

Przemysław SZMAL
Politechnika Śląska, Instytut Informatyki

WYBRANE MODELE ROZWOJU OBIEKTÓW – ANALIZA SZYBKOŚCI WZROSTU POPULACJI¹

Streszczenie. Populacja obiektów może powiększać się wskutek zjawiska multiplikacji – rozwoju obiektów zakończonego podziałem na n części. W artykule przeanalizowano kilka modeli rozwoju, zakładających dostarczanie elementów do obiektów przez scentralizowany układ pracujący ze stałą lub zmienną wydajnością lub przenikanie ich przez aktywne fragmenty powierzchni. Określono czas podziału i wartość n zapewniającą najszybszy wzrost populacji.

Słowa kluczowe: powielanie się obiektów, współczynnik powielania, zasilanie scentralizowane, zasilanie powierzchniowe, nanotechnologie.

SELECTED MODELS OF OBJECT DEVELOPMENT – POPULATION GROWTH RATE ANALYSIS

Summary. Population of objects may increase thanks to the phenomenon of multiplication – object growth ended with its partition to n parts. In the paper we analyze several models of supplying growing objects with timber elements, based on a centralized system working with constant or variable yield, or on penetration through active surface areas. We determine partition time and the value of n that assures fastest population growth.

Keywords: object multiplication, multiplication factor, centralized alimentation, surface alimentation, nanotechnologies.

¹ Opracowanie wykonano w ramach projektu badawczego 7 T11C 017 21 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2001 – 2004

1. Wstęp

W związku z rozwojem nanotechnologii [2] aktualny może się okazać problem multiplikacji obiektów. Obiekt, któremu powierzono do wykonania pewną misję, w ramach jej realizacji może rozbudowywać się i po uzyskaniu odpowiednich rozmiarów podzielić się na n części, które stają się samodzielnymi obiektami i podejmują misję obiektu macierzystego rozgrywającą się według tego samego scenariusza. Z analogicznym zjawiskiem mamy do czynienia w świecie ożywionym, zwłaszcza wśród organizmów nisko zorganizowanych. Zbadanie zjawiska może mieć, oprócz znaczenia poznawczego, również określone konsekwencje praktyczne. W szczególności może być interesujące, przy jakiej wartości n (nazywanego *współczynnikiem powielania*) następuje najszybszy wzrost populacji obiektów. Problem ten był rozpatrywany w pracach [4, 5] przy założeniu, że czas T_p , po którym dochodzi do podziału obiektu, jest proporcjonalny do $n-1$, bez wnikania w szczegóły rozwoju obiektu. W pracy [3] badano kilka wariantów rozwoju, których wspólną cechą było dostarczanie elementów budulcowych poprzez wyróżnione obszary na powierzchni obiektu, cechujące się stałą przepuszczalnością i zmienną wielkością; czas T_p wynikał z kształtu obszarów i charakteru ich zmian.

W tym artykule zajmujemy się obiektami z hipotetycznym centralnym układem zasilającym i wybranymi modelami obiektów zasilanych przez obszary powierzchni, co pozwala nam stwierdzić zachodzące między nimi podobieństwo.

2. Bilans masy w procesie rozwoju obiektów

W naszych rozważaniach zakładamy, że dane jest pewne środowisko, w którym są osadzone rozwijające się obiekty. Środowisko zawiera elementy niezbędne im do rozwoju. Obiekty są oddzielone od otoczenia błoną, która zapewnia utrzymanie właściwego kształtu. Rozwój i wzrost następuje w wyniku pobierania przez obiekt z otoczenia i kumulowania elementów budulcowych. W odcinku czasu dt następuje przyrost masy obiektu opisany równaniem różniczkowym:

$$dM = M' dt \quad (1)$$

gdzie M' oznacza wpływający strumień masy, M' może się zmieniać w czasie. Masa obiektu wzrasta od wartości początkowej M_0 do wartości M_p , po czym następuje podział obiektu na n części. Tak więc:

$$M_p = nM_0 \quad (2)$$

Czas, który zabiera rozwój obiektu, nazywamy czasem podziału i oznaczamy przez T_p . Można go wyznaczyć rozwiązując równanie różniczkowe (1)².

W następnym punkcie przedstawimy zasady, które stosujemy analizując szybkość wzrostu populacji, a w kolejnych – rozważymy dwie grupy modeli opisujących wzrost indywidualny obiektu, związane z hipotetycznym sposobem, w jaki substancje docierają do obiektu i jak są wykorzystywane. Przy obu grupach zakładamy, że zmiany strumienia masy dostarczanej do obiektu, o których była mowa wyżej, stanowią konsekwencję rozwoju obiektu, natomiast nie wynikają z czynników zewnętrznych. W modelach pierwszej grupy przyjmujemy, że obiekt jest wyposażony w scentralizowany układ zasilający. Interesujemy się chwilową wydajnością tego układu, nie wnikając w szczegóły jego realizacji. W przypadku obiektów technicznych jego podstawą może być np. pompa, w przypadku zwierząt – układ pokarmowo-trawienny³. W modelach drugiej grupy założymy, że substancje budulcowe przenikają do wnętrza obiektu przez jego ściany, a ściślej – przez ich przepuszczalne fragmenty, które będziemy nazywać *obszarami aktywnymi*. Chłonięcie substancji przez powierzchnię jest typowym sposobem pobierania substancji odżywczych przez komórki żywe, zarówno w organizmach jedno-, jak i wielokomórkowych. Realizację w przypadku obiektów technicznych też łatwo sobie wyobrazić. Strumień masy zależy od powierzchni obszarów aktywnych, ta zaś, podobnie jak kształt całego rosnącego obiektu, może się – na dobrą sprawę – zmieniać w sposób dowolny. W naszych rozważaniach uwzględnimy kilka wariantów kształtu obiektu i obszarów aktywnych.

3. Zasada analizy szybkości wzrostu populacji

Znajomość współczynnika n i czasu T_p pozwala analizować szybkość wzrostu populacji obiektów. Oznaczmy przez $l(n, T)$ liczbę obiektów wchodzących w skład populacji w chwili T . Jeżeli w chwili początkowej $l(n, 0) = 1$, po czasie T (w którym nastąpiła pewna liczba m podziałów) populacja będzie zawierać:

² Przy głębszej analizie zagadnienia konieczne mogłoby się okazać rozróżnienie powiązanych ze sobą procesów wzrostu obiektu i dojrzewania – pierwsze są związane z kumulowaniem masy, drugie – z osiąganiem zdolności do podziału. Oba mogą być regulowane przez oddzielne fragmenty programu sterującego rozwojem obiektów, którego funkcję w przypadku organizmów żywych spełnia DNA.

³ Należy pamiętać, że w przypadku zwierząt, które odżywiają się w taki sposób, podstawą zwiększania liczby osobników nie jest mechanizm multiplikacji, a reprodukcji, którego opis w kategoriach informatycznych zamieszczono w [5].

$$l(n, T) = n^{\frac{T}{T_p}} \quad (3)$$

elementów.

Aby znaleźć w przedziale $n \in [2, \infty)$ wartość zapewniającą najszybszy wzrost populacji, podobnie jak w [4, 5, 3], zamiast badać funkcję dyskretną (3) w tym przedziale, badamy funkcję zmiennej rzeczywistej:

$$y(x) = e^{\frac{T \ln x}{T_p}} \quad (4)$$

w przedziale $x \in (1, \infty)$; w (4) wykorzystujemy zależność:

$$x = e^{\ln x} \quad (5)$$

obowiązującą dla $x \in (0, \infty)$. Szukając maksimum funkcji (4) będziemy badać jej pochodną; przechodząc z powrotem do funkcji dyskretniej (3), jako ekstremum przyjmujemy wartość całkowitą najbliższą wartości znalezionej dla funkcji ciągłej (4).

4. Modele wzrostu z zasilaniem scentralizowanym

Rozpatrzmy dwa modele wzrostu z zasilaniem scentralizowanym, C_1 i C_2 . W modelu C_1 przyjmujemy, że obiekt dysponuje pompą o stałej wydajności:

$$M' = M'_0 = \text{const} \quad (6)$$

W modelu C_2 wydajność pompy wzrasta liniowo z masą obiektu zgodnie ze wzorem:

$$M' = M'_0 \left(1 + k \left(\frac{M}{M_0} - 1 \right) \right) \quad (7)$$

gdzie k jest pewną stałą dodatnią, którą nazwiemy współczynnikiem przyrostu wydajności pompy. Wzrost wydajności pompy może np. wynikać z faktu, że sama pompa rośnie wraz z obiektem.

4.1. Model C_1

Uwzględniając w równaniu (1) fakt (6), otrzymujemy po rozwiązaniu:

$$M_p - M_0 = M'_0 T_p \quad (8)$$

co w połączeniu z (2) prowadzi do wzoru na czas T_p :

$$T_p = c(n - 1) \quad (9)$$

gdzie $c = \frac{M_0}{M'_0}$.

Uwzględniając (9) w (4), wzrost populacji obiektów można opisać wzorem:

$$y(x) = e^{\frac{T \ln x}{c(x-1)}} \quad (10)$$

Pochodna funkcji (10) wyraża się wzorem:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{T}{c} y(x) \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)^2} \quad (11)$$

Aby upewnić się, że w przedziale $x \in (1, \infty)$ pochodna przyjmuje wartości ujemne, wystarczy sprawdzić, czy spełniona jest nierówność:

$$\frac{x-1}{x} - \ln x < 0 \quad (12)$$

jako że pozostałe czynniki w zapisie pochodnej (11) przyjmują w przedziale $x \in (1, \infty)$ wartości dodatnie. Prawdziwość (12) można stwierdzić korzystając, jak to zrobiono w [3], z rozwinięcia funkcji logarytmicznej w szereg [1, s. 419] (rozwinięcie ma zastosowanie dla $x > 1/2$):

$$\ln(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \dots + \frac{(x-1)^m}{mx^m} + \dots, \quad (13)$$

przekształcając zapis (13) do postaci:

$$\frac{x-1}{x} - \ln(x) = -\left(\frac{(x-1)^2}{2x^2} + \dots + \frac{(x-1)^m}{mx^m} + \dots\right) \quad (14)$$

i zauważając, że wyrażenie po prawej stronie zapisu (14) ma wartość ujemną.

4.2. Model C_2

Tym razem w równaniu różniczkowym (1) wykorzystujemy zależność (7). Otrzymujemy:

$$\frac{dM}{M'_0 \left(1 + k \left(\frac{M}{M_0} - 1 \right) \right)} = dt \quad (15)$$

Po rozwiązaniu równania (15) i uwzględnieniu zależności (2) otrzymujemy:

$$T_p = \frac{M_0}{kM'_0} \ln(k(n-1)+1) \quad (16)$$

Równanie (4)(2) opisujące wzrost populacji obiektów przyjmuje w związku z tym postać:

$$y(x) = e^{\frac{kM'_0}{M_0} \frac{T \ln x}{\ln(k(x-1)+1)}} \quad (17)$$

Pochodna funkcji (17) wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{kM'_0}{M_0} Ty(x) \left(\frac{1}{x \ln(kx - k + 1)} - \frac{k \ln x}{(kx - k + 1)(\ln(kx - k + 1))^2} \right) = \\ &= \frac{kM'_0}{M_0} Ty(x) \frac{(kx - k + 1) \ln(kx - k + 1) - kx \ln x}{x(kx - k + 1)(\ln(kx - k + 1))^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Znak pochodnej (18) zależy od znaku wyrażenia:

$$W(x) = (kx - k + 1) \ln(kx - k + 1) - kx \ln x \quad (19)$$

gdyż pozostałe czynniki występujące w zapisie (18) są dla $x \in (1, \infty)$ i $k > 0$ dodatnie.

Aby zbadać znak $W(x)$, można posłużyć się następującym rozwinięciem funkcji logarytmicznej w szereg ([1, s. 419]):

$$\ln(z) = 2 \frac{z-1}{z+1} \left(1 + \frac{(z-1)^2}{3(z+1)^2} + \frac{(z-1)^4}{5(z+1)^4} + \dots + \frac{(z-1)^{2m}}{(2m+1)(z+1)^{2m}} + \dots \right) \quad (20)$$

Rozwinięcie (20) stosuje się dla $z > 0$.

Po zastosowaniu wzoru (20) dla wartości $z = kx - x + 1$ i $z = x$, wyrażenie (19) można przedstawić w postaci:

$$W(x) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{k(kx - k + 1)(x-1) \left(\frac{k(x-1)}{kx - k + 2} \right)^{2m}}{kx - k + 2} - \frac{kx(x-1) \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2m}}{x+1} \right) \quad (21)$$

Oznaczmy odpowiednie elementy – ułamki występujące w zapisie (21) przez $UL_1(m, k, x)$, $UL_2(m, k, x)$, $UP_1(m, k, x)$, $UP_2(m, k, x)$ tak, by uzyskać zapis:

$$W(x) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left(UL_1(m, k, x) (UL_2(m, k, x))^{2m} - UP_1(m, k, x) (UP_2(m, k, x))^{2m} \right) \quad (22)$$

Łatwo sprawdzić, że dla par ułamków zachodzi zależność:

$$UL_1(m, k, x) < UP_1(m, k, x) \wedge UL_2(m, k, x) < UP_2(m, k, x) \quad \text{dla } 0 < k < 1,$$

$$UL_1(m, k, x) = UP_1(m, k, x) \wedge UL_2(m, k, x) = UP_2(m, k, x) \quad \text{dla } k = 1,$$

$$UL_1(m, k, x) > UP_1(m, k, x) \wedge UL_2(m, k, x) > UP_2(m, k, x) \quad \text{dla } k > 1 \quad (23)$$

dla wszystkich $m \in [0, \infty)$ i $x \in (1, \infty)$.

Wobec takich zależności pomiędzy składowymi, które przenoszą się na każdy wyraz szeregu (21) i całą sumę, pochodna (18) spełnia warunek:

$$\frac{dy(x)}{dx} \begin{cases} < 0 \text{ dla } 0 < k < 1, \\ = 0 \text{ dla } k = 1, \\ > 0 \text{ dla } k > 1. \end{cases} \quad (24)$$

Tak więc najszybszy wzrost populacji dla $0 < k < 1$ następuje, gdy $n = 2$, dla $k = 1$ szybkość wzrostu populacji nie zależy od n , zaś dla $k > 1$ jest tym szybszy, im większe jest n . Wartość współczynnika przyrostu wydajności $k = 1$ określimy jako *krytyczną*.

5. Modele wzrostu z zasilaniem zdecentralizowanym

Podczas analizy tej kategorii przypadków konieczne jest uwzględnienie pewnych cech geometrycznych obiektu. Dlatego powiążemy masę M obiektu z objętością V wykorzystując wzór na gęstość ρ elementów, z których jest zbudowany obiekt:

$$\rho = \frac{dM}{dV} \quad (25)$$

Teraz rozszerzymy równanie bilansu masy (1). Przyjmujemy, że na powierzchni obiektu jest pewna liczba obszarów aktywnych. i -ty obszar aktywny ma powierzchnię S_{A_i} i charakteryzuje się przepuszczalnością powierzchniową μ_i . Strumień masy dopływający do obiektu stanowi sumę strumieni docierających przez poszczególne obszary. Można go opisać wzorem:

$$M' = \sum_i \mu_i S_{A_i} \quad (26)$$

Łącząc (1), (25) i (26) otrzymamy nowe równanie bilansu masy w postaci:

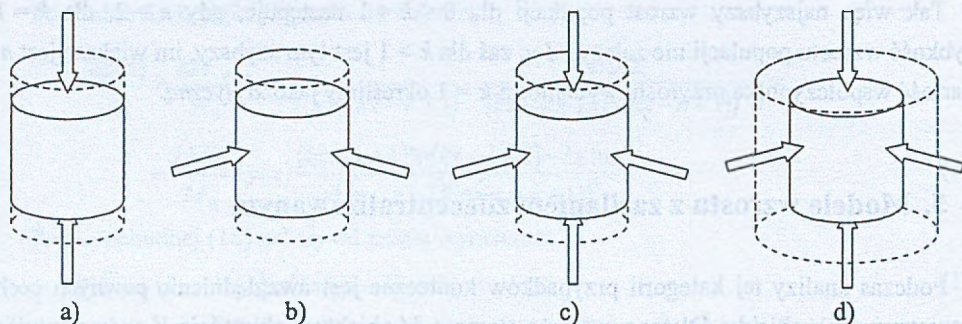
$$\rho dV - \sum_i \mu_i S_{A_i} dt = 0 \quad (27)$$

Aby je rozwiązać, trzeba wiedzieć, jak w miarę postępującego wzrostu obiektu zmienia się przepuszczalność poszczególnych obszarów aktywnych i ich powierzchnia. Powierzchnię obszarów powiążemy w konkretnych przypadkach z objętością V . Przyjmujemy, że przepuszczalność we wszystkich obszarach jest stała i ma wartość μ_0 , ponadto założymy stałą gęstość $\rho = \rho_0$.

W następnych podpunktach rozpatrzmy dla przykładu cztery modele – P_1 , P_2 , P_3 i P_4 , w których będą występowały obiekty o kształcie walcowym. Wykorzystamy fragmenty obszerniejszej analizy przeprowadzonej w [3].

W modelach $P_1 - P_3$ walec ma stały promień podstawy $r = r_0$ i wysokość h o wartości początkowej h_0 . Obszary aktywne w modelu P_1 to obie podstawy walca (rys. 1a), w modelu P_2 – ściana boczna (rys. 1b), w modelu P_3 – cała powierzchnia walca (rys. 1c).

W modelu P_4 promień podstawy r i wysokość h powiększają się od wartości początkowych – odpowiednio – r_0 i h_0 , zachowując stałą proporcję $h/r = h_0/r_0 = a_0$. Podobnie jak w modelu P_3 , obszarem aktywnym jest cała powierzchnia walca (rys. 1d).



Rys. 1. Rosnące obiekty z obszarami aktywnymi: a) model P_1 , b) model P_2 , c) model P_3 , d) model P_4

Fig. 1. Growing objects with active areas: a) model P_1 , b) model P_2 , c) model P_3 , d) model P_4

5.1. Model P_1

W tym przypadku $V = \pi r_0^2 h$, $S_A = 2\pi r_0^2$. Po przekształceniu otrzymujemy:

$$S_A = \frac{2V_0}{h_0}. \quad (28)$$

Równanie (27) przyjmuje postać:

$$\frac{\rho}{2\mu_0} \frac{h_0}{V_0} dV = dt \quad (29)$$

Po rozwiązaniu równania (29) mamy:

$$T_p = \frac{\rho}{2\mu_0} \frac{h_0}{V_0} (V_p - V_0) \quad (30)$$

a z (30) po uwzględnieniu zależności (2) i (25):

$$T_p = \frac{\rho}{2\mu_0} h_0 (n-1) \quad (31)$$

Porównując wzory (31) i (9) stwierdzamy, że rozpatrywany model P_1 stanowi odpowiednik modelu C_1 rozpatrywanego wyżej w punkcie 4.1. Co za tym idzie, najszybszy wzrost populacji następuje dla wartości $n = 2$.

5.2. Model P_2

W tym przypadku $V = \pi r_0^2 h$, $S_A = 2\pi r_0 h$. Tak więc:

$$S_A = \frac{2V}{r_0} \quad (32)$$

Równanie (27) przybiera postać:

$$\frac{\rho}{2\mu_0} r_0 \frac{dV}{V} = dt \quad (33)$$

Po rozwiązaniu równania (33) otrzymujemy:

$$T_p = \frac{\rho}{2\mu_0} r_0 \ln \frac{V_p}{V_0} \quad (34)$$

a z (34) po uwzględnieniu zależności (2) i (25):

$$T_p = \frac{\rho}{2\mu_0} r_0 \ln n \quad (35)$$

Wzór (35) odpowiada wzorowi (16) (model C₂), w którym k ma wartość 1; wartość n nie ma wpływu na szybkość wzrostu populacji.

5.3. Model P₃

W tym przypadku $V = \pi r_0^2 h$, $S_A = 2\pi r_0^2 + 2\pi r_0 h$.

Mamy więc:

$$S_A = \frac{2V_0}{h_0} + \frac{2V}{r_0} = \frac{2}{r_0} \left(V + \frac{r_0}{h_0} V_0 \right) = \frac{2}{r_0} \left(V + \frac{1}{a_0} V_0 \right). \quad (36)$$

Równanie (27) przyjmuje postać

$$\frac{\rho}{2\mu_0} r_0 \frac{dV}{V + \frac{1}{a_0} V_0} = dt \quad (37)$$

Po rozwiązaniu równania (37) otrzymujemy:

$$T_p = \frac{\rho}{2\mu_0} r_0 \ln \frac{V_p + \frac{1}{a_0} V_0}{V_0 + \frac{1}{a_0} V_0} \quad (38)$$

a z (38) po uwzględnieniu zależności (2) i (25):

$$T_p = \frac{\rho}{2\mu_0} r_0 \ln(c(n-1)+1) \quad (39)$$

gdzie $c = \frac{a_0}{a_0 + 1}$; $c < 1$.

Wzór (39) stanowi odpowiednik wzoru (16) (model C₂) dla $k < 1$. W modelu P₃, podobnie jak w P₁, najszybszy wzrost populacji zapewnia wartość $n = 2$.

5.4. Model P₄

W tym przypadku $V = \pi r^2 h$, $S_A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. W związku z tym mamy:

$$S_A = 2\pi(1+a_0) \left(\frac{V}{\pi a_0} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (40)$$

Równanie (27) przyjmuje postać:

$$\frac{\rho}{2\mu_0} \frac{(\pi a_0)^{\frac{2}{3}}}{\pi(1+a_0)} \frac{dV}{V^{\frac{2}{3}}} = dt \quad (41)$$

Po rozwiązaniu równania (41) otrzymujemy:

$$T_p = 3 \frac{\rho}{2\mu_0} \frac{(\pi a_0)^{\frac{2}{3}}}{\pi(1+a_0)} (V_p^{\frac{1}{3}} - V_0^{\frac{1}{3}}) \quad (42)$$

a z (42) po uwzględnieniu zależności (2) i (25) i związków łączących elementy geometryczne obiektu:

$$T_p = 3 \frac{\rho}{2\mu_0} r_0 \frac{a_0}{1+a_0} (n^{\frac{1}{3}} - 1) \quad (43)$$

Wzór (43) reprezentuje ten sam typ, co wzory (9) i (31) (modele C₁ i P₁). Można powtórzyć kroki rozumowania przedstawionego w p. 4.1, zastępując na wstępie we wzorze (10) x przez x^α , by przekonać się, że dla wszystkich α z przedziału $\alpha \in (0,1)$, w tym również dla $\alpha = \frac{1}{3}$, najszybszy wzrost populacji następuje w przypadku, gdy współczynnik powielania $n = 2^4$.

6. Uwagi końcowe

Uzyskane wyniki dotyczące wzrostu indywidualnego obiektów, a następnie rozwoju populacji warto podsumować w sposób mniej sformalizowany. Decydujące znaczenie dla wzrostu ma charakterystyka pracy układu zasilającego. Widać to wyraźnie, gdy traktuje się go jako scentralizowany. Gdy wydajność układu (jego pompy) nie zmienia się lub wzrasta, ale wolniej niż masa obiektu, najszybszy wzrost populacji następuje przy wartości współczynnika powielania $n = 2$. Gdy wydajność rośnie szybciej od masy, populacja rośnie tym szybciej, im większe jest n . Gdy wydajność i masa rosną w tym samym tempie, wartość n nie ma wpływu na szybkość wzrostu populacji.

⁴ W przypadku P₄ istotne jest, by funkcja (4) była rozpatrywana w przedziale $x \in (1, \infty)$, a nie $x \in [2, \infty)$, co wydaje się bardziej naturalne w pozostałych przypadkach.

W kilku rozważonych przypadkach zasilania powierzchniowego wydajność układu zasilającego (czytaj: powierzchnia obszarów aktywnych, która tę wydajność warunkuje) rośnie wolniej, niż masa obiektu. Wskazano jeden przypadek, gdzie wydajność rosła równie szybko, jak masa. W związku z ograniczoną liczbą przedstawionych przypadków zrezygnowano z formułowania hipotez uogólniających, wiążących wydajność z powierzchnią aktywną wyrażoną w funkcji objętości rosnącego obiektu. Zainteresowany czytelnik może sięgnąć do pracy [3].

Rozpatrywane w artykule przypadki obejmowały sytuacje, gdy równanie opisujące bilans masy obiektu dawało się rozwiązać – dzięki przyjętym założeniom – we względnie prosty sposób. W dalszych badaniach warto będzie zająć się bardziej skomplikowanymi przypadkami. Na przykład można będzie uchylić założenie o w pełni autonomicznym rozwoju obiektu i jawnie powiązać z czasem czynniki wpływające na wydajność układu zasilającego.

LITERATURA

1. Bronsztejn I. N., Siemiendajew K. A.: *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. Wyd. 4. PWN, Warszawa 1970.
2. Regis E.: *Nanotechnologia – narodziny nowej nauki, czyli świat cząsteczka po cząsteczce*. Prószyński i S-ka, Warszawa 2001.
3. Szmaj P.: *Analyzing object population growth for selected models of object development*. *Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej* (złożone w Redakcji).
4. Węgrzyn S.: *Self-replications of informatic systems*. *Biuletyn PAN*, vol. 49 (2001) no.1, pp. 161-165.
5. Węgrzyn S., Winiarczyk R.: *Reprodukcja i multiplikacja jako informatyczne technologie wytwarzania*. *Studia Informatica* Vol. 21, No 2A(53), Gliwice 2003, ss. 9-19.

Recenzent: Dr inż. Ryszard Winiarczyk

Wpłynęło do Redakcji 6 maja 2003 r.

Abstract

In the paper we consider the problem of object multiplication. In that phenomenon, an object (technical creation or living organism) grows and in adequate moment (e.g. after

acquiring the right weight), after time T_p divides into n parts – descendant objects, which start analogous actions and development.

The feed of timber elements from the environment is secured by a feed system. The mass balance of a growing object is described by formula (1).

In Section 4 we consider two models of feed system in centralized form; we assume it is based on a pump of definite yield.

In model C_1 the yield is constant, time T_p is given by formula (9). Fastest population growth is assured by the value $n_{fg} = 2$, what can be proved by examining the derivative (11) of function (10) that describes the growth. In the proof we use logarithmic function series expansion (13).

In model C_2 the yield increases linearly with object's mass according to formula (7), time T_p is described by formula (16), and population growth – by formula (17). Examining the derivative (18) of function (17) we get formula (24) and find that n_{fg} depends on pump yield increase factor k : when $0 < k < 1$, it is equal to 2, when $k > 1$ – the greater n is, the faster is the growth, when $k = 1$, value of n is inessential. In transformations, we use another logarithmic function series expansion (20).

In Section 5 we consider four selected models of a distributed feed, in which the elements penetrate through distinguished, active areas on object's surface shown on Fig. 1. From formulas (31) and (9) it follows that model P_1 from Fig. 1a behaves exactly the same as model C_1 . Model P_2 from Fig. 1b corresponds to model C_2 with factor $k = 1$, what follows formulas (35) and (16). Model P_3 from Fig. 1c corresponds to model C_2 , given value $0 < k < 1$ – as it indicate formulas (39) and (16). Model P_4 from Fig. 1d shows some analogy with model P_1 , although its T_p formula (43) is more complicated.

Adres

Przemysław SZMAL: Politechnika Śląska, Instytut Informatyki, ul. Akademicka 16,
44-101 Gliwice, Polska, pszmal@star.iinf.polsl.gliwice.pl.