2 + b_2 \frac{h^2}{R^4} G_{23} + c_2 \frac{h^2}{R^4} E_3, \\ \omega_{010}^2 &= a_3 \frac{h^2}{R^4} E_3 + b_3 \frac{h^2}{R^4} G_{13} + c_3 \frac{h^2}{R^4} E_1.\end{aligned}\quad (3)$$

gdzie:

R – promień płytki,

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 \nu_2}{12\rho(1 - \nu_1 \nu_2)}, & b_1 &= \frac{\beta_1}{6\rho}, & c_1 &= \frac{\gamma_1 - \beta_1 - \alpha_1}{12\rho(1 - \nu_1 \nu_2)}; \\ a_2 &= \frac{\alpha_2 + \beta_2 \nu_3}{12\rho(1 - \nu_2 \nu_3)}, & b_2 &= \frac{\beta_2}{6\rho}, & c_2 &= \frac{\gamma_2 - \beta_2 - \alpha_2}{12\rho(1 - \nu_2 \nu_3)}, \\ a_3 &= \frac{\alpha_3 + \beta_3 \nu_1}{12\rho(1 - \nu_1 \nu_3)}, & b_3 &= \frac{\beta_3}{6\rho}, & c_3 &= \frac{\gamma_3 - \beta_3 - \alpha_3}{12\rho(1 - \nu_1 \nu_3)}, \\ \gamma_1 &= 16[x_1(\nu_1)]^4, & \gamma_2 &= 16[x_1(\nu_2)]^4, & \gamma_3 &= 16[x_1(\nu_3)]^4,\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\int_0^{2\pi R} \int_0^{2\pi R} w_0 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} dx dy}{\int_0^{2\pi R} \int_0^{2\pi R} w_0^2 dx dy}, \quad \beta = \frac{\int_0^{2\pi R} \int_0^{2\pi R} w_0 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy}{\int_0^{2\pi R} \int_0^{2\pi R} w_0^2 dx dy},$$

x_1 – współczynnik zależny od numeru rezonansu i stałej Poissona ν ,

w_0 – funkcja ugięcia płyty izotropowej.

Powyższe całki zależą od stałych Poissona. Wartości tych całek podaje tablica I. Podobne równanie jak w (3) można zapisać dla orientacji płyty [110].

Tablica I

Wartości całek występujących we wzorze (3)

Stała Poissona ν	$\frac{R^2}{\pi} \iint w_0 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy$	$\frac{A}{\pi R^2} \iint w_0^2 dx dy$	$\frac{R^2}{\pi} \iint \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} dx dy$
0,00	0,549	0,116	1,648
0,05	0,537	0,118	1,610
0,10	0,522	0,119	1,566
0,15	0,505	0,120	1,515
0,20	0,486	0,122	1,457
0,25	0,464	0,122	1,392
0,30	0,440	0,123	1,320
0,35	0,414	0,123	1,241
0,40	0,385	0,122	1,155
0,45	0,354	0,121	1,062
0,50	0,321	0,119	0,963

3. Wyznaczenie stałej Poissona

Zakładamy, że dla płyty kołowej anizotropowej o swobodnym brzegu linie węzłowe pierwszego i drugiego rezonansu tworzą odpowiednio krzyż i koło, tak samo jak dla płyty izotropowej o swobodnym brzegu.

Takie założenie pozwala w bardzo prosty sposób wyznaczyć stałą Poissona dla dowolnie zorientowanej płytki kołowej, ponieważ stosunek częstotliwości dwu pierwszych rezonansów wyraża się przez współczynniki określone dla tych rezonansów. Mianowicie:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}, \quad (4)$$

f_2, f_1 – częstotliwości rezonansowe odpowiednio drugiego i pierwszego rezonansu.

Współczynniki x_1^2 i x_2^2 zależą od stałej Poissona. Takie założenie wydaje się możliwe, ponieważ stała Poissona zmienia się jedynie w przedziale od 0 do 0,5.

Tablica II zawiera wartości współczynników x_n^2 dla pierwszego i drugiego rezonansu oraz stosunek $\frac{x_2^2}{x_1^2}$. Na podstawie danych w tej tablicy określamy stałą Poissona.

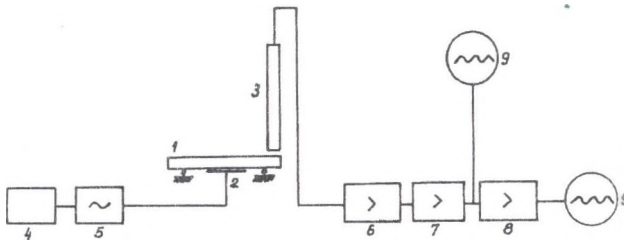
Tablica II

Wartości współczynników x_n^2 dla wybranych stałych Poissona
dwa pierwszych rezonansów

Stała Poissona	x_1^2	x_2^2	$\frac{x_2^2}{x_1^2}$
0,0	1,53826	2,0610	1,3398
0,1	1,47967	2,1313	1,4404
0,2	1,41378	2,1929	1,5511
0,25	1,37780	2,2225	1,6131
0,33	1,31278	2,2690	1,7284
0,4	1,25569	2,3041	1,8349
0,5	1,16009	2,3534	2,0286

4. Weryfikacja doświadczalna przedstawionej metody [4,5,6]

Pomiarów pierwszej i drugiej częstotliwości rezonansowej dokonuje się, stosując układ pomiarowy przedstawiony na rys.1.



Rys.1. Schemat układu pomiarowego: 1 - próbka kołowa, 2 - elektroda pobudzająca, 3 - czujnik pojemnościowy, 4 - częstotściomierz, 5 - generator sinusoidalny, 6, 7 - wzmacniacze, 8 - wzmacniacz selektywny, 9 - oscyloskop

Fig.1. Block scheme of measuring system: 1 - circular sample, 2 - excitation electrode, 3 - capacitance sensor, 4 - frequency meter, 5 - a.c. generator, 6, 7 - amplifiers, 8 - selective amplifier, 9 - oscilloscope

Płytką (1) podparta jest na czterech ostrzach na przecięciu linii węzłowych pierwszego i drugiego rezonansu. Drgania płyty wzbudzone są metodą pojemnościową za pomocą elektrody (2). Rejestracja drgań odbywa się za pomocą czujnika pojemnościowego (3). Rejestruje się częstotliwości pierwszego i drugiego rezonansu.

5. Otrzymane rezultaty dla monokryształów $\text{NaKCl}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$

Obliczenie modułów sprężystości c_{ij} odbywa się dla badanych monokryształów numerycznie na podstawie równań (3) po odczytaniu z tablic I i II wszystkich potrzebnych wielkości i parametrów, tzn. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Dodatkowo wykorzystuje się warunek słuszny wg Hubera [1] dla płyt cienkich;

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} = \frac{1}{E_3}.$$

Moduły sprężystości c_{ij} wyrażają się przez techniczne stałe sprężyste. Otrzymane rezultaty obliczeń przedstawia tablica III.

Tablica III

Stale sprężyste wyliczone na podstawie pomiarów częstotliwości rezonansowych dla monokryształów $\text{NaKCl}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$

$\rho^a)$	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{22}	c_{23}	c_{33}	c_{44}	c_{55}	c_{66}
1,775	4,230	2,915	3,499	5,009	3,400	6,089	1,19	0,29	9,985

a) w jednostkach $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,

stałe c_{ij} w jednostkach $10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

6. Wnioski

Zaproponowana metoda jest metodą nieniszczącą. Używano próbek kołowych o średnicy 35-40 mm. Wiele monokryształów rośnie w postaci prętów o przekroju kołowym. Nad innymi metodami [7,8,9] nieniszczącymi posiada tylko jedną przewagę, mianowicie jest to stosowanie bardzo prostego układu pomiarowego i prosty pomiar częstotliwości. Dla płytek niemetalowych wymaga metalizacji powierzchni. Błąd pomiarowy jest porównywalny z błędami innych metod.

Literatura

1. Huber M.T: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1954.
2. Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
3. Klimasek A.: Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1983.
4. Ryll-Nardzewski J.: Praca doktorska, Prace IPPT PAN Warszawa 44, 1973.
5. Opilski A., Klimasek A., Zabawa J.: Archiwum Akustyki, 10, 2, 1975.
6. Opilski A., Klimasek A., Zabawa J., Raułuszkiewicz J., Szrejber S., Bagiński H.:
J. of Techn. Phys., 18, 231, 1971
7. Kleszczewski Z.: Postępy Fizyki, 29, 209, 1978.
8. Hearmon R. F. S.: Uvod do Teorie Pruznosti Anizotropnich Late, SNLT, Praha, 1965.
9. Papadakis E. P.: J. of Appl. Phys., 35, 1474, 1965.

Recenzent: Prof. dr hab. Mikołaj Łabowski

Abstract

In resonance methods the resonance frequencies of vibrations of properly cut and oriented single crystal samples of different shapes (rods, circular plates, etc.) are determined. The chosen elements can be such excited to generate different types of vibrations within them (e.g. flexural, transversal or longitudinal). This method is conditioned by the dependence of the resonance frequency on the geometrical dimensions of the sample, material density and elastic constants.

In the presented work the resonance method was used for the samples of the circular shape with a free boundary and excited to flexural vibrations. The theoretical model of the method was discussed. The theoretical solution of the problem was compared the with experimental data.