ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2010
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 92 Nr kol. 1829

Danuta JAMA
Institute of Mathematics
Silesian University of Technology

STABILNOŚĆ W SENSIE KOZINA SŁABO NIELINIOWYCH, ABSTRAKCYJNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Streszczenie. W artykule badana jest stabilność w sensie Kozina oraz ograniczoność rozwiązań równań ewolucyjnych z nieliniową perturbacją.

ON THE STABILITY IN KOZIN SENSE OF SOME WEAK NON-LINEAR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary. In this paper stability in the Kozin sense and boundness of the solutions of some evolution equations with non-linearity is investigated. The conditions for boundness and Kozin stability of solutions were obtained.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D20, 47D03.
Wpłynęło do Redakcji 12.03.2010 r.

Rozważmy równanie w postaci:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t)) \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

gdzie: $u_0, u(t), F(t, u(t)) \in D(A)$, $F(t, u(t))$ – funkcja zadana, $u(t)$ – rozwiązanie równania, u_0 – ustalony element przestrzeni X. Równanie rozważa się w przestrzeni Banacha X z normą $\|.\|$. Zakładamy, że operator A, określony na przestrzeni X i przyjmujący wartości z przestrzeni X, ma następujące własności:

a) A jest operatorem dominującym i $\overline{D(A)} = X$,

b) zbiór rezolwenty operatora A zawiera $[0, \infty)$ i dla $\lambda > 0$ $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{\overline{M}}{\lambda - \gamma}$, gdzie $\lambda > \gamma > 0$, $\overline{M}$ – pewna stała dodatnia.

Operator A jest więc infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów przejścia $T(t)$, $t \geqslant 0$, $T(0) = I$.

Powyższe równanie, zapisane w postaci całkowej, przyjmuje postać:

$$u(t) = T(t)\, u_0 + \int_0^t T(t-s)\, F(s, u(s))\, ds. \tag{3}$$

Twierdzenie 1. *Jeśli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

1. istnieją stałe dodatnie M, c, takie że:

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct} \qquad \textit{dla } t \geqslant 0, \tag{4}$$

2. istnieją ciągłe, nieujemne i ograniczone funkcje $f(t)$ i $g(t)$, takie że:

$$\|F(t, u(t))\| \leqslant f(t) + g(t)\, \|u(t)\| \qquad \textit{dla } t \geqslant 0, \tag{5}$$

3. istnieją stałe dodatnie M_1, M_2, takie że:

$$\int_0^\infty f(s)\, e^{cs} ds \leqslant M_1, \qquad \int_0^\infty g(s) ds \leqslant M_2, \tag{6}$$

to istnieją stałe dodatnie L_1, L_2, takie że:

$$\|u(t)\| \leqslant L_1 \|u_0\| + L_2 \tag{7}$$

i

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t)\| = 0. \tag{8}$$

Dowód. Przechodząc do normy w równaniu (3) i wykorzystując założenia, otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant \|T(t)\| \|u_0\| + \int_0^t \|T(t-s)\| \|F(s, u(s))\| ds \leqslant$$

$$\leqslant Me^{-ct} \|u_0\| + \int_0^t e^{-c(t-s)} [f(s) + g(s) \|u(s)\|] ds, \quad (9)$$

czyli:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct} \|u_0\| + Me^{-ct} \int_0^t e^{cs} f(s) ds + Me^{-ct} \int_0^t g(s) e^{cs} \|u(s)\| ds, \quad (10)$$

a więc:

$$e^{ct} \|u(t)\| \leqslant M \|u_0\| + MM_1 + \int_0^t Mg(s) e^{cs} \|u(s)\| ds. \quad (11)$$

Kładąc:

$$v(t) = e^{ct} \|u(t)\|$$

i wykorzystując nierówność Gronwalla, mamy:

$$v(t) \leqslant [M \|u_0\| + MM_1] e^{M \int_0^t g(s) ds}, \quad (12)$$

a stąd:

$$e^{ct} \|u(t)\| \leqslant [M \|u_0\| + MM_1] e^{M \int_0^t g(s) ds}. \quad (13)$$

Ponieważ:

$$e^{M \int_0^t g(s) ds} \leqslant e^{M \int_0^\infty g(s) ds} \leqslant e^{MM_2} = M_3, \quad (14)$$

więc:

$$e^{ct} \|u(t)\| \leqslant [M \|u_0\| + MM_1] M_3, \quad (15)$$

czyli:

$$\|u(t)\| \leqslant [M \|u_0\| + MM_1] M_3 e^{-ct}, \quad (16)$$

kładąc $L_1 = MM_3$, $L_2 = MM_1M_3$ z (16), otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant L_1 \|u_0\| + L_2, \quad (17)$$

a przechodząc w (16) do granicy, mamy $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$. □

Twierdzenie 2. *Jeśli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

1. *istnieją stałe $M > 0$, $c > 0$, takie że:*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct} \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{18}$$

2. *istnieją ciągłe nieujemne funkcje $f(t)$ i $g(t)$ dla $t \in [0, \infty)$, takie że:*

$$\|F(t, u(t))\| \leqslant f(t) + g(t)\|u(t)\|, \tag{19}$$

$$M\int\limits_0^\infty e^{cs} f(s)\, ds < \overline{M}, \qquad \overline{M} \text{ – pewna stała dodatnia,} \tag{20}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t g(s)\, ds < \frac{c}{M}, \tag{21}$$

to istnieją stałe C, C_1, takie że:

$$\|u(t)\| \leqslant C\|u_0\| + C_1 \qquad \text{dla } t \geqslant 0 \tag{22}$$

oraz $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0.$

Dowód. Przechodząc do normy w równaniu (3) i wykorzystując założenia, otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + \int\limits_0^t Me^{-c(t-s)}\left[f(s) + g(s)\|u(s)\|\right] ds. \tag{23}$$

Mnożąc obustronnie przez e^{ct}, mamy:

$$e^{ct}\|u(t)\| \leqslant M\|u_0\| + \int\limits_0^t Me^{cs} f(s)\, ds + \int\limits_0^t Me^{cs} g(s)\|u(s)\| ds, \tag{24}$$

kładąc:

$$v(t) = e^{ct}\|u(t)\| \tag{25}$$

i wykorzystując (20) z (24), dostajemy nierówność w postaci:

$$v(t) \leqslant M\|u_0\| + \overline{M} + \int\limits_0^t Mg(s)v(s)\, ds. \tag{26}$$

Stosując nierówność Gronwalla, otrzymujemy:

$$v(t) \leqslant \left[M\|u_0\| + \overline{M}\right] \exp\Big(M\int_0^t g(s)\,ds\Big), \tag{27}$$

mnożąc powyższą nierówność przez e^{-ct}, mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant \left[M\|u_0\| + \overline{M}\right] \exp\Big(-ct + M\int_0^t g(s)\,ds\Big) =$$

$$= \left[M\|u_0\| + \overline{M}\right] \exp\Big(t\Big[-c + M\frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds\Big]\Big). \tag{28}$$

Funkcja $z(t) = \exp\big(-ct + M\int_0^t g(s)ds\big)$, na mocy przyjętych założeń, jest ciągła na $[0,\infty)$ oraz:

$$z(0) = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty} \exp\Big(t\Big[-c + M\frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds\Big]\Big) = 0, \tag{29}$$

a stąd funkcja $z(t)$ jest ograniczona przez pewną stałą $K > 0$ dla $t \in [0,\infty)$, a więc z (28) otrzymamy:

$$\|u(t)\| \leqslant C\|u_0\| + C_1, \tag{30}$$

gdzie:

$$C = MK, \qquad C_1 = \overline{M}K. \tag{31}$$

Z (28) i (21) mamy $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$. □

Twierdzenie 3. *Jeśli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

1. *istnieje stała dodatnia M taka, że dla $t \geqslant 0$:*

$$\|T(t)\| \leqslant M, \tag{32}$$

2. *istnieją ciągłe, nieujemne funkcje $f(t)$ i $g(t)$ dla $t \geqslant 0$, takie że:*

$$\|F(t, u(t))\| \leqslant f(t) + g(t)\|u(t)\|^2 \qquad \text{dla } t \geqslant 0 \tag{33}$$

oraz:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \leqslant M_1, \qquad \int_0^\infty g(t)\,dt \leqslant M_2, \tag{34}$$

M_1, M_2 – pewne stałe dodatnie, spełniające nierówność:

$$\|u_0\| + M_1 < \frac{1}{M^2 M_2}, \tag{35}$$

to słabe rozwiązanie równań (1)-(2) jest ograniczone.

Dowód. Przechodząc do normy w równaniu (3) i wykorzystując założenia, otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant M\|u_0\| + \int_0^t M\left[f(s) + g(s)\|u(s)\|^2\right] ds \leqslant$$

$$\leqslant M\|u_0\| + M\int_0^t f(s)\,ds + \int_0^t Mg(s)\|u(s)\|^2 ds, \tag{36}$$

a więc:

$$\|u(t)\| \leqslant M(\|u_0\| + M_1) + \int_0^t Mg(s)\|u(s)\|^2 ds. \tag{37}$$

Wykorzystując nierówność Bihariego, mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant \frac{M(\|u_0\| + M_1)}{1 - M(\|u_0\| + M_1)\int_0^t Mg(s)\,ds} =$$

$$= \frac{M(\|u_0\| + M_1)}{1 - M^2(\|u_0\| + M_1)\int_0^t g(s)\,ds} \leqslant \frac{M(\|u_0\| + M_1)}{1 - M^2(\|u_0\| + M_1)M_2}. \tag{38}$$

Na podstaie (35) istnieje taka stała m, że:

$$0 < m < 1 - M^2(\|u_0\| + M_1)M_2, \tag{39}$$

czyli:

$$\|u(t)\| \leqslant \frac{M(\|u_0\| + M_1)}{m} \leqslant \frac{M}{m}\|u_0\| + \frac{M_1 M}{m}. \tag{40}$$

□

Bibliografia

1. Ames W.F.: *Non-linear partial differential equations.* Academic Press, New York 1967.
2. Lumer G., Philips R.S.: *Dissipative operators in a Banach space.* Pacific J. Math. **11** (1961), 679–698.
3. Martin R.H.: *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces.* J. Wiley and Sons, New York 1976.
4. Miyadera J.: *Perturbation theory for semi-groups of operators.* Tokohu Math. J. **24** (1972), 251–261.
5. Pazy A.: *Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert spaces.* Arch. Rat. Mech. And Anal. **24** (1967), 193–218.
6. Pazy A.: *Semi groups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York 1980.

Abstract

In the paper properties of the equation In the form:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t)) \text{ for } t \geqslant 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$$

defined in the Banach space X are considered. Condition for the stability in the sense of Kozin and asymptotic stability are established. Boundness of solutions is proofed under more weak assumptions.