ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2010

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 92 Nr kol. 1829

Danuta JAMA
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska

STABILNOŚĆ ABSTRAKCYJNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z WYPRZEDZONYM ARGUMENTEM

Streszczenie. W artykule badane są jakościowe własności pewnych rozwiązań abstrakcyjnych słabo nieliniowych równań różniczkowych z wyprzedzonym argumentem. Dowodzi się stabilności rozwiązań w sensie Mowczana.

ON THE STABILITY OF THE ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION WITH ADVANCED ARGUMENT

Summary. This paper treats the differential equation with the accelerated argument. This is the weak solution of the equation stable in the Mowczan's sense.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D20, 47D03.
Wpłynęło do Redakcji 12.04.2010 r.

Rozważmy równanie w postaci:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t+t_1)) \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

gdzie: $u_0, u(t), F(t, u(t+t_1)) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$, $F(t, u(t+t_1))$ – zadana funkcja, $u(t)$ – rozwiązanie równania, t_1 – ustalona wartość dodatnia, u_0 – ustalony element przestrzeni X. Równanie rozważa się w przestrzeni Banacha X z normą $\|\cdot\|$.

Założenia podstawowe:

1) operator A jest generatorem mocno ciągłej półgrupy $\{T(t),\ t \geqslant 0\}$, takiej że:

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct} \qquad \text{dla } \ t \geqslant 0, \tag{3}$$

M, c – pewne stałe dodatnie,

2) funkcja $F(t, u(t))$ jest określona dla $u(t) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$ i $F(t, u(t)) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$ oraz istnieje stała $k > 0$, taka że:

$$\|F(t, u_n(t)) - F(t, u_m(t))\| \leqslant k\|u_n(t) - u_m(t)\| \tag{4}$$

dla $u(t)$, $u_n(t)$, $u_m(t) \in D(A)$ oraz $F(t, 0) = 0$:

$$\|F(t, u(t))\| \leqslant \overline{M} < \infty \qquad \text{dla } t \geqslant 0. \tag{5}$$

Zgodnie z ogólna teorią półgrup operatorów generowanych przez operator A, rozwiązanie równań (1)-(2) jest mocno ciągłym rozwiązaniem równania całkowego w postaci:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s, u(s+t_1))\,ds. \tag{6}$$

Każde mocno ciągłe rozwiązanie równania całkowego (6) nazywamy słabym rozwiązaniem równań (1)-(2).

Twierdzenie 1. *Jeżeli spełnione są podstawowe założenia (3), (4), (5) oraz:*

a) $Mkt_1e^{1-ct_1} < 1$,

b) $Mk < c$,

to rozwiązanie równań (1)-(2) jest stabilne w sensie Mowczana.

Dowód. Wykorzystując założenia podstawowe (4), (5), mamy:

$$\|F(t,u(t))\| = \|F(t,u(t)) - F(t,0)\| \leqslant k\,\|u(t)\|. \tag{7}$$

Z (6) otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant \|T(t)\|\,\|u_0\| + \int_0^t \|T(t-s)\|\,\|F(s,u(s+t_1))\|\,ds. \tag{8}$$

Ponieważ:

$$\|F(s,u(s+t_1))\| \leqslant k\,\|u(s+t_1)\|, \tag{9}$$

więc opierając się na założeniu podstawowym (3) z (8) dla każdego $t \geqslant 0$, otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\,\|u_0\| + \int_0^t Me^{-c(t-s)}k\,\|u(s+t_1)\|\,ds. \tag{10}$$

Stąd:

$$\|u(t)\| \leqslant M\,\|u_0\| + Mk\int_0^t e^{-c(t-s)}\,\|u(s+t_1)\|\,ds, \tag{11}$$

czyli:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant M\,\|u_0\| + Mk\sup_{t\geqslant 0}\|u(t+t_1)\|\,\frac{1}{c} \leqslant M\,\|u_0\| + \frac{Mk}{c}\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\|. \tag{12}$$

Z (12) mamy:

$$\left(1-\frac{Mk}{c}\right)\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant M\,\|u_0\|, \tag{13}$$

ale:

$$1-\frac{Mk}{c} > 0, \tag{14}$$

więc:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant M_1\,\|u_0\|, \tag{15}$$

gdzie $M_1 = \frac{Mc}{c-Mk}$. □

Twierdzenie 2. *Jeżeli spełnione są założenia Twierdzenia 1, to rozwiązanie zerowe równań (1)-(2) jest globalnie asymptotycznie stabilne w sensie Mowczana.*

Dowód. Wprowadzamy:

$$\varphi(t) = \sup_{s \geqslant t} \|u(s)\|. \tag{16}$$

Z twierdzenia (1) wynika, że funkcja $\varphi(t)$ jest ograniczona i nierosnąca, przechodząc do normy i wykorzystując założenia z (6), otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + \int_0^t Me^{-c(t-s)}k\|u(s+t_1)\|\,ds. \tag{17}$$

Niech $t_0 > 0$ będzie ustalone, wtedy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + \int_0^{t_0} Me^{-c(t-s)}k\|u(s+t_1)\|\,ds + \int_{t_0}^t Me^{-c(t-s)}k\|u(s+t_1)\|\,ds. \tag{18}$$

Z (15), (16) i (18) otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + MM_1k\int_0^{t_0} e^{-c(t-s)}\|u_0\|\,ds + \int_{t_0}^t Me^{-c(t-s)}k\varphi(t_0)\,ds. \tag{19}$$

Całkując i dokonując pewnych oszacowań dla każdego $t \geqslant 0$, mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\| + \frac{MM_1k}{c}e^{-c(t-t_0)}\|u_0\| + \frac{Mk}{c}\varphi(t_0), \tag{20}$$

a więc:

$$\sup_{s \geqslant t}\|u(s)\| \leqslant \sup_{t \geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant Me^{-ct}\|u_0\|\left[1 + \frac{M_1k}{c}e^{ct_0}\right] + \frac{Mk}{c}\varphi(t_0). \tag{21}$$

Z (21) otrzymujemy:

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{s \geqslant t}\|u(s)\| \leqslant \frac{Mk}{c}\varphi(t_0), \tag{22}$$

czyli dla każdego t_0:

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) \leqslant \frac{Mk}{c}\varphi(t_0). \tag{23}$$

Z założenia b) Twierdzenia 1:

$$\frac{Mk}{c} < 1. \tag{24}$$

Oznaczając:

$$\lambda_0 = \frac{Mk}{c}, \tag{25}$$

dla każdego $t_0 \in [0, \infty)$ zachodzi:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) \leqslant \lambda_0 \varphi(t_0). \tag{26}$$

Przypuśćmy, że:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \gamma > 0. \tag{27}$$

Ponieważ $\lambda_0 < 1$, więc można wybrać $\varepsilon > 0$ i $t_0 > 0$, takie że:

$$\lambda_0 (1+\varepsilon) < 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi(t_0) \leqslant \gamma(1+\varepsilon), \tag{28}$$

a stąd:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) \leqslant \lambda_0 \varphi(t_0) \leqslant \lambda_0 \gamma (1+\varepsilon) < \gamma, \tag{29}$$

co jest sprzeczne z przyjętym założeniem, że: $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \gamma$, a więc:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0. \tag{30}$$

Z określenia $\varphi(t)$ wynika, że:

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0, \tag{31}$$

z (15) i (31) wynika teza twierdzenia. □

Twierdzenie 3. *Jeżeli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

a) $\|T(t)\| \leqslant M$ *dla* $t \geqslant 0$, M *– pewna stała dodatnia,*

b) istnieje nieujemna funkcja $k(t)$, *taka że:*

$$F(t, u(t+t_1)) \leqslant k(t) \|u(t+t_1)\|,$$

c) $1 - M \int\limits_0^\infty k(t)\,dt = M_1 > 0,$

to zerowe rozwiązanie równań (1)-(2) jest stabilne w sensie Mowczana.

Dowód. Przechodząc do normy w (6) i wykorzystując założenia twierdzenia dla każdego $t \geqslant 0$, mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant M\|u_0\| + M\int_0^t k(s)\|u(s+t_1)\|\,ds, \tag{32}$$

stąd:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant M\|u_0\| + M\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\|\int_0^\infty k(s)\,ds, \tag{33}$$

czyli:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\|\left[1 - M\int_0^\infty k(s)\,ds\right] \leqslant M\|u_0\|. \tag{34}$$

Kładąc:

$$M_2 = \frac{M}{M_1}, \tag{35}$$

mamy:

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u\| \leqslant M_2\|u_0\|. \tag{36}$$

□

Bibliografia

1. Ames W.F.: *Non-linear partial differential equations.* Academic Press, New York 1967.
2. Miyadera J.: *Perturbation theory for semi-groups of operators.* Tokohu Math. J. **24** (1972), 251–261.
3. Pazy A.: *Semi groups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York 1980.
4. Schwartz L.: *Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups.* Tate Inst. Fund. Research, Bombay 1958.
5. Szarski J.: *Differential inequalities.* PWN, Warszawa 1967.

Abstract

In the work stability of the solutions of abstract differential equations in the form:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t + t_1)),$$

$$u(0) = u_0$$

in the sense of Movchan was investigated under assumption that operator A is infinitesimal generator of strongly continuous semi-group of transit operators $T(t)$, $t \geqslant 0$ the result was obtained. The result:

The solution of considered equation is stable in Movchan sense, if:

a) $\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}$, $M, c > 0$, $t > 0$,

b) $F(t, u(t)) \in D(A)$ and $F(t, u(t))$ satisfies Lipschitz condition with constant k,

c) $F(t, 0) = 0$, $\|F(t, u(t))\| \leqslant \overline{M} < \infty$, $t \geqslant 0$,

d) $Mkt_1e^{1-ct_1} < 1$,

e) $Mk < c$.