

Eugeniusz SOCZKIEWICZ

FRAKTALE W PROCESACH FALOWYCH I W NIEINWAZYJNYCH BADANIACH MATERIAŁÓW

Streszczenie. Rozpatrzono wpływ fraktalnej struktury na własności sprężyste materiałów fraktalnych, gęstość rozkładu zlokalizowanych drgań, tzw. fraktonów, oraz ich wpływ na przewodnictwo cieplne ośrodka. Opisano zastosowanie geometrii fraktalnej w badaniach nieniszczących oraz w badaniach ultradźwiękowych materiałów polikryształicznych. Scharakteryzowano emisję i rozpraszanie fal przez struktury fraktalne oraz fraktalne własności pól falowych.

FRACTALS IN WAVE PROCESSES AND IN NONDESTRUCTIVE TESTING OF MATERIALS

Summary. Elastic properties of fractal materials as well as the dispersion and density of distribution of localized elastic vibrations, so called fractons, have been considered. Nonlinear interactions of phonons and fractons influences heat conduction of amorphous materials. Application of fractal geometry in nondestructive testing and evaluation of materials and in ultrasonic studies of polycrystalline materials have been described. Emission and scattering of waves by fractal structures as well as description of fractal properties of wave fields have been presented.

1. Wstęp

Postęp w fizyce i jej zastosowaniach uwarunkowany był w dużym stopniu przez rozwój fizyki statystycznej. Wprowadzona przez Benoit B. Mandelbrota koncepcja fraktali [1,2,3] otworzyła nową drogę opisu nieuporządkowanych struktur materii i procesów. Fraktalne formy dostępne potocznej obserwacji są w przyrodzie bardzo rozpowszechnione: linia brzegowa, góry, drzewa, zafalowana powierzchnia morza, powierzchnia pęknięcia metalu, wykresy różnych procesów fizycznych, trajektorie ruchów cząstek, agregacje cząstek, polimery, roztwory koloidów itd. Bez większej przesady można powiedzieć, że jeśli substancja nie jest w stanie krystalicznym lub gazowym, to posiada w pewnym zakresie rozmiarów strukturę

fraktalną. Fraktale mogą być deterministyczne, powstałe w wyniku operacji iteracji [4], jak np. zbiór Cantora, trójkąt i dywan Sierpińskiego, krzywa Kocha, oraz stochastyczne, np. agregacje powstałe w wyniku dyfuzji. Podstawową charakterystyką fraktala jest jego wymiar. Rozróżnia się przy tym kilka różnie zdefiniowanych wymiarów:

- a) wymiar euklidesowy: jeśli określimy przestrzeń euklidesową R^n , to wymiar euklidesowy obiektu jest wymiarem przestrzeni, w której obiekt jest zanurzony $d_E = \dim R^n = n$;
- b) wymiar topologiczny: d_T określa się jako najmniejszą liczbę n dowolnie małych podzbiorów pokrywających dany obiekt, tak że dowolny punkt należy najwyżej do $n+1$ podzbiorów [5];

- c) wymiar Hausdorffa-Besicovitcha d_F [6] zbioru F : definiuje się pokrycie B zbioru F jako rodzinę kul, których suma zawiera w sobie zbiór F , następnie oznacza $diam A$ jako średnicę kuli A należącej do zbioru B oraz definiuje się średnicę pokrycia zbioru F jako średnicę największej kuli występującej w B . Określamy kres dolny wyrażenia $\alpha(d, \epsilon)$, wybrany ze wszystkich możliwych pokryć B o średnicach nie większych od ϵ , gdzie:

$$(d, \epsilon) = \inf_B \sum_{A \in B} (diam A)^d, \quad \alpha(d) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(d, \epsilon). \quad \text{Wymiarem Hausdorffa-Besicovitcha}$$

zbioru F jest liczba $d = d_F$, dla której $0 < \alpha(d_F) < \infty$;

- d) dla fraktali samopodobnych określa się wymiar samopodobieństwa [5]:

$$d_s = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad \text{gdzie } M(\epsilon) \text{ oznacza liczbę } n\text{-wymiarowych w sensie euklidesowym}$$

kostek o boku ϵ potrzebnych do pokrycia danego fraktala. Mandelbrot zdefiniował fraktal jako obiekt, którego wymiar Hausdorffa-Besicovitcha jest większy od wymiaru topologicznego. Między poszczególnymi wymiarami zachodzą relacje: $d_T < d_F \leq d_E$.

Fraktalna struktura ośrodka przejawia się w przestrzennym rozkładzie masy ośrodka; dana jest ona wzorem [7]:

$$M = m_o (R / a_o)^D \quad (1)$$

gdzie M - masa agregatu, R - jego rozmiar, D - masowy wymiar fraktalny, m_o , a_o - masa i rozmiar cząstek tworzących agregat. Ze wzoru (1) wynika zależność gęstości ośrodka od jego rozmiarów:

$$\rho = \rho_o (R / a_o)^{D-d} \quad (2)$$

gdzie d - oznacza wymiar euklidesowy przestrzeni. Mimo nieregularnej struktury ośrodka istnieją korelacje dalekich położenia cząstek ośrodka. W praktycznych pomiarach wymiaru fraktalnego korzystanie z definicji Hausdorffa-Besicovitcha byłoby niewygodne, wyznacza

się więc go z nachylenia wykresu np. $\log \rho$ od $\log \epsilon$. Funkcja korelacji gęstości: $C(R) \ll \langle \rho(r+R)\rho(r) \rangle$ dla materiałów fraktalnych spełnia proporcję: $C(R) \propto R^{D-4}$ [7]. Podstawową metodą wyznaczania funkcji korelacji gęstości jest badanie kątowej zależności natężenia rozpraszanego promienia, np. rentgenowskiego, od długości fali: $I(q) \propto q^{-D}$, gdzie: $q = 2k \sin(\theta/2)$, k oznacza liczbę falową, zaś θ kąt rozpraszania.

2. Własności sprężyste fraktali

Własności sprężyste fraktali zależą od skali deformacji. Jeśli $E(l)$ oznacza moduł sprężystości fraktala o rozmiarze l , to z własności samopodobieństwa [7]:

$$\frac{E(l)}{E(l')} = f(l/l'), \text{ podobnie: } \frac{E(l')}{E(l'')} = f(l'/l''), \text{ z czego widać, że funkcja } f \text{ winna spełniać}$$

równanie funkcyjne: $f(xy) = f(x)f(y)$, którego rozwiązaniem jest: $f(x) = x^{-\xi}$. Dla modułu sprężystości otrzymuje się więc: $E(\lambda l) = \lambda^{-\xi} E(l)$, gdzie ξ jest tzw. geometrycznym wykładnikiem sprężystości, a λ określa skalę deformacji. Ze wzoru $\rho = \rho_o (r/r_o)^{D-3}$ wynika następujące wyrażenie na zależność modułu sprężystości od gęstości:

$$E(\rho) = E_o (\rho / \rho_o)^{-\xi/(D-3)} = E_o (\rho / \rho_o)^\beta \quad (3)$$

gdzie $\beta = \frac{\xi}{D-3}$.

3. Fale i drgania w strukturach fraktalnych

Ze wzoru (3) otrzymujemy wykładniczą zależność prędkości dźwięku od gęstości w aerożelu:

$$\alpha(\rho) \propto (E(\rho) / \rho)^{1/2} \propto \rho^{(\beta/2)-1} \quad (4)$$

Orbach et al. [7, 8, 9] wyliczyli gęstość rozkładu modów drgań w strukturach fraktalnych, otrzymując wyrażenie:

$$\chi(\omega) \propto \omega^{2D/(2+\theta)-1} \quad (5)$$

gdzie: D oznacza wymiar fraktalny, zaś θ - tzw. wykładnik anomalnej dyfuzji występujący we wzorze: $\langle r^2(t) \rangle \propto t^{2/(2+\theta)}$, ω oznacza częstotliwość drgań. W realnych materiałach istnieje

maksymalny rozmiar ζ ograniczający obszar fraktalny. W obszarach o rozmiarach większych od ζ , tj. w zakresie niskich częstotliwości, nie przekraczających częstotliwości tzw. cross-overu $\omega_c(\zeta)$, występuje fononowy charakter drgań, zaś powyżej częstotliwości $\omega_c(\zeta)$ fraktonowy. Alexander i Orbach [7, 8, 9] uzyskali wyrażenia na gęstości stanów fononowych i fraktonowych w jednostce objętości:

$$v_{ph} = N_F d \frac{\omega^{d-1}}{\omega_c^d} \quad (6)$$

$$n_{fr}(\omega) = N_F d_f N_{at} \frac{\omega^{d_f-1}}{\omega_d^{d_f}} = N_F d_f \frac{\omega^{d_f-1}}{\omega_c^{d_f}} \quad (7)$$

gdzie $N_F = (l/\zeta)^d$ jest liczbą fraktalnych fragmentów w jednostce objętości, uczestniczących w drganiach fononowego widma jak sztywne cząsteczki. $N_{at} = (\zeta/a)^D$ - jest liczbą cząstek o rozmiarach a we fraktalnym fragmencie o rozmiarze ζ , zaś

$$d_f = \frac{2D}{2+\theta} \quad (8)$$

oznacza tzw. wymiar fraktonowy, natomiast $\omega_d = (\zeta/a)^{D/d_f} \omega_c$ jest fraktonową częstotliwością Debye'a. Ponieważ $d > d_f$, więc $v_{ph} > N_F d > v_{fr} = N_F d_f$, co prowadzi do wystąpienia pików dla $\omega = \omega_c$ na wykresie zależności gęstości stanów od częstotliwości przy przejściu od fononowej do fraktonowej części widma drgań [7].

Podobnie jak moduł Yunga, również moduł sztywności fraktalnego klasteru zależy od jego rozmiaru l i zmienia się przy zmianie rozmiaru λ razy zgodnie ze wzorem:

$$K(\lambda l) = \lambda^{-\xi_E} K(l) \quad (9)$$

Wykładniki sztywności ξ_E oraz sprężystości ξ mogą się różnić od siebie nawet w przypadku fraktali o tym samym wymiarze fraktalnym [7], gdyż zależą one od konkretnej struktury fraktala i charakteru sił działających pomiędzy jego elementami. Masa fraktalnego klasteru przy zmianie jego rozmiaru λ razy zmienia się według relacji: $M(\lambda l) = \lambda^D M(l)$, więc dla zależności częstotliwości od rozmiarów otrzymujemy wzór: $\omega(\lambda l) = \lambda^{-(\xi_E + D)/2} \omega(l)$. Prawo dyspersji drgań ma więc postać: $\omega(k) \propto k^{(\xi_E + D)/2}$, $k \propto 1/l$, co odróżnia drgania fraktali od drgań ośrodków ciągłych, dla których $\omega(k) \propto k$. Wiadomo, że gęstość rozkładu modów fononowych według częstotliwości, poniżej częstotliwości Debye'a, związana jest z euklidesowym wymiarem przestrzeni d : $v_{ph} \propto \omega^{d-1}$. W przypadku fraktali jest inaczej. Niech

$N(\omega)$ oznacza liczbę modów drgań o częstotliwościach mniejszych od ω . Fragmenty fraktali uczestniczących w takich drganiach i nie deformujących się będą miały rozmiary $l \propto \omega^{-2/(\xi_E + D)}$. Liczba modów takich drgań jest równa liczbie takich fragmentów we fraktalu $N_F \propto l^{-D}$, więc:

$$N(\omega) \propto \omega^{2D/(\xi_E + D)} \quad (10)$$

a gęstość stanów:

$$\nu(\omega) \propto \omega^{2D/(\xi_E + D) - 1} = \omega^{d_f - 1} \quad (11)$$

gdzie: $d_f = 2D / (\xi_E + D)$ jest fraktonowym wymiarem spektralnym. Jeśli $d_f < 1$, to gęstość stanów jest rozbieżna dla małych częstotliwości. Gdy klaster jest dostatecznie duży, częstotliwość niskich modów drgań jest mała i klaster jest niestabilny przy termicznych fluktuacjach. Fraktonowe stany drgań są zlokalizowane, co stanowi odpowiednik lokalizacji fal w ośrodkach silnie niejednorodnych. Lokalizację fal charakteryzują: długość fali, droga swobodna fali przy rozpraszaniu na niejednorodnościach oraz długość, na której zachodzi lokalizacja. Autorzy, np. Alexander [7], przyjmują następujący kształt funkcji falowej:

$$|\Psi(r)| \propto l^{-D/2} \exp[-(r/l)^{d_s}] \quad (12)$$

gdzie: l - długość lokalizacji, $l \propto \omega^{-d_f/D}$, zaś $d_s = 2D / d_f$.

4. Zastosowania analizy fraktalnej w nieinwazyjnym badaniu materiałów

Analiza fraktalna okazała się pożyteczna do opisu materiałów podlegających różnym procesom, np. korozji, zmęczeniu itd. [10]. Jin oraz Chiang [10] wykazali, że skorodowanej powierzchni metalu można przypisać wymiar fraktalny i że wymiar ten wzrasta wraz ze stopniem zniszczenia materiału. Wymiar fraktalny autorzy ci wyznacali dwiema metodami: tzw. metodą pokryciową korzystając z zależności: $N(r) \propto r^{-D}$, gdzie $N(r)$ oznacza liczbę kwadratowych klatek sieci o bokach r , zawierających ślady korozji powierzchni, oraz metodą zależności kątowej natężenia koherentnego światła rozproszonego przez badaną powierzchnię materiału: $I(q) \propto q^{-D}$, gdzie: $q = 2k \sin(\theta / 2)$, k oznacza liczbę falową, zaś θ kąt rozpraszania.

W pracy [11] zastosowano analizę fraktalną do charakterystyki fal ultradźwiękowych rozpraszanych przez materiały polikrystaliczne. Dutta et al. w pracy tej wyznaczyli wymiar fraktalny impulsów ultradźwiękowych rozpraszanych przez płytki aluminiowe i mosiężne stwierdzając, że wymiar fraktalny rozpraszanych impulsów ultradźwiękowych przez polikrystaliczne stopy różnych metali jest różny od wymiaru fraktalnego impulsów ultradźwiękowych rozpraszanych przez polikrystaliczne materiały jednoskładnikowe.

5. Zakończenie

Pierwsze badania fraktonowej części widma drgań w materiałach amorficznych i polimerach prowadzone przez Orbacha et al. [9] związane były z analizą danych dotyczących temperaturowej zależności ciepła właściwego i przewodnictwa cieplnego materiałów niejednorodnych (w zakresie 1-100 K oraz przy częstotliwościach $0^9 - 10^{12} Hz$). Przewodnictwo cieplne uwarunkowane jest strumieniem fononów, ciepłem właściwym gazu fononowego i drogą swobodną fononów, która ograniczona jest nieliniowym oddziaływaniem fononów. W ośrodkach niejednorodnych przebieg zależności temperaturowej przewodnictwa cieplnego uwarunkowany jest powstawaniem zlokalizowanych stanów fraktonowych i oddziaływaniem fononów z fraktonami. W przybliżeniu kwadratowym możliwe są dwa rodzaje procesów: z udziałem dwóch fononów i jednego fraktonu oraz procesy z udziałem dwóch fraktonów i fononu. Procesy te ograniczają drogę swobodną fononów, a drugi z nich powoduje wzrost przewodnictwa cieplnego dla temperatur wyższych od temperatur, dla których wykres zależności przewodnictwa cieplnego od temperatury posiada plateau. Wzrost ten spowodowany jest dyfuzją energii poprzez różne stany zlokalizowane. Przejście od fononowego widma drgań do fraktonowego daje się badać przez mierzenie częstotliwościowej zależności tłumienia fal ultradźwiękowych w materiałach niejednorodnych, np. spiekanych proszkach [7].

Fraktalne efekty występują w promieniowaniu emitowanym przez źródła o fraktalnym rozmieszczeniu w przestrzeni. Jeśli liczba źródeł promieniowania na kuli o promieniu R jest: $N \propto R^D$, a każde źródło daje wkład do całkowitego natężenia promieniowania proporcjonalny do $1/R^2$, to sumaryczne natężenie będzie: $I \propto R^{D-2}$. Pozwala to wyjaśnić skończoną wartość natężenia promieniowania we wszechświecie, o ile przyjąć, że rozkład galaktyk jest

akustycznej odkształcanych materiałów, Cannelli et al. [7] stwierdzili zmianę wymiaru fraktalnego emisji akustycznej w pobliżu progu zniszczenia materiału. Analiza fraktalna sygnałów sejsmicznych pozwala także na prognozowanie trzęsień ziemi [7].

Literatura

1. Mandelbrot B.: *Les objets fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Flammarion, Paris 1975.
2. Mandelbrot B.: *Fractals: Form, Chance and Dimension*. Freeman, San Francisco 1977.
3. Mandelbrot B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York 1983.
4. Peitgen H. O., Jürgens H., Saupe D.: *Granice chaosu. Fraktale. Cz.1*, PWN, Warszawa 1995.
5. Grzywna Z. J.: Scaling in diffusive transport through membranes. *Chemical Engineering Science* 51, No. 17, 1966, s. 4115-4125.
6. Kudrewicz J.: *Fraktale i chaos*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.
7. Zosimow W. W., Ljamszew: *Fraktaly w wołnowych processach*. *Uspiechy Fiziczeskich Nauk* 165, NO. 4, 1995, s. 361-402.
8. Alexander S., Orbach R.: Density of states on fractals: fractons. *Le Journal de Physique-Lettres* 43, No.17, 1982, s. 625-631.
9. Alexander S., Laermans C., Orbach R., Rosenberg H.: Fracton interpretation of vibrational properties of cross-linked polymers, glasses, and irradiated quartz. *Physical Review B* 28, No. 8, 1983, s. 4615-4619.
10. Jin F., Chiang F. P.: Nondestructive evaluation of corrosion by fractal geometry. *Researches in Nondestructive Evaluation* 7, 1996, s. 229-238.
11. Dutta D., Ganguly S.N., Barat P., Mukherjee P., Bandyopadhyay S.K.: P. Sen, Fractal characterization of ultrasonic signals from polycrystalline materials. *Fractals* 3, No. 1, 1995, s. 1-8.

Recenzent: Prof. dr hab. Mikołaj Łabowski

Abstract

Influence of fractal structure on properties of materials has been considered. Fractal geometry is a useful concept to characterize materials undergoing various processes. Different processes: erosion, corrosion, fatigue of materials, fracture mechanics etc. result in different fractal patterns. Fractal geometry is finding application in the nondestructive evaluation of corrosion surface with fractal dimensions, as well as fractal dimensions can be related with the damage caused by corrosion and fatigue of materials. Fractal geometry has been used by several authors to characterize discrete time domain ultrasonic signals scattered from polycrystalline materials. We have considered elastic properties of fractals materials as well as the dispersion, and density of distribution of localized states of elastic vibrations, the so called fractons, which are used in studies of properties of amorphous materials. Nonlinear interaction of phonons with fractons causes that the temperature dependence of heat conduction in amorphous materials differs from that one in crystal. Emission and scattering of waves by fractal structures as well as description of fractal properties of wave fields have been considered.