ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 91 Nr kol. 1652

Edyta HETMANIOK, Edward KWAŚNIEWICZ

MODELE BOZONOWE STRUKTURY JĄDRA ATOMOWEGO

Streszczenie. W pracy dokonano przeglądu bozonowych modeli struktury jąder atomowych oraz nakreślono perspektywę badania struktury jąder parzystych w zredukowanych przestrzeniach bozonowych.

BOSON MODELS OF NUCLEAR STRUCTURE

Summary. Boson models for the description the structure of nuclei are reviewed. A new method to describe nuclei in the truncated boson spaces is stressed.

1. Wstęp

Jednym z fundamentalnych problemów, z którym od dawna zmagają się fizycy, jest zagadnienie wielu ciał. Problem wielu ciał dotyczy dużych ciał – takich jak układy planetarne i układów mikroskopowych – takich jak cząstki naładowane elektrycznie, układy wielonukleonowe czy wielocząsteczkowe. Podobnie jak nie można podać analitycznego rozwiązania klasycznego problemu wielu ciał, nie można analitycznie rozwiązać tego zagadnienia na gruncie mechaniki kwantowej.

Wybitnym przykładem mikroskopowego układu wielu oddziałujących ciał jest jądro atomowe - konglomerat wielu nukleonów oddziałujących siłami jądrowymi. W przypadku takich układów zadanie komplikuje się jeszcze bardziej, ponieważ w przeciwieństwie do układów makroskopowych oddziałujących siłami grawitacyjnymi albo cząstek naładowanych oddziałujących siłami elektromagnetycznymi nie do końca poznana jest natura silnych oddziaływań jądrowych. Dlatego, niezależnie od stopnia znajomości natury oddziaływań silnych, do opisu właściwości wielonukleonowych układów jądrowych zmuszeni jesteśmy stosować metody przybliżone.

Podstawowym mikroskopowym modelem struktury jąder atomowych jest model powłokowy. Dzięki uwzględnieniu wszystkich stopni swobody nukleonów można w zasadzie wyprowadzić własności jąder ze złożenia ruchów indywidualnych nukleonów w uśrednionym fenomenologicznym potencjale jądrowym. Jednakże wraz ze wzrostem liczby nukleonów w jądrze gwałtownie rosną rozmiary przestrzeni modelu powłokowego osiągając astronomiczne rozmiary. Pomimo iż diagonalizacja Hamiltonianu jądrowego w tak ogromnej przestrzeni jest już możliwa dzięki gwałtownemu rozwojowi technologii komputerowej [17], to odczytanie podstawowych własności jąder z funkcji falowych składających się z $10^{14} - 10^{18}$ współczynników (w przypadku jąder z powłoki $1p0f$) jest problematyczne. Dlatego niezależnie od tego, czy obliczenia w tak ogromnych przestrzeniach modelu powłokowego są wykonalne czy też nie, zachodzi konieczność poszukiwania modeli opisujących strukturę jąder atomowych w przestrzeniach, których rozmiary są radykalnie zredukowane względem rozmiarów przestrzeni modelu powłokowego. W ostatnich dwóch dekadach intensywnie są rozwijane uproszczone wersje modelu powłokowego, które zachowując podstawowe założenia tego modelu opisują strukturę jąder w zredukowanych przestrzeniach modelu powłokowego [1, 11, 16, 28, 31].

Uproszczone wersje modelu powłokowego dzielimy na modele fermionowe, bozonowe i bozonowo-fermionowe. W modelach fermionowych zredukowane przestrzenie rozpinane są przez skorelowane grupy nukleonów (np. pary Coopera, pary kolektywne) [22, 23, 30]. W modelach bozonowych strukturę jąder opisuje się w przestrzeniach rozpinanych przez kilka bo-

zonów, korespondujących z odpowiednimi strukturami dwunukleonowymi (kolektywnymi parami) [2, 19, 29]. Natomiast w modelach bozonowo-fermionowych strukturę jąder opisuje się w przestrzeniach bozonowo-fermionowych, rozpinanych przez kilka bozonów sprzężonych z nukleonem [9, 10, 12, 13, 18].

Pracę nad modelami, w których przestrzenie rozpinane są przez bozony, doprowadziły do powstania różnych wersji modelu bozonowego znanych jako Modele Oddziałujących Bozonów (Interacting Boson Models – IBM). W niniejszej pracy przedstawione są najważniejsze etapy rozwoju tych modeli wraz z algebraicznymi podstawami ich formułowania.

2. Model oddziałujących bozonów – IBM1

Model oddziałujących bozonów 1 (IBM1) opisuje własności jąder parzysto-parzystych, w którym nukleonowe pary (bez rozróżniania protonów od neutronów) są traktowane jako bozony [2, 19, 29].

Elementami składowymi bazy modelu IBM1 są bozony o wypadkowym momencie pędu równym 0, 2 i dodatniej parzystości, czyli bozony s ($J^\pi = 0^+$) i d ($J^\pi = 2^+$), które są kreowane bądź anihilowane przez operatory

$$\begin{aligned} &s^\dagger, d^\dagger_\mu \quad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2), \\ &s, d_\mu \quad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2). \end{aligned} \tag{1}$$

Powyższych sześć operatorów (jeden operator s i pięć operatorów d) oznaczmy następująco

$$b^\dagger_\alpha, b_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 6). \tag{2}$$

Spełniają one relacje komutacji Bosego

$$\begin{aligned} &[b_\alpha, b^\dagger_{\alpha'}] = \delta_{\alpha\alpha'}, \\ &[b_\alpha, b_{\alpha'}] = [b^\dagger_\alpha, b^\dagger_{\alpha'}] = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Stany bazowe konstruowane za pomocą tych operatorów mają następującą postać

$$\frac{1}{\mathcal{N}} b^\dagger_\alpha b^\dagger_{\alpha'} \ldots |0\rangle, \tag{4}$$

gdzie: $\mathcal{N}$ jest czynnikiem normalizacyjnym, a $|0\rangle$ oznacza stan próżni. Liczba operatorów kreacji we wzorze (4) jest równa liczbie dopuszczalnych bozonów, czyli liczbie par, które można utworzyć z nukleonów walencyjnych dla danego jądra. Na przykład, dla jądra ${}^{152}_{62}Sm_{90}$ liczbami magicznymi, oznaczającymi zamknięte powłoki, są: 50 dla protonów i 82 dla neutronów. Oznacza to, że jądro ${}^{152}_{62}Sm_{90}$ posiada 12 walencyjnych protonów i 8 walencyjnych neutronów, co daje 10 par.

Za pomocą operatorów kreacji i anihilacji definiowany jest operator Hamiltona, który w ogólnej postaci zapisujemy

$$H = E_0 + \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha b^\dagger_\alpha b_\alpha + \sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} \frac{1}{2} u_{\alpha\alpha'\beta\beta'} b^\dagger_\alpha b^\dagger_{\alpha'} b_\beta b_{\beta'}. \tag{5}$$

Powyższy wzór zawiera człony energii jednobozonowych oraz człony oddziaływań dwuciałowych bozon-bozon. W ostatnich latach zapis ten uzupełniono o człony oddziaływań trzy- i czterociałowych (np. [19]).

Chociaż nie jest to konieczne, wygodnie jest wyrazić Hamiltonian (5) w języku teorii grup. W tym celu z operatorów (2) konstruuje się operatory

$$G_{\alpha\beta} = b^\dagger_\alpha b_\beta, \tag{6}$$

które spełniają następujące związki komutacyjne

$$[G_{\alpha\beta}, G_{\gamma\delta}] = G_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - G_{\gamma\beta}\delta_{\delta\alpha}, \tag{7}$$

wraz z tożsamością Jacobiego

$$[G_{\alpha\beta}, [G_{\gamma\delta}, G_{\mu\nu}]] + [G_{\gamma\delta}, [G_{\mu\nu}, G_{\alpha\beta}]] + [G_{\mu\nu}, [G_{\alpha\beta}, G_{\gamma\delta}]] = 0. \tag{8}$$

Z uwagi na to, że transformacje unitarne między sześcioma operatorami (2) definiującymi IBM1 generują grupę $U(6)$, zatem operatory (6) tworzą algebrę Liego grupy $U(6)$. Za pomocą tych operatorów Hamiltonian (5) można wyrazić w postaci

$$H = E_0 + \sum_{\alpha\beta} \varepsilon'_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} \frac{1}{2} u_{\alpha\alpha'\beta\beta'} G_{\alpha\beta} G_{\alpha'\beta'}. \tag{9}$$

Chociaż Hamiltonian (9) nie posiada symetrii grupy $U(6)$, to znaczy nie komutuje z niezmienniczymi operatorami Casimira tej grupy, to jednak

w pewnych przypadkach można uważać grupę $U(6)$ za grupę dynamiczną modelu IBM1 (na temat grup dynamicznych patrz Przypisy). Zakładając pewne szczególne typy oddziaływań w Hamiltonianie (9) można skonstruować alternatywne Hamiltoniany IBM1 za pomocą kombinacji liniowej operatorów Casimira niezmienniczych podgrup grupy $U(6)$.

Arima i Iachello [3–5] wykazali, że trzy różne typy dynamicznej symetrii $U(6)$ występują w IBM1 i wiążą się z następującymi łańcuchami podgrup niezmienniczych grupy $U(6)$

$$\begin{array}{ll} (I) & U(6) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2), \\ (II) & U(6) \supset SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2), \\ (III) & U(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2). \end{array} \tag{10}$$

Hamiltoniany korespondujące z powyższymi łańcuchami grup są kombinacją liniową operatorów Casimira grup zawartych odpowiednio w łańcuchach I, II lub III. Można zatem analitycznie rozwiązać zagadnienie własne Hamiltonianów typu I, II lub III, a ich wartości własne są kombinacją liniową wartości własnych operatorów Casimira grup tworzących dany Hamiltonian.

Hamiltoniany o symetrii I, II lub III poprawnie przybliżają strukturę widm energetycznych tylko wybranych grup jąder atomowych. Na przykład strukturę jąder ${}^{110}_{48}Cd_{62}$, ${}^{156}_{64}Gd_{92}$ i ${}^{196}_{78}Pb_{118}$ opisują odpowiednio Hamiltoniany o symetrii I, II i III. W innych przypadkach należy diagonalizować Hamiltonian (5) numerycznie w przestrzeniach rozpinanych przez stany (4).

3. Protonowo-neutronowy model oddziałujących bozonów – IBM2

Protonowo-neutronowy model oddziałujących bozonów (IBM2) [2,7,19, 29] daje lepszy opis struktury jąder parzysto-parzystych poprzez wyraźne zaznaczenie protonowych i neutronowych stopni swobody. Wprowadzenie tej modyfikacji tłumaczy się różnicami dwuciałowych korelacji w przypadku układów o wypadkowym izospinie $T = 0$ oraz $T = 1$. Głównymi elementa-

mi budującymi przestrzeń modelu IBM2 są protonowe i neutronowe pary traktowane jako bozony.

Przestrzeń modelu IBM2 rozpinają bozony s i d. Podobnie jak w przypadku modelu IBM1 wprowadźmy operatory kreacji i anihilacji bozonu, pamiętając o rozróżnieniu par protonowych (π) od par neutronowych (ν)

$$\begin{aligned} &s_\pi^\dagger, d_{\pi\mu}^\dagger \quad ; s_\pi, d_{\pi\mu}, \\ &s_\nu^\dagger, d_{\nu\mu}^\dagger \quad ; s_\nu, d_{\nu\mu}. \end{aligned} \tag{11}$$

Powyższych sześć operatorów kreacji i anihilacji (jeden operator s i pięć operatorów d) dla każdego rodzaju par oznaczmy następująco

$$b_{\rho,\alpha}^\dagger \quad ; b_{\rho,\alpha} \quad ; \rho = \pi, \nu; \alpha = 1, \ldots, 6. \tag{12}$$

Operatory te spełniają relacje komutacji

$$\begin{aligned} &[b_{\rho\alpha}, b_{\rho'\alpha'}^\dagger] = \delta_{\rho\rho'}\delta_{\alpha\alpha'}, \\ &[b_{\rho\alpha}, b_{\rho'\alpha'}] = [b_{\rho\alpha}^\dagger, b_{\rho'\alpha'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Bazę rozważanego modelu tworzą zatem następujące stany, skonstruowane za pomocą protonowych i neutronowych bozonów

$$\frac{1}{\mathcal{N}} b_{\pi\alpha}^\dagger b_{\pi\alpha'}^\dagger, \ldots b_{\nu\alpha}^\dagger b_{\nu\alpha'}^\dagger, \ldots |0\rangle, \tag{14}$$

gdzie: $\mathcal{N}$ oznacza czynnik normalizacyjny, a $|0\rangle$ reprezentuje stan próżni. Liczba dopuszczalnych protonowych i neutronowych bozonów, czyli odpowiednio N_π i N_ν, równa jest liczbie walencyjnych par protonów i neutronów. Na przykład, we wspomnianym już wcześniej przypadku jądra ${}^{152}_{62}Sm_{90}$ najbliższymi liczbami magicznymi, oznaczającymi zamknięte powłoki, są: 50 dla protonów i 82 dla neutronów. Jądro ${}^{152}_{62}Sm_{90}$ posiada zatem $N_\pi = \frac{1}{2}(62-50) = 6$ bozonów protonowych oraz $N_\nu = \frac{1}{2}(90-82) = 4$ bozonów neutronowych.

Operator Hamiltona modelu IBM2 zapisany przy wykorzystaniu operatorów (12) jest postaci

$$H = H_\pi + H_\nu + V_{\pi\nu}, \tag{15}$$

gdzie

$$H_\rho = E_0^\rho + \sum_\alpha \varepsilon_\alpha^\rho b_{\rho\alpha}^\dagger b_{\rho\alpha} + \sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} \frac{1}{2} u_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^\rho b_{\rho\alpha}^\dagger b_{\rho\alpha'}^\dagger b_{\rho\beta} b_{\rho\beta'}; \qquad \rho = \pi, \nu,$$

$$V_{\pi\nu} = \sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} w_{\alpha\alpha'\beta\beta'} b_{\pi\alpha}^\dagger b_{\pi\beta}^\dagger b_{\nu\alpha'} b_{\nu\beta'}. \tag{16}$$

Analogicznie jak w modelu IBM1 także model IBM2 wygodnie jest opisać używając formalizmu algebraicznego. Strukturą algebraiczną, która oddaje założenia modelu IBM2, jest algebra Liego grupy $U(6)$, a dokładniej suma prosta algebr Liego grupy protonowej $U_\pi(6)$ i grupy neutronowej $U_\nu(6)$

$$\mathcal{G} = U_\pi(6) \oplus U_\nu(6). \tag{17}$$

Własność (17) wynika z faktu komutowania operatorów protonowych i neutronowych.

Dla rozróżnienia par protonowych i neutronowych wygodnie jest wprowadzić formalizm podobny do formalizmu izospinowego rozróżniającego dwa stany ładunkowe nukleonu. Jest to tzw. F-spin [19], charakteryzowany przez stany

$$\begin{aligned} |\pi\rangle &= |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle, \\ |\nu\rangle &= |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

Stosując F-spin sumę prostą algebr $U_\pi(6)$ i $U_\nu(6)$ można więc zastąpić strukturą $U(6) \otimes U_F(2)$.

Podobnie jak w modelu IBM1, w modelu IBM2 złożone układy protonowo-neutronowe posiadają następujące typy dynamicznych symetrii określone poniższymi łańcuchami podgrup niezmienniczych grup $U_\pi(6)$ i $U_\nu(6)$ [2, 19, 29]

$$\begin{array}{ll} U_\pi(6) \supset U_\pi(5) & \\ \qquad\qquad\qquad \searrow & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad & U_{\pi+\nu}(5) \supset SO_{\pi+\nu}(5) \supset SO_{\pi+\nu}(3) \supset SO_{\pi+\nu}(2), \\ \qquad\qquad\qquad \nearrow & \\ U_\nu(6) \supset U_\nu(5) & \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
U_\pi(6) \supset SU_\pi(3) & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad & SU_{\pi+\nu}(3) \supset SO_{\pi+\nu}(3) \supset SO_{\pi+\nu}(3) \supset SO_{\pi+\nu}(2), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \nearrow & \\
U_\nu(6) \supset SU_\nu(3) & \\
U_\pi(6) \supset SO_\pi(6) & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad & SO_{\pi+\nu}(6) \supset SO_{\pi+\nu}(5) \supset SO_{\pi+\nu}(3) \supset SO_{\pi+\nu}(2), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \nearrow & \\
U_\nu(6) \supset SO_\nu(6) & \\
U_\pi(6) \supset SU_\pi(3) & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad & SU^*_{\pi+\nu}(3) \supset SO_{\pi+\nu}(3) \supset SO_{\pi+\nu}(2). \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \nearrow & \\
U_\nu(6) \supset SU_\nu(3) &
\end{array}
$$

Można więc zagadnienie własne Hamiltonianów IBM2 odpowiadających powyższym typom dynamicznych symetrii rozwiązać analitycznie, stosując algebraiczne metody teorii grup Liego (więcej na ten temat np. w pracach [2, 19, 29]).

Dalszymi etapami rozwoju modelu oddziałujących bozonów są kolejno:

- Model IBM3 [15] – prezentuje pary nukleonowe $pp - nn - pn$ o izospinie $T = 1$ i spinie wypadkowym nukleonów $S = 0$ ($\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$). Strukturą algebraiczną korespondującą z modelem IBM3 jest suma prosta algebr $U(6) \otimes U_T(3)$.

- Model IBM4 [14] – do par $pp - nn - pn$ o izospinie $T = 1$ dodaje się pary pn o izospinie $T = 0$ i spinie wypadkowym nukleonów $S = 1$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Odpowiadającą modelowi IBM4 strukturą algebraiczną jest $U(6) \otimes U_{ST}(6)$.

4. Bozonowo-fermionowy model – IBFM

Model oddziałujących bozonów (IBM) w swoich różnorakich wersjach opisuje jądra parzysto-parzyste. Aby opisać jądra parzysto-nieparzyste oraz

nieparzysto-parzyste, gdzie przynajmniej jeden proton lub neutron nie ma pary, stosowane są modele, w których przestrzenie rozpinane są przez bozony sprzężone z jednym nukleonem (Interacting Boson-Fermion Model) [6]. Z biegiem czasu wykształciły się dwie wersje tego modelu, IBFM1 i IBFM2, których szczegółowy opis można znaleźć w pracach [20] i [21]. Analiza struktury jąder parzysto-nieparzystych, jak i nieparzysto-parzystych jest obecnie jednym z ważniejszych przedmiotów badań fizyki jądrowej.

5. Inne metody opisu struktury jąder w zredukowanych przestrzeniach bozonowych

W różnych wersjach modelu IBM przestrzeń bozonowa rozpinana jest przez kilka bozonów (najczęściej przez bozony s, d i/lub g). Ograniczenie tylko do kilku bozonów podyktowane jest omawianymi w poprzednich rozdziałach względami matematycznymi. Ma też ono silne uzasadnienie fizyczne, wynikające z dużej energii wiązania nukleonów w stanach s i d. Jednakże przestrzenie rozpinane przez te bozony są zbyt małe, by można było opisać wszystkie niskoenergetyczne stany o różnych multipolowościach (J, T). Dlatego niezbędne jest uwzględnienie większej liczby bozonów rozpinających przestrzenie bozonowe.

Zaproponowana w pracy [8] metoda doboru bozonów do konstrukcji baz bozonowych polega na eliminacji ze zbioru wszystkich dozwolonych na danej powłoce bozonów tych najmniej wpływających na strukturę widm energetycznych wybranych jąder atomowych. Jednakże taka procedura jest czasochłonna i mało efektywna.

Inna, zaproponowana przez autorów tego artykułu metoda wyszukiwania minimalnego zbioru bozonów do rozpinania zredukowanych przestrzeni bozonowych [25] polega na analizie populacji wszystkich dozwolonych przez model powłokowy bozonów w stanach podstawowych i wzbudzonych wybranych jąder atomowych. Do obliczeń populacji bozonów w wybranych jądrach parzystych zastosowano algebraiczną metodę odwzorowania przestrzeni fermionowej na przestrzeń bozonową [27]. Przestrzeń fermionowa

jest rozpinana przez wszystkie dozwolone na danej powłoce kolektywne pary i jest identyczna z przestrzenią modelu powłokowego. Natomiast przestrzeń bozonowa jest rozpinana przez bozony korespondujące z kolektywnymi parami. Dzięki zastosowanej metodzie odwzorowania [24] widmo energetyczne bozonowego obrazu Hamiltonianu fermionowego jest identyczne z widmem energetycznym fermionowego Hamiltonianu modelu powłokowego. Równocześnie funkcje własne Hamiltonianu bozonowego są bozonowym przedstawieniem funkcji falowych fermionowego Hamiltonianu modelu powłokowego (tzn. są rozpinane przez bozony korespondujące z kolektywnymi parami nukleonowymi). Zatem na podstawie znajomości bozonowej reprezentacji funkcji falowych modelu powłokowego wylicza się populacje bozonów w stanach podstawowych i wzbudzonych wybranych jąder atomowych, a tym samym dokonuje selekcji bozonów według ich wkładu do rozważanych stanów jądrowych. W konsekwencji te dominujące bozony wykorzystuje się do konstrukcji zredukowanych przestrzeni bozonowych, w których diagonalizuje się bozonowy obraz Hamiltonianu modelu powłokowego badanego jądra (szczegóły zastosowania metody do badania struktury widm energetycznych jąder parzystych patrz prace [24, 26]).

Zakładając, że struktura kolektywnych par (i korespondujących z nimi bozonów) nie ulega istotnej modyfikacji, gdy rośnie liczba nukleonów na aktywnej powłoce, do identyfikacji dominujących bozonów na badanej powłoce można wybrać jądra z czterema aktywnymi nukleonami na tej powłoce. Wykonane przez autorów pracy obliczenia dla jąder $A = 44$ wskazują, że do konstrukcji zredukowanych przestrzeni bozonowych do badania struktury widm energetycznych jąder parzystych z obszaru powłoki $1p0f$ wystarczy stosować bozony s, d, d', g, g', i, i' spośród 60 dozwolonych na tej powłoce bozonów [25].

Należy też podkreślić, że zarówno do analizy populacji bozonów, jak i do opisu struktury jąder w zredukowanych przestrzeniach bozonowych wykorzystuje się bozonowy obraz fermionowego Hamiltonianu modelu powłokowego bez wprowadzania nowych parametrów (szczegóły patrz prace [24, 26]).

6. Przypisy: O grupach dynamicznych

Grupy Liego należą do grup ciągłych, czyli grup, których elementy są funkcjami jednego lub kilku parametrów, mogących się zmieniać w sposób ciągły. Możemy zatem powiedzieć, że grupę ciągłą nazywamy grupą Liego, jeżeli każdy jej element można jednoznacznie zadać za pomocą skończonej liczby parametrów rzeczywistych i jeśli otoczenie elementu jednostkowego jest homeomorficzne z przestrzenią euklidesową rzeczywistą.

Rozważmy zbiór odwzorowań g_i, będących generatorami grupy Liego $\mathcal{G}$. Niech będzie dany Hamiltonian H układu fizycznego. Operator H jest niezmienniczy względem przekształceń grupy $\mathcal{G}$, jeżeli dla każdego generatora g_i tej grupy zachodzi

$$[H, g_i] = 0. \tag{19}$$

Mówimy wówczas, że operator H posiada symetrię grupy $\mathcal{G}$ lub że jest niezmienniczy względem $\mathcal{G}$. Konsekwencją niezmienniczości operatora jest występowanie degeneracji w widmie wartości własnych tego operatora. Załóżmy bowiem, że $|\Gamma\rangle$ jest stanem własnym operatora H z odpowiadającą mu energią własną $E(\Gamma)$

$$H|\Gamma\rangle = E(\Gamma)|\Gamma\rangle. \tag{20}$$

Warunek (19) pociąga za sobą następujące związki

$$\begin{aligned} Hg_i|\Gamma\rangle &= E(\Gamma)g_i|\Gamma\rangle, \\ g_iH|\Gamma\rangle &= E(\Gamma)g_i|\Gamma\rangle. \end{aligned} \tag{21}$$

Z równania (20) oraz z równań (21) wynika, że stanom własnym $|\Gamma\rangle$ oraz $g_i|\Gamma\rangle$ odpowiada ta sama wartość własna E. Stany własne operatora H będziemy więc oznaczać $|\Gamma\gamma\rangle$, gdzie indeksy γ odróżniać będą stany odpowiadające tej samej energii własnej $E(\Gamma)$. Stany $g_i|\Gamma\gamma\rangle$ można zatem zapisać jako kombinację liniową stanów $|\Gamma\gamma\rangle$

$$g_i|\Gamma\gamma\rangle = \sum_{\gamma'} a^{i,\Gamma}_{\gamma,\gamma'}|\Gamma\gamma'\rangle. \tag{22}$$

Tym sposobem współczynniki $a^{i,\Gamma}_{\gamma,\gamma'}$ wyznaczają macierzowe reprezentacje elementów g_i w przestrzeni wektorowej rozpiętej przez stany $|\Gamma\gamma\rangle$. Reprezentacje te zależą od Γ, oznaczmy je zatem przez $[\Gamma]$ i będzie ich tyle, ile niezdegenerowanych wartości własnych $E(\Gamma)$.

Rozważmy teraz grupę operatorów komutujących z wszystkimi generatorami grupy $\mathcal{G}$. Operatory o takiej własności, zwane operatorami Casimira grupy $\mathcal{G}$, oznaczmy przez $C_n[\mathcal{G}]$, a odpowiadające im wartości własne przez $E_n(\Gamma)$. Równanie własne dla operatorów Casimira będzie zatem miało postać

$$C_n[\mathcal{G}]|\Gamma\gamma\rangle = E_n(\Gamma)|\Gamma\gamma\rangle. \tag{23}$$

Niech teraz dane będą dwie grupy $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$, takie że $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2$. Zakładamy, że Hamiltonian H posiada symetrię grupy $\mathcal{G}_1$. Stany własne operatora niezmienniczego względem $\mathcal{G}_1$ oznaczać będziemy przez $|\Gamma_1\gamma_1\rangle$. Ponieważ grupa $\mathcal{G}_2$ jest podgrupą $\mathcal{G}_1$, jeśli operator H posiada symetrię grupy $\mathcal{G}_1$, to operator ten będzie posiadał również symetrię grupy $\mathcal{G}_2$. Stany własne operatora niezmienniczego względem $\mathcal{G}_2$ oznaczymy przez $|\Gamma_2\gamma_2\rangle$. Reprezentacja $[\Gamma_2]$ zawiera się w reprezentacji $[\Gamma_1]$ (dla uproszczenia oznaczeń załóżmy, że dokładnie raz), równanie własne operatora H zapiszemy więc w postaci

$$H|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle = E(\Gamma_1)|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle. \tag{24}$$

W równaniu powyższym indeks Γ_1 numeruje energie własne i odpowiadające im stany własne, zaś $\Gamma_2\gamma_2$ pełnią rolę indeksu γ_1, czyli odróżniają stany o tej samej energii własnej $E(\Gamma_1)$. Zgodnie z równaniem (22), w zależności od tego, czy operator g_i jest elementem grupy $\mathcal{G}_1$ czy $\mathcal{G}_2$, jego działanie na stan $|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle$ można zapisać następująco

$$\begin{aligned} g_i|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle &= \sum_{\Gamma_2'\gamma_2'} a^{i,\Gamma_1}_{\Gamma_2\gamma_2,\Gamma_2'\gamma_2'}|\Gamma_1\Gamma_2'\gamma_2'\rangle \quad \text{dla} \quad g_i \in \mathcal{G}_1, \\ g_i|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle &= \sum_{\gamma_2'} a^{i,\Gamma_2}_{\gamma_2,\gamma_2'}|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2'\rangle \quad \text{dla} \quad g_i \in \mathcal{G}_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Załóżmy teraz, że Hamiltonian H posiada symetrię grupy $\mathcal{G}_2$, ale nie posiada symetrii grupy $\mathcal{G}_1$. Skonstruujmy operator H'

$$H' = aC_{n_1}[\mathcal{G}_1] + bC_{n_2}[\mathcal{G}_2], \tag{26}$$

będący kombinacją liniową operatorów Casimira odpowiednio grupy $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$. Ze względu na własności operatorów Casimira, operator H' komutuje ze wszystkimi generatorami grupy $\mathcal{G}_2$, ale niekoniecznie komutuje ze wszystkimi generatorami grupy $\mathcal{G}_1$.

Zgodnie z równaniem (23), równania własne dla operatorów $C_{n_1}[\mathcal{G}_1]$ i $C_{n_2}[\mathcal{G}_2]$ dla stanów $|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle$ mają postać

$$C_{n_1}[\mathcal{G}_1]|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle = E_{n_1}(\Gamma_1)|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle \tag{27}$$

i

$$C_{n_2}[\mathcal{G}_2]|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle = E_{n_2}(\Gamma_2)|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle. \tag{28}$$

Z równań (27)–(28) dostajemy równanie własne dla operatora H'

$$(aC_{n_1}[\mathcal{G}_1] + bC_{n_2}[\mathcal{G}_2])|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle = (aE_{n_1}(\Gamma_1) + bE_{n_2}(\Gamma_2))|\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2\rangle. \tag{29}$$

Z równań (24) i (29) wynika, że choć operator H' nie posiada symetrii względem grupy $\mathcal{G}_1$, ma takie same stany własne jak operator H. Mówimy wówczas, że operator H' posiada symetrię dynamiczną grupy $\mathcal{G}_1$. Istotne jest zatem, że choć wartości własne operatora H' zależą od reprezentacji $[\Gamma_1]$ i $[\Gamma_2]$, stany własne tego operatora są takie same jak stany własne operatora niezmienniczego względem $\mathcal{G}_1$.

Literatura

1. K. Allart, E. Boecker, G. Bonsignori, M. Savoia, Y. K. Gambkir, Phys. Rep. **169**(1988), 209.
2. A. Arima, Nucl. Phys. A **570** (1994), 1c.
3. A. Arima, F. Iachello, Ann. Phys., NY **99** (1976), 253.
4. A. Arima, F. Iachello, Ann. Phys., NY **111** (1978), 201.
5. A. Arima, F. Iachello, Ann. Phys., NY **123** (1979), 468.
6. A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello, Phys. Rev. C **14** (1976), 761.
7. A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello, I. Talmi, Phys. Lett. B **66** (1977), 205.

8. D. Bonatsos, L. D. Skouras, P. Van Isacker, M. A. Nagarajan, J. Phys. G **17** (1991), 1803.
9. D. Bucuresco, G. Cata-Danil, V. N. Zamfir, A. Gizon, J. Gizon, Phys. Rev. C **43** (1991), 2610.
10. H. C. Chiang, S. T. Hsiech, D. S. Chun, Phys. Rev. C **39** (1989), 2390.
11. J. Q. Chen, Nucl. Phys. A **626** (1997), 686.
12. M. A Cunningham, Nucl. Phys. A **385** (1982), 204.
13. M. A. Cunningham, Nucl. Phys. A **385** (1982), 221.
14. J. P. Elliot, J. A. Evans, Phys. Lett. **101B** (1981), 216.
15. J. P. Elliot, A. P. White, Phys. Lett. **97B** (1980), 169.
16. Y. K. Gambhir, A. Rimini, T. Weber, Phys. Rev. C **3** (1971), 1965.
17. K. Hara, *Contemporary nuclear shell model*, X. W. Pan et al. (eds.), Springer, Berlin 1996.
18. S. T. Hsiech, H. C. Chiang, M. M. Kung Yen, Phys. Rev. C **41** (1990), 2898.
19. F. Iachello, *The interacting boson model*, Springer, Berlin 2001, 141-154.
20. F. Iachello, O. Scholten, Phys. Rev. Lett. **43** (1979), 679.
21. F. Iachello, P. Van Isacker, *The Interacting Boson-Fermion Model*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.
22. E. Kwaśniewicz, J. Brzostowski, E. Hetmaniok, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **29** (2003), 1383.
23. E. Kwaśniewicz, F. Catara, M. Sambataro J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **23** (1997), 911.
24. E. Kwaśniewicz, F. Catara, M. Sambataro i in., *Highlights of Modern Nuclear Structure*, A. Corello (ed.), World Scientific, Singapore 1998, 425–432.
25. E. Kwaśniewicz, E. Hetmaniok, *The boson structure of the low-lying states of $A = 44$ nuclei* (to be published).
26. E. Kwaśniewicz, E. Hetmaniok, J. Brzostowski, F. Catara, M. Sambataro, CEJP **4** (2003), 606.

27. M. Sambataro, Phys. Rev. C **52** (1995), 3378.
28. I. Talmi, Nucl. Phys. A **172** (1971), 1.
29. P. Van Isacker, D. D. Warner, *Extensions of the interacting boson model*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **20** (1994), 853.
30. Ch.-L. Wu, H.-T. Chen, D. H. Feng, Phys. Rep. **362** (1994), 433.
31. Y. M. Zhao, N. Yoshinaga, S. Yamaji, J. Q. Chen, A. Arima, Phys. Rev. C **62** (2000), 14304.

Edyta Hetmaniok
Edward Kwaśniewicz
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

In this work we present a review of nuclear models, in which the nuclear structure is described in reduced spaces expanded in terms of bosons or bosons coupled with one nucleon. We discuss the important stages of evolution of boson models and their algebraic foundation. These are Interacting Boson Model (IBM1), Proton-Neutron Interacting Boson Model (IBM2), IBM3, IBM4 and Interacting Boson-Fermion Model (IBFM). We present also an idea of some other models describing nuclear structure in boson spaces larger than in the IBM.