ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2010

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 92 Nr kol. 1829

Danuta JAMA, Robert CZECH, Barbara JAMA, Michał SZOPA, Roman WITUŁA

Institute of Mathematics
Silesian University of Technology

SOME ESTIMATIONS OF SOLUTIONS OF ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERTURBATION

Summary. Correctness of some inequalities concerning solution of the equation the abstract differential equations is proved with adequate conditions as is stability of the equation's solutions in the Kozin's sense.

PEWNE OSZACOWANIE ROZWIĄZAŃ ABSTRAKCYJNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z ZABURZENIEM

Streszczenie. W artykule dowodzi się, przy odpowiednich warunkach, słuszność pewnych nierówności dotyczących rozwiązania różniczkowego równania abstrakcyjnego oraz stabilności rozwiązania tego równania w sensie Kozina.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D20, 47D03.
Wpłynęło do Redakcji 12.03.2010 r.

Let's consider the equation of the form

$$\frac{du(t)}{dt} = (A + B(t))\,u(t) \qquad \text{for } t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi_0 \tag{2}$$

for $\varphi_0, u(t) \in D(A) \cap D(B(t))$, $u(t) : [0, \infty) \to X$. The equations in the paper will be considered in the Banach's X space with the norm $\|.\|$. $B(t)$ – the family of linear, bounded operators $B(t) : X \to X$ for $t \geqslant 0$. We assume that $\|B(t)\| \in L_q[0, \infty)$ for $q > 1$, $A : X \to X$. The operator A appearing in the equations is a infinitesimal generator of the strongly continuous semi-group of operators $T(t)$ for $t \geqslant 0$.

We write the equation (1)-(2) in the integral form

$$u(t) = T(t)\,\varphi_0 + \int_0^t T(t-s)\,B(s)\,u(s)\,ds \tag{3}$$

We introduce the designation

$$\left[\int_0^t \|B(s)\|^q ds\right]^{\frac{1}{q}} = h(t) \tag{4}$$

Theorem 1. *If*

a) $\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}$, *where* M, c *– some positive constants,*

b) $\|B(t)\|$ *is of the class* $L_q[0, \infty)$ *for* $q > 1$,

c) $h(t)$ *is of the class* $L_p[0, \infty)$ *and* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

that the constant c_1 *such that*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \|u(s)\|^p e^{cps} ds \leqslant c_1^p \|\varphi_0\|^p \tag{5}$$

exists.

Proof. Using the integral form (3) of the equation (1)-(2) and taking to the norm we get

$$\|u(t)\| \leqslant \| \text{[illegible]} \| + \int_0^t \|T(t-s)\|\, \|B(s)\|\, \|u(s)\|\, ds. \tag{6}$$

Introducing a new auxiliary function

$$\nu(t) = \|u(t)\| e^{ct} \qquad (c > 0) \tag{7}$$

and using the assumptions we have

$$\nu(t) e^{-ct} \leqslant \|T(t)\| \|\varphi_0\| + M \int_0^t e^{-c(t-s)} \|B(s)\| \nu(s) e^{-cs} ds \leqslant$$

$$\leqslant M e^{-ct} \|\varphi_0\| + M e^{-ct} \int_0^t \|B(s)\| \nu(s) ds \tag{8}$$

so

$$\nu(t) \leqslant M \|\varphi_0\| + M \int_0^t \|B(s)\| \nu(s) ds. \tag{9}$$

Applying the Hölder's inequality

$$\int_0^t \|B(s)\| \nu(s) ds \leqslant \left[\int_0^t \|B(s)\|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^t \nu^p(s), ds \right]^{\frac{1}{p}} \tag{10}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{11}$$

Using the designation (4) from (8) we get

$$\nu(t) \leqslant M \|\varphi_0\| + M h(t) \left[\int_0^t \nu(s)^p ds \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

Using the generalized Bihari's inequality we get

$$\left[\int_0^t \nu(s)^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\left[\int_0^t (M \|\varphi_0\|)^p e^{-\int_0^s M^p h^p(\tau) d\tau} ds \right]^{\frac{1}{p}}}{1 - \left[1 - e^{-\int_0^t M^p h^p(\tau) d\tau} \right]^{\frac{1}{p}}} =$$

$$= \frac{M\|\varphi_0\| \left[\int_0^t e^{-M^p \int_0^s h^p(\tau)d\tau} ds\right]^{\frac{1}{p}}}{1 - \left[1 - e^{-M^p \int_0^t h^p(\tau)d\tau}\right]^{\frac{1}{p}}} \tag{13}$$

From the assumption c) we have

$$e^{-M^p \int_0^t h^p(\tau)d\tau} \leqslant 1 \tag{14}$$

and the constant $M_1 > 0$ such that

$$1 - \left[1 - e^{-\int_0^t M^p h^p(\tau)d\tau}\right]^{\frac{1}{p}} > M_1 \qquad \text{for } \ t \geqslant 0 \tag{15}$$

exists.

Basing on (14), (15) from (13) we get

$$\left[\int_0^t \nu(s)^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{M}{M_1} \|\varphi_0\| t^{\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

Putting $\frac{M}{M_1} = c_1$ from (16) we have

$$\frac{1}{t}\int_0^t \nu^p(s)\, ds \leqslant (c_1 \|\varphi_0\|)^p \qquad \text{for every } \ t \geqslant 0, \tag{17}$$

so

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \|u(s)\| e^{cps} ds \leqslant (c_1 \|\varphi_0\|)^p. \tag{18}$$

This ends the proof. □

Theorem 2. *If*

a) the assumptions of Theorem 1 are fulfilled and

b) $\|u(t)\|$ *is the class* $L_p[0,\infty)$ *for* $p \geqslant 1$

the constant $c_2 > 0$ *such that*

$$\left[\int_0^\infty \|u(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant c_2 \|\varphi_0\| \tag{19}$$

exists.

Proof. Let $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. Writing the equation (1)-(2) in the integral form and taking to the norm we get

$$\|u(t)\| \leqslant \|T(t)\| \, \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \, \|B(s)\| \, \|u(s)\| \, ds. \tag{20}$$

Introducing a new auxiliary function $\nu(t) = \|u(t)\| \, e^{ct}$, using the Hölder's inequality and acting analogically as in the proof of Theorem 1 we get the inequality of the form

$$\int_{t_0}^{t} \nu^p(s) \, ds \leqslant c_1^p \|u(t_0)\|^p (t - t_0), \tag{21}$$

where $c_1 = \frac{M}{M_1}$. Because $v^p(t)$ is a continuous function so according to the theorem of the average value for the integral such $\xi \in (t, t_0)$ exists that

$$\int_{t_0}^{t} \nu^p(s) \, ds = \nu^p(\xi)(t - t_0). \tag{22}$$

From (21) and (22) we get

$$v^p(\xi) \leqslant c_1^p \|u(t_0)\|^p. \tag{23}$$

Passing to the limit with $t_0 \to 0$ and putting $\xi = t$ we have

$$v^p(t) \leqslant c_1^p \|\varphi_0\|^p \tag{24}$$

so

$$\|u(t)\|^p \leqslant c_1^p e^{-cpt} \|\varphi_0\|^p. \tag{25}$$

Integrating the above inequality from 0 to ∞ we have

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \leqslant \frac{1}{cp} c_1^p \|\varphi_0\|^p \tag{26}$$

so

$$\left[\int_0^\infty \|u(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant c_2 \|\varphi_0\|, \tag{27}$$

where $c_2 = \frac{c_1}{(cp)^{\frac{1}{p}}}$. This ends the proof. □

Theorem 3. *If the assumptions of Theorem 2 are fulfilled then the solution of the equation (1)-(2) is stable in the Kozin's sense.*

Proof. From inequality (23) we have

$$\|u(t)\| \leqslant c_1 e^{-ct} \|\varphi_0\| \tag{28}$$

so

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0. \tag{29}$$

This ends the proof. □

References

1. Belleni-Morante A.: *Applied semi-groups and evolution equations.* Clarendon Press, Oxford 1982.
2. Bellman R.: *The boundedness of solutions of infinite systems of linear diferential equations.* Duke Math. J. **14** (1947), 695–706.
3. Bhatic N.P., Szego G.P.: *Dynamical systems stability theory and applications.* Lecture Notes in Math. **35**, Springer, New York 1967.
4. Butzer P.L., Berens H.: *Semi-groups of operators and approximation.* Springer, New York 1967.
5. Czech A., Jama D.: *Ograniczoność rozwiązań pewnego równania parabolicznego na płaszczyźnie.* Zeszt. Nauk. Pol. Śl. Mat-Fiz **43** (1986), 173–177.
6. Demidowicz B.P.: *Matematyczna teoria stabilności.* PWN, Warszawa 1972.
7. Elsgolc Ł.E.: *Kaczestwiennyje metody w matematiczieskom analizie.* Nauka, Moskwa 1955.
8. Jama D.: *Asymptotic stability of an integro-differential equation of parabolic type.* Annal. Polonici Math. **47** (1986), 65–78 (it was published in a book of A. Lasota, N.C. Mackey "Parabolitic properties of determinist systems", Cambridge Univ. Press, Cambridge 1985, in example 11.10.1, pp. 337–341).

9. Martin R.H.: *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces.* J. Wiley and Sons, New York 1976.

Streszczenie

W pracy rozpatrzono abstrakcyjne równanie różniczkowe w postaci:

$$\frac{du(t)}{dt} = (A + B(t))\,u(t) \quad \text{dla } t \geqslant 0$$

$$u(0) = \varphi_0.$$

Przy głównym założeniu, że operator A jest infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy $T(t)$, t $\geqslant 0$, $T(0) = I$, otrzymuje się wiele oszacowań rozwiązań tego równania. Ustala się warunki gwarantujące stabilność rozwiązań w sensie Kozina. Głównym rezultatem pracy jest:

Twierdzenie. Jeśli:

a) $\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}$ klasy $M, c0$,

b) $\|B(t)\|$ jest klasy $L_q[0,\infty)$ dla $q > 1$,

c) $h(t)$ jest klasy $L_p[0,\infty)$, gdzie $\left[\int_0^t \|B(s)\|^q ds\right]^{\frac{1}{q}} = h(t)$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

to istnieje stała c_1, taka że:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \|u(s)\|^p e^{cps} ds \leqslant c_1 \|\varphi_0\|^p.$$

Praca zawiera trzy twierdzenia.