ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2010
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 92 Nr kol. 1829

Danuta JAMA, Robert CZECH, Michał SZOPA, Roman WITUŁA
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska

ASYMPTOTYCZNA STABILNOŚĆ W SENSIE KOZINA ROZWIĄZAŃ ABSTRAKCYJNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Streszczenie. W artykule badane są jakościowe własności pewnych rozwiązań abstrakcyjnych słabo nieliniowych równań różniczkowych z przyspieszonym argumentem. Dowodzi się stabilności słabych rozwiązań w sensie Lapunowa i Kozina.

ASYMPTOTIC STABILITY IN THE KOZIN SENSE OF SOLUTIONS OF ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary. This paper treats the weak non-linear differential equation with the accelerated argument. This is the weak solution of the equation stable in the Lapunow's and Kozin's sense.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D20, 47D03.
Wpłynęło do Redakcji 12.04.2010 r.

Rozważmy równanie w postaci:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t+t_1)) \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

gdzie: $u_0, u(t), F(t, u(t+t_1)) \in D(A)$ dla $t \geqslant 0$, $F(t, u(t+t_1))$ – zadana funkcja, $u(t)$ – rozwiązanie równania, t_1 – ustalona wartość dodatnia, u_0 – ustalony element przestrzeni X. Równanie rozważa się w przestrzeni Banacha X z normą $\|\cdot\|$.

Operator A jest generatorem mocno ciągłej półgrupy $\{T(t),\ t \geqslant 0\}$. Zgodnie z ogólna teorią półgrup operatorów generowanych przez operator A, rozwiązanie równań (1)-(2) jest mocno ciągłym rozwiązaniem równania całkowego w postaci:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s, u(s+t_1))\,ds. \tag{3}$$

Każde mocno ciągłe rozwiązanie równania całkowego (6) nazywamy słabym rozwiązaniem równań (1)-(2).

Twierdzenie 1. *Jeżeli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

a) $\|T(t)\| \leqslant Me^{-ct}$ *dla* $t \geqslant 0$, M, c *– pewne stałe dodatnie,*

b) istnieje nieujemna funkcja $k(t)$, *taka że:*

$$\|F(t, u(t+t_1))\| \leqslant k(t)\,\|u(t+t_1)\|$$

oraz:

c) $1 - M\int_0^\infty k(t)\,dt = M_1 > 0$,

to słabe rozwiązanie równań (1)-(2) jest stabilne w sensie Kozina.

Dowód. Weźmy dowolnie małe $\varepsilon > 0$ i ℓ na tyle duże, aby:

$$\int_\ell^\infty k(s)\,ds < \varepsilon, \tag{4}$$

gdzie $\ell > 0$. Wykorzystując równanie całkowe w postaci:

$$u(t) = T(t-\ell)u(\ell) + \int_\ell^\infty T(t-s)F(s, u(s+t_1))\,ds, \tag{5}$$

przechodząc do normy i wykorzystując założenia, mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant \overline{M}e^{-ct}\|u(\ell)\| + \int_{\ell}^{t} \|T(t-s)\| \, \|F(s, u(s+t_1))\| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \overline{M}e^{-ct}\|u(\ell)\| + M\int_{\ell}^{t} k(s)\, \|u(s+t_1)\| \, ds, \quad (6)$$

gdzie $\overline{M} = Me^{c\ell}$. Ponieważ:

$$\|u(t+t_1)\| \leqslant \sup_{t\geqslant 0} \|u(t+t_1)\| \leqslant \sup_{t\geqslant 0} \|u(t)\|, \quad (7)$$

więc wykorzystując Twierdzenie 3 z pracy [6], kładąc $M_2 = \frac{M}{M_1}$, mamy:

$$\|u(t+t_1)\| \leqslant M_2 \|u_0\| \quad (8)$$

oraz:

$$\|u(\ell)\| \leqslant M_2 \|u_0\|. \quad (9)$$

Z (6), (7), (8), (9) otrzymujemy:

$$\|u(t)\| \leqslant \overline{M}M_2 \|u_0\| e^{-ct} + MM_2 \|u_0\| \varepsilon. \quad (10)$$

Przy $t \to \infty$ z powyższej nierówności mamy:

$$\|u(t)\| \leqslant MM_2 \|u_0\| \varepsilon. \quad (11)$$

Dla $\varepsilon \to 0$ otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Niech teraz X będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i normą generowaną przez iloczyn skalarny:

$$\|u(t)\|^2 = \langle u(t), u(t) \rangle \quad (12)$$

operator $A : X \to X$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli istnieje rozwiązanie równań (1)-(2) oraz:*

a) $\langle Au(t), u(t) \rangle \leqslant 0$ *dla* $t \geqslant 0$,

b) $\langle u(t), F(t, u(t+t_1)) \rangle \leqslant 0$ *dla* $t \geqslant 0$,

to słabe rozwiązanie równań (1)-(2) jest ograniczone oraz rozwiązanie zerowe jest stabilne w sensie Lapunova.

Dowód. Wprowadzamy funkcję pomocniczą:

$$v(t) = \left(1 + \|u(t)\|^2\right)^{-1}, \tag{13}$$

wówczas:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(1 + \|u(t)\|^2\right)^{-2} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2. \tag{14}$$

Mamy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle u(t), u(t)\rangle = 2\langle \frac{d}{dt}u(t), u(t)\rangle = \\ = 2\langle Au(t) + F(t, u(t+t_1)), u(t)\rangle = \\ = 2\left[\langle Au(t), u(t)\rangle + \langle F(t, u(t+t_1)), u(t)\rangle\right] \leqslant 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Z (14) i (15) otrzymujemy:

$$\frac{dv}{dt} \geqslant 0. \tag{16}$$

Z (13) mamy:

$$v(t) \geqslant d > 0, \tag{17}$$

gdzie d jest stałą dodatnią, oraz:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0 \qquad \text{gdy } \|u(t)\| \to \infty, \tag{18}$$

co jest sprzeczne z (16), (17), a więc istnieje pewna stała m, taka że dla rozwiązania równań (1)-(2):

$$\sup_{t\geqslant 0} \|u(t)\| \leqslant m. \tag{19}$$

Z (16) wynika:

$$v(t) \geqslant v(0) \qquad \text{na } [0,\infty), \tag{20}$$

czyli:

$$\frac{1}{1 + \|u(t)\|^2} \geqslant \frac{1}{1 + \|u(0)\|^2}, \tag{21}$$

a stąd:

$$\|u(t)\| \leqslant \|u(0)\|. \tag{22}$$

$\square$

Bibliografia

1. Ames W.F.: *Non-linear partial differential equations.* Academic Press, New York 1967.
2. Belleni-Morante A.: *Applied semi-groups and evolution equations.* Clarendon Press, Oxford 1982.
3. Bellman R.: *The boundedness of solutions of infinite systems of linear diferential equations.* Duke Math. J. **14** (1947), 695–706.
4. Bellrnan R., Cooke K.L.: *Differential-difference equations.* Academic Press, New York l963.
5. Bhatic N.P., Szego G.P.: *Dynamical systems stability theory and applications.* Lecture Notes in Math. **35**, Springer, New York l967.
6. Jama D.: *Stabilność abstrakcyjnych równań różniczkowych z wyprzedzonym argumentem.* Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mat.-Fiz. **92** (2010), 121–127.

Abstract

We consider the equation in the form:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t, u(t + t_1)),$$

$$u(0) = u_0$$

defined in the Banach space X. Conditions for stability of weak solution in the sense of Kozin are established. The paper of attention to the weakly non-linear differential equation with the accelerated argument. This is the weak solution of the equation stable in the Lapunow's and Kozin's sense.