ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2010

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 92 Nr kol. 1829

Danuta JAMA, Barbara JAMA, Roman WITUŁA

Instytut Matematyki
Politechnika Śląska

JAKOŚCIOWA ANALIZA PEWNEGO ABSTRAKCYJNEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO

Streszczenie. Praca dotyczy jakościowych własności rozwiązań pewnego abstrakcyjnego równania różniczkowego z pewną nieliniowością i wymuszeniem funkcyjnym. Na podstawie teorii półgrup, wykorzystując uogólnioną nierówność Gronwalla-Bellmana, wykazana jest przy odpowiednich założeniach ograniczoność normy rozwiązań oraz stabilność rozwiązań w sensie Kozina.

QUALITATIVE ANALYSIS OF SOME ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION

Summary. The paper contains considerations concerning quality properties of some abstract differential equation. Boundness of the solution's norm and stability of the equation's solution's in the Kozin's sense is proved basing on the semi-group theory using the generalized Gronwall-Bellman inequality with adequate assumptions.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D20, 47D03.
Wpłynęło do Redakcji 22.03.2010 r.

Rozważmy równanie w postaci:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t)) + f(t) \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

gdzie: u_0, $u(t)$, $F(t, u(t))$, $f(t) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$, $F(t, u(t))$, $f(t)$ – zadana funkcja, $u(t)$ – rozwiązanie równania, u_0 – ustalony element przestrzeni X. Równanie rozważa się w przestrzeni Banacha X z normą $\|.\|$. Operator A jest infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów $T(t)$, $t \geqslant 0$, $T(0) = I$. Równania (1)-(2) zapisujemy w postaci następującego równania całkowego:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s, u(s))\,ds + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds. \tag{3}$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

1. *istnieją stałe dodatnie $M > 0$, $c > 0$, takie że:*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}, \tag{4}$$

2. *istnieje ciągła i nieujemna funkcja $k(t)$ określona dla $t \geqslant 0$, taka że:*

$$\|F(t, u(t))\| \leqslant k(t) + \|u(t)\| \qquad \text{dla } t \geqslant 0 \tag{5}$$

i

$$\int_0^\infty k(t)\,dt = M_1 < \infty, \tag{6}$$

3. *$\|f(t)\|$ jest ograniczona na $[0, \infty)$,*

to rozwiązanie zerowe równań (1)-(2) jest stabilne w sensie Mowczana względem warunku początkowego u_0 i wymuszenia $f(t)$.

Dowód. Przechodząc do normy w równaniu (3) i wykorzystując odpowiednie założenia, mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant \|T(t)\|\,\|u_0\| + \int_0^t \|T(t-s)\|\,\|F(s, u(s))\|\,ds +$$

$$+ \int_0^t \|T(t-s)\|\,\|f(s)\|\,ds, \tag{7}$$

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + \int_0^t Me^{-c(t-s)}k(s)\|u(s)\|\,ds + \int_0^t Me^{-c(t-s)}\|f(s)\|\,ds, \tag{8}$$

więc:

$$\|u(t)\| \leqslant M\|u_0\| + \frac{M}{c}\sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\| + \int_0^t Mk(s)\|u(s)\|\,ds. \tag{9}$$

Wykorzystując nierówność Gronwalla, otrzymujemy oszacowanie postaci:

$$\|u(t)\| \leqslant \left[M\|u_0\| + \frac{M}{c}\sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\|\right] e^{\int_0^t Mk(s)ds}. \tag{10}$$

Wykorzystując (6), mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{MM_1}\left[\|u_0\| + \frac{1}{c}\sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\|\right]. \tag{11}$$

Niech:

$$m_1 = \max\left[1, \frac{1}{c}\right], \tag{12}$$

kładąc:

$$M_2 = Me^{MM_1}m_1, \tag{13}$$

otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant M_2\left[\|u_0\| + \sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\|\right]. \tag{14}$$

Przyjmując:

$$\|u_0\|_1 = \|u_0\| \qquad \text{i} \qquad \|f(t)\|_2 = \sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\|, \tag{15}$$

mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant M_2\left[\|u_0\|_1 + \|f(t)\|_2\right]. \tag{16}$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M_2},$$

a więc otrzymujemy stabilność względem warunku początkowego u_0 i wymuszenia $f(t)$. □

Twierdzenie 2. *Jeżeli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) dla dowolnego* $u_0 \in X$ *oraz:*

1. *istnieją stałe* $M > 0$, $c > 0$, *takie że:*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}, \tag{17}$$

2. *istnieje ciągła i nieujemna funkcja* $k(t)$ *określona dla* $t \geqslant 0$, *taka że:*

$$\|F(t, u_1(t)) - F(t, u_2(t))\| \leqslant k(t)\|u_1(t) - u_2(t)\| \tag{18}$$

i

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t k(s)\,ds < \frac{c}{M}, \tag{19}$$

to rozwiązanie równania (1) jest ciągle zależne od warunków początkowych w normie przestrzeni X oraz:

$$\lim_{t\to\infty} \|u_1(t) - u_2(t)\| = 0, \tag{20}$$

gdzie $u_1(t)$, $u_2(t)$ *są rozwiązaniami równania (1) z warunkami początkowymi odpowiednio* u_{10}, u_{20}.

Dowód. Niech $u_1(t)$ i $u_2(t)$ będą rozwiązaniami równania (1) z warunkami początkowymi odpowiednio u_{10}, u_{20}. Wówczas z (3) mamy:

$$u_1(t) = T(t)u_{01} + \int_0^t T(t-s) f(s)\,ds + \int_0^t T(t-s) F(s, u_1(s))ds \tag{21}$$

oraz:

$$u_2(t) = T(t)u_{02} + \int_0^t T(t-s) f(s)\,ds + \int_0^t T(t-s) F(s, u_2(s))ds. \tag{22}$$

Z (21) i (22) odejmując stronami i przechodząc do normy, otrzymujemy:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant \|T(t)\|\,\|u_{10} - u_{20}\| + \\ + \int_0^t \|T(t-s)\|\,\|F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s))\|\,ds. \tag{23}$$

Wykorzystując założenia twierdzenia, mamy:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_{10} - u_{20}\| + \\ + M\int_0^t e^{-c(t-s)}k(s)\|u_1(s) - u_2(s)\|\,ds. \tag{24}$$

Kładąc:

$$v(t) = e^{ct}\|u_1(t) - u_2(t)\|, \tag{25}$$

z (24) otrzymujemy:

$$v(t) = M\|u_{10} - u_{20}\| + M\int_0^t k(s)v(s)\,ds. \tag{26}$$

Na podstawie nierówności Gronwalla mamy:

$$v(t) \leqslant M\|u_{10} - u_{20}\|e^{M\int_0^t k(s)ds}, \tag{27}$$

mnożąc obustronnie przez e^{-ct} z (27), otrzymujemy:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant M\|u_{10} - u_{20}\|e^{-ct+M\int_0^t k(s)ds}, \tag{28}$$

czyli:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant M\|u_{10} - u_{20}\|e^{t\left(-c+M\frac{1}{t}\int_0^t k(s)ds\right)}. \tag{29}$$

Na podstawie założeń twierdzenia istnieje stała $K > 0$, taka że:

$$e^{t\left(-c+M\frac{1}{t}\int_0^t k(s)ds\right)} < K, \tag{30}$$

stąd:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant KM\|u_{10} - u_{20}\|. \tag{31}$$

Na mocy założeń z (29) mamy:

$$\lim_{t\to\infty}\|u_1(t) - u_2(t)\| = 0, \tag{32}$$

a z (31) i (32) otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Twierdzenie 3. *Jeżeli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

1. *istnieją stałe $M > 0$, $c > 0$, takie że:*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}, \tag{33}$$

2. *istnieje ciągła i nieujemna funkcja $k(t)$ określona dla $t \geqslant 0$, takie że:*

$$\|F(t, u(t))\| \leqslant k(t)\|u(t)\| \qquad dla\ t \geqslant 0 \tag{34}$$

i

$$\int_0^\infty k(t)\,dt = M_1 < \infty \tag{35}$$

oraz:

$$\int_0^\infty e^{ct}\|f(t)\|\,dt = M_2 < \infty, \qquad M_2 \text{ - pewna stała dodatnia}, \tag{36}$$

to słabe rozwiązanie równań (1)-(2) spełnia oszacowanie:

$$u(t) \leqslant M_3[\|u_0\| + M_2], \qquad M_3 \text{ - pewna stała dodatnia} \tag{37}$$

i jest stabilne w sensie Kozina.

Dowód. Z założenia twierdzenia mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + Me^{-ct}\int_0^t e^{cs}k(s)\|u(s)\|\,ds + Me^{-ct}\int_0^t e^{cs}\|f(s)\|\,ds, \tag{38}$$

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + Me^{-ct}\int_0^t e^{cs}k(s)\|u(s)\|\,ds + MM_2e^{-ct}, \tag{39}$$

więc:

$$\|u(t)\|e^{ct} \leqslant M\|u_0\| + MM_2 + \int_0^t Mk(s)\|u(s)\|e^{cs}ds. \tag{40}$$

Stosując nierówność Gronwalla do funkcji $\|u(t)\|e^{ct}$, otrzymujemy:

$$\|u(t)\|e^{ct} \leqslant M[\|u_0\| + M_2]e^{\int_0^t Mk(s)ds}. \tag{41}$$

Wykorzystując (35), mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant e^{-ct} M \left[\|u_0\| + M_2\right] e^{MM_1}. \tag{42}$$

Kładąc $M_3 = Me^{MM_1}$, mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant M_3 \left[\|u_0\| + M_2\right] e^{-ct}. \tag{43}$$

Z (43) otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant M_3 \left[\|u_0\| + M_2\right] \tag{44}$$

oraz z (43) mamy:

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0. \tag{45}$$

□

Bibliografia

1. Belleni-Morante A.: *Applied semi-groups and evolution equations.* Clarendon Press, Oxford 1982.
2. Pazy A.: *Semi groups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York 1980.
3. Kielhöfer H.: *Global solutions of semilinear evolution equations satisfying an energy inequality.* J. Differ. Equations **36** (1980), 188–222.
4. Martin R.H.: *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces.* J. Wiley and Sons, New York 1976.
5. Pazy A.: *Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert spaces.* Arch. Rat. Mech. And Anal. **24** (1967), 193–218.

Abstract

The equation in the form:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t)) + \mathrm{f}(t) \quad \text{for } t \geqslant 0$$

defined in the Banach space X is investigated. Basing on the semi-group theory and generalization of Bellman-Gronwall Lemma the stability in the sense of Kozin of the solution of above equation is proved. Estimations of the norm of the solution are given under weaker assumptions.