ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2010
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 92 Nr kol. 1829

Danuta JAMA, Robert CZECH, Michał SZOPA, Roman WITUŁA
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska

PEWNE WŁASNOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO Z WYPRZEDZONYM ARGUMENTEM

Streszczenie. Artykuł poświęcony jest rozwiązaniom słabo nieliniowego równania różniczkowego z wyprzedzonym argumentem. Na podstawie teorii półgrup przy odpowiednich założeniach udowadnia się istnienie i jednoznaczność rozwiązań oraz pewne zależności słabego rozwiązania danego równania.

SOME PROPERTIES SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION WITH ADVANCED ARGUMENT

Summary. The paper of attention to the differential equation with the accelerated argument. Existence and that uniqueness of the above equation's solutions is proved basing on the semi-group theory with adequate assumptions.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A12, 47D03.
Wpłynęło do Redakcji 12.04.2010 r.

Rozważmy równanie w postaci:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t + t_1)) \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

gdzie: $u_0, u(t), F(t, u(t+t_1)) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$, $F(t, u(t+t_1))$ – zadana funkcja, $u(t)$ – rozwiązanie równania, t_1 – ustalona wartość dodatnia, u_0 – ustalony element przestrzeni X. Równanie rozważa się w przestrzeni Banacha X z normą $\|.\|$.

Założenia podstawowe:

1) operator A jest generatorem mocno ciągłej półgrupy $\{T(t),\ t \geqslant 0\}$, takiej że:

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct} \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{3}$$

M, c – pewne stałe dodatnie,

2) funkcja $F(t, u(t))$ jest określona dla $u(t) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$ i $F(t, u(t)) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$ i istnieje stała $k > 0$, taka że:

$$\|F(t, u_n(t)) - F(t, u_m(t))\| \leqslant k \|u_n(t) - u_m(t)\| \tag{4}$$

dla $u(t), u_n(t), u_m(t) \in D(A)$ oraz:

$$F(t, 0) = 0, \qquad \|F(t, u(t))\| \leqslant \overline{M} < \infty \qquad \text{dla } t \geqslant 0. \tag{5}$$

Zgodnie z ogólna teorią półgrup operatorów generowanych przez operator A, rozwiązanie równań (1)-(2) jest mocno ciągłym rozwiązaniem równania całkowego w postaci:

$$u(t) = T(t) u_0 + \int_0^t T(t-s) F(s, u(s+t_1))\, ds. \tag{6}$$

Każde mocno ciągłe rozwiązanie równania całkowego (6) nazywamy słabym rozwiązaniem równań (1)-(2).

Twierdzenie 1. *Jeżeli spełnione są podstawowe założenia (3)-(4) oraz:*

$$Mkt_1 e^{1-ct_1} < 1, \tag{7}$$

to istnieje rozwiązanie równania (6).

Dowód. Określamy ciąg kolejnych przybliżeń:

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= T(t)\,u_0,\\
u_2(t) &= T(t)\,u_0 + \int_0^t T(t-s)\,F(s, u_1(s+t_1))\,ds,\\
&\vdots\\
u_n(t) &= T(t)\,u_0 + \int_0^t T(t-s)\,F(s, u_{n-1}(s+t_1))\,ds.
\end{aligned} \tag{8}$$

Wykorzystując założenia twierdzenia, mamy:

$$\begin{aligned}
\|u_2(t) - u_1(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)\,F(s, u_1(s+t_1))\,ds \right\| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \|T(t-s)\|\,\|F(s, u_1(s+t_1))\|\,ds \leqslant \int_0^t Me^{-c(t-s)}k\,\|u_1(s+t_1)\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant Mk \int_0^t e^{-c(t-s)}\,\|T(s+t_1)\,u_0\|\,ds \leqslant M^2k \int_0^t e^{-c(t-s)}e^{-c(s+t_1)}\,\|u_0\|\,ds,
\end{aligned} \tag{9}$$

czyli:

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leqslant M^2k\,\|u_0\|\,e^{-ct_1}e^{-ct}t. \tag{10}$$

Następnie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\|u_3(t) - u_2(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)\left[F(s, u_2(s+t_1)) - F(s, u_1(s+t_1))\right] ds \right\| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \|T(t-s)\|\,k\,\|u_2(s+t_1) - u_1(s+t_1)\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t Me^{-c(t-s)}kM^2k\,\|u_0\|\,e^{-c(s+2t_1)}\,(s+t_1)\,ds,
\end{aligned} \tag{11}$$

czyli:

$$\|u_3(t) - u_2(t)\| \leqslant M^3k^2e^{-2ct_1}\,\|u_0\|\,e^{-ct}\frac{(t+t_1)^2}{2}. \tag{12}$$

Analogicznie:

$$\|u_4(t) - u_3(t)\| \leqslant M^4 k^3 e^{-3ct_1} \|u_0\| e^{-ct} \frac{(t+2t_1)^3}{3!}. \tag{13}$$

Stosując metodę indukcji matematycznej, można wykazać dla każdego $n > 1$ słuszność oszacowania:

$$\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\| \leqslant M^n k^{n-1} e^{-(n-1)ct_1} \|u_0\| e^{-ct} \frac{(t+(n-1)t_1)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{14}$$

Rozpatrzmy zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t), \tag{15}$$

gdzie:

$$a_n(t) = \frac{M^n k^{n-1} \|u_0\|}{e^{(n-1)ct_1}} \cdot \frac{1}{e^{ct}} \frac{(t+(n-2)t_1)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{16}$$

Niech t przyjmuje ustaloną dowolną wartość z przedziału $[0,\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{M^{n+1}k^n e^{(n-1)ct_1}}{e^{nct_1}M^n k^{n-1}}\cdot\frac{(t+(n-1)t_1)^n (n-1)!}{(t+(n-2)t_1)^{n-1} n!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{Mk}{e^{ct_1}}\cdot\frac{t+(n-1)t_1}{n}\cdot\left(\frac{t+(n-1)t_1}{t+(n-2)t_1}\right)^{n-1} =$$
$$= \frac{Mkt_1}{e^{ct_1}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t_1}{t+(n-2)t_1}\right)^{n-1} = Mkt_1 e^{-ct_1} e = Mkt_1 e^{1-ct_1}. \tag{17}$$

Na mocy założenia twierdzenia, otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)}\right| < 1 \qquad \text{dla każdego} \quad t \in [0,\infty). \tag{18}$$

Funkcje $u_n(t)$ są niemal jednostajnie zbieżne na $[0,\infty)$ do pewnej funkcji $u : [0,\infty) \to X$, która jest rozwiązaniem równania (6). □

Twierdzenie 2. *Jeżeli spełnione są podstawowe założenia (3), (4), (5) oraz:*

$$Mkt_1 e^{1-ct_1} < 1,$$

to dla słabego rozwiązania $u(t)$ równań (1)-(2) zachodzi:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| < \infty. \tag{19}$$

Dowód. Z (6), wykorzystując założenia twierdzenia, otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant \|T(t)\| \|u_0\| + \int_0^t \|T(t-s)\| \|F(s, u(s+t_1))\| ds \leqslant$$

$$\leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + \int_0^t M\overline{M}e^{-c(t-s)}ds = Me^{-ct}\|u_0\| + M\overline{M}e^{-ct}\int_0^t e^{cs}ds =$$

$$= Me^{-ct}\|u_0\| + M\overline{M}\frac{1}{c}\left(1-e^{-ct}\right) \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + \frac{M\overline{M}}{c}, \tag{20}$$

a więc dla każdego t:

$$\|u(t)\| \leqslant M\left[\|u_0\| + \frac{\overline{M}}{c}\right], \tag{21}$$

czyli:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant M\left[\|u_0\| + \frac{\overline{M}}{c}\right] < \infty. \tag{22}$$

□

Twierdzenie 3. *Jeżeli spełnione są podstawowe założenia (3)-(5) oraz:*

$$Mkt_1e^{1-ct_1} < 1 \tag{23}$$

i

$$Mk < c, \tag{24}$$

to słabe rozwiązanie równań (1)-(2) jest jednoznaczne.

Dowód. Przypuśćmy, że $\overline{u}(t)$ oraz $\overline{\overline{u}}(t)$ są dwoma różnymi rozwiązaniami równania (6). Niech:

$$v(t) = \overline{u}(t) - \overline{\overline{u}}(t). \tag{25}$$

Z (6) mamy:

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)\left[F(s, \overline{u}(s+t_1)) - F\left(s, \overline{\overline{u}}(s+t_1)\right)\right] ds. \tag{26}$$

Przechodząc do normy i wykorzystując założenia (3), (4), otrzymujemy:

$$\|v(t)\| \leqslant \int_0^t \|T(t-s)\| \left\|F(s, \overline{u}(s+t_1)) - F\left(s, \overline{\overline{u}}(s+t_1)\right)\right\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t Me^{-c(t-s)}k\left\|\overline{u}(s+t_1) - \overline{\overline{u}}(s+t_1)\right\| ds, \tag{27}$$

a więc:

$$\|v(t)\| \leqslant Mk \int\limits_0^t e^{-c(t-s)} \|v(s+t_1)\| \, ds, \tag{28}$$

a stąd dla każdego t:

$$\|v(t)\| \leqslant Mk \int\limits_0^t e^{-c(t-s)} ds \cdot \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|v(s+t_1)\| \leqslant \frac{Mk}{c} \sup_{t \geqslant 0} \|v(t)\|, \tag{29}$$

czyli:

$$\sup_{t \geqslant 0} \|v(t)\| \leqslant \frac{Mk}{c} \sup_{t \geqslant 0} \|v(t)\|. \tag{30}$$

Z (30) otrzymujemy:

$$\left(1 - \frac{Mk}{c}\right) \sup_{t \geqslant 0} \|v(t)\| \leqslant 0. \tag{31}$$

Z założenia twierdzenia mamy:

$$1 - \frac{Mk}{c} > 0, \tag{32}$$

a więc z (31) i (32) otrzymujemy:

$$\sup_{t \geqslant 0} \|v(t)\| = 0, \tag{33}$$

a stąd jednoznaczność słabego rozwiązania równań (1)-(2) w normie przestrzeni X.

□

Twierdzenie 4. *Jeżeli spełnione są założenia Twierdzenia 3, to słabe rozwiązanie równań (1)-(2) jest ciągle zależne od warunków początkowych.*

Dowód. Niech $\overline{u}, \overline{\overline{u}}$ będą rozwiązaniami równania (6) odpowiednio z warunkami początkowymi $\overline{u_0}$, $\overline{\overline{u_0}}$. Mamy:

$$\overline{u}(t) = T(t)\overline{u_0} + \int\limits_0^t (t-s) F(s, \overline{u}(s+t_1)) \, ds, \tag{34}$$

$$\overline{\overline{u}}(t) = T(t)\overline{\overline{u_0}} + \int\limits_0^t (t-s) F\left(s, \overline{\overline{u}}(s+t_1)\right) ds. \tag{35}$$

Odejmując stronami, przechodząc do normy i wykorzystując założenia, otrzymujemy dla każdego $t \geqslant 0$ poniższe nierówności:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\overline{u}(t) - \overline{\overline{u}}(t)\right\| \leqslant \|T(t)\| \left\|\overline{u_0} - \overline{\overline{u_0}}\right\| + \\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s)\| \left[\left\|F(s, \overline{u}(s+t_1)) - F\left(s, \overline{\overline{u}}(s+t_1)\right)\right\|\right] ds \leqslant \\
&\quad \leqslant Me^{-ct}\left\|\overline{u_0} - \overline{\overline{u_0}}\right\| + \int_0^t Me^{-c(t-s)} k \left\|\overline{u}(s+t_1) - \overline{\overline{u}}(s+t_2)\right\| ds \leqslant \\
&\quad \leqslant Me^{-ct}\left\|\overline{u_0} - \overline{\overline{u_0}}\right\| + \frac{Mk}{c}\sup_{t \geqslant 0}\left\|\overline{u}(t) - \overline{\overline{u}}(t)\right\|, \qquad (36)
\end{aligned}
$$

czyli:

$$
\sup_{t \geqslant 0}\left\|\overline{u}(t) - \overline{\overline{u}}(t)\right\| \leqslant M\left\|\overline{u_0} - \overline{\overline{u_0}}\right\| + \frac{Mk}{c}\sup_{t \geqslant 0}\left\|\overline{u}(t) - \overline{\overline{u}}(t)\right\|, \qquad (37)
$$

a stąd:

$$
\left(1 - \frac{Mk}{c}\right)\sup_{t \geqslant 0}\left\|\overline{u}(t) - \overline{\overline{u}}(t)\right\| \leqslant M\left\|\overline{u_0} - \overline{\overline{u_0}}\right\|. \qquad (38)
$$

Ponieważ:

$$
\left(1 - \frac{Mk}{c}\right) > 0, \qquad (39)
$$

więc:

$$
\sup_{t \geqslant 0}\left\|\overline{u}(t) - \overline{\overline{u}}(t)\right\| \leqslant \frac{M}{1 - \frac{Mk}{c}}\left\|\overline{u_0} - \overline{\overline{u_0}}\right\|. \qquad (40)
$$

□

Bibliografia

1. Ames W.F.: *Non-linear partial differential equations.* Academic Press, New York 1967.
2. Belleni-Morante A.: *Applied semi-groups and evolution equations.* Clarendon Press, Oxford 1982.
3. Bhatic N.P., Szego G.P.: *Dynamical systems stability theory and applications.* Lecture Notes in Math. **35**, Springer, New York 1967.
4. Szarski J.: *Differential inequalities.* PWN, Warszawa 1967.

Abstract

In the work the solutions of the abstract differential equation with advanced argument in the form:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t + t_1)) \qquad \text{for } t \geqslant 0$$

were investigated. Under the assumption that operator A is infinitesimal generator of strongly continuous semigroup of operators $T(t)$, $t \geqslant 0$ and Lipschitz condition on the nonlinearly conditions for existence and uniqueness of solution were obtained. The main result of the work is:

If:

a) $\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}, \quad M, c > 0, \quad t \geqslant 0,$

b) $F(t, u)$ satisfies Lipschitz condition with constant k and

$$\|F(t, u(t))\| \leqslant \overline{M} < \infty,$$

c) $Mkt_1 e^{1-ct_1} < 1,$

under above assumptions the continuous solution of equation exists and is unique. The work includes four theorems.