

Elżbieta KASPERSKA, Elwira MATEJA-LOSA, Damian SŁOTA

MODELE MATEMATYCZNE WYBRANYCH ARCHETYPÓW SYSTEMOWYCH I ICH SYMULACJA

Streszczenie. W pracy przedstawia się pewne wybrane modele matematyczne, tak zwanych archetypów systemowych. Są to podstawowe konstrukcje formalne o strukturze pętli sprzężeń zwrotnych (dodatnich, ujemnych), typowych dla metody Dynamiki Systemowej. Symuluje się dynamikę zachowania się tych archetypów, w oparciu o język Dynamo, oraz przedstawia wyniki.

MATHEMATICAL MODELS FOR CHOSEN SYSTEM ARCHETYPES AND THEIR SIMULATION

Summary. In paper some chosen mathematical models of, so called, system archetypes are presented. There are formal structures of feedbacks (positive, negative), typical for System Dynamics method. The simulation of dynamics behaviour of these archetypes, on the base of Dynamo language is performed, and the results are presented.

1. Wstęp

Literatura przedmiotu wskazuje na rosnące zainteresowanie problematyką archetypów systemowych w obszarze Dynamiki Systemowej [1, 11–22, 26–

28]. Struktury pętli sprzężeń zwrotnych, których współdziałanie daje obraz „sił” rządzących zachowaniem się w czasie systemu, tworzą konstrukty formalne (układy równań różniczkowych) o stosunkowo łatwej do zamodelowania i symulacji postaci. Zachowanie się rzeczywistych, złożonych systemów społeczno-gospodarczych czy biologicznych wyznaczone jest przez współdziałanie wielu, powiązanych z sobą, archetypów. Dlatego ich zrozumienie, na poziomie „elementarnym”, a potem w dalszej konsekwencji w skali makro, jest tak potrzebne.

W pracy uwagę skupiono na kilku wybranych archetypach systemowych:

- archetypie „erodujących celów”;
- archetypie „granice wzrostu”;
- archetypie „sukces dla odnoszących sukces”.

W następnym rozdziale przedstawiono ich modele matematyczne, programy symulacyjne w konwencji Coyle’a [2, 5].

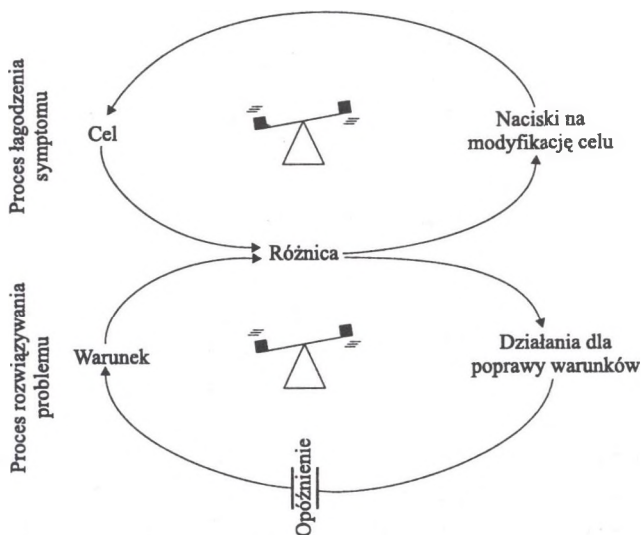
2. Modele matematyczne i ich symulacja

Ideową strukturę archetypu o nazwie: „erodujące cele” przedstawiono poglądowo na rysunku 1. Dźwignie równoważące wewnątrz powiązanych z sobą pętli symbolizują sprzężenie zwrotne ujemne (zwane inaczej równoważącym).

W podstawowym schemacie „erodujących celów” występują dwie pętle równoważące. Każda z nich odpowiada innemu sposobowi podejścia do symptomu problemu. Górna pętla opisuje stosowanie doraźnego środka zaradczego, dolna przedstawia działania naprawcze, które przynoszą efekty w odleglejszej przyszłości. Wprowadzono następujące zmienne:

$x_1(t)$ — cel;

$\dot{x}_1(t)$ — nacisk na modyfikację celu;



Rys. 1. Ilustracja działania archetypu „erodujących celów”
 Fig. 1. Archetype „eroding goals”

$x_2(t)$ — warunek;

$\dot{x}_2(t)$ — działanie na poprawę warunku.

Tak więc, w konwencji poziomów i strumieni [2–10, 20, 23, 24, 28] otrzymano schemat działania przedstawiony na rysunku 2.

Model matematyczny omawianego archetypu jest dość prosty:

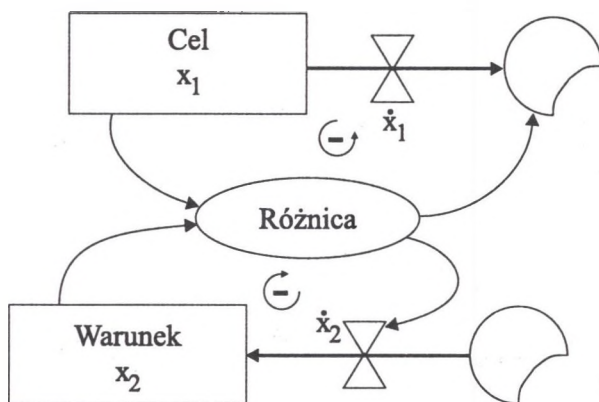
$$\dot{x}_1(t) = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{T_1}, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{T_2}. \tag{2}$$

Podczas symulacji przyjęto następujące warunki początkowe i wartości parametrów:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 60, & T_1 &= 12, \\ x_2(0) &= 20, & T_2 &= 25. \end{aligned}$$

Model oprogramowano w języku symulacyjnym Dynamo [25] (wydruk programu zamieszczono poniżej). Rysunek 3 przedstawia wyniki symulacji.



Rys. 2. Schemat działania archetypu „erodujących celów” w konwencji poziomów i strumieni

Fig. 2. Archetype „eroding goals” in convention of the levels and rates

* Archetyp "erodujących celów"

note

note poziom realizacji celu

note

n $x_1=60$

l $x_{1.k}=x_{1.j}+dt*(a_{2.jk}-a_{1.jk})$

r $a_{1.kl}=x_{1.k}/t_1$

r $a_{2.kl}=x_{2.k}/t_1$

note

note poziom warunku

note

n $x_2=20$

l $x_{2.k}=x_{2.j}+dt*(b_{1.jk}-b_{2.jk})$

r $b_{1.kl}=x_{1.k}/t_2$

r $b_{2.kl}=x_{2.k}/t_2$

note

note wartości parametrów

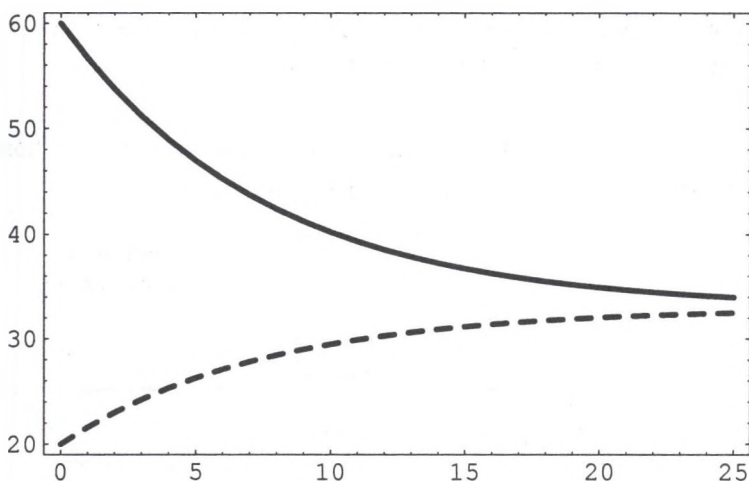
note

c $t_1=12$

```

c t2=25
note
note parametry symulacji
note
spec length=25/dt=1/savper=1
save x1,x2,a1,a2,b1,b2

```

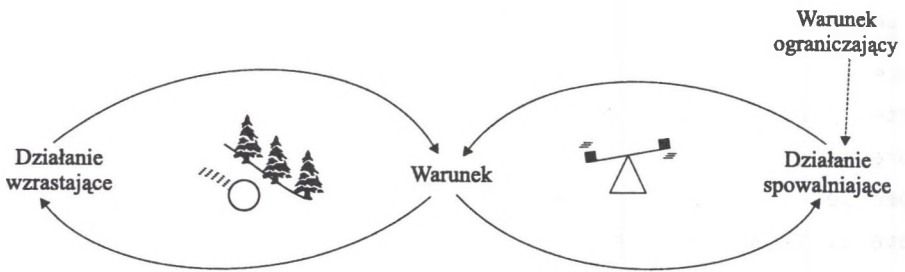


Rys. 3. Wyniki symulacji archetypu „erodujących celów” (x_1 – linia ciągła, x_2 – linia przerywana)

Fig. 3. The results of simulation of archetype „eroding goals” (x_1 – solid line, x_2 – dot line)

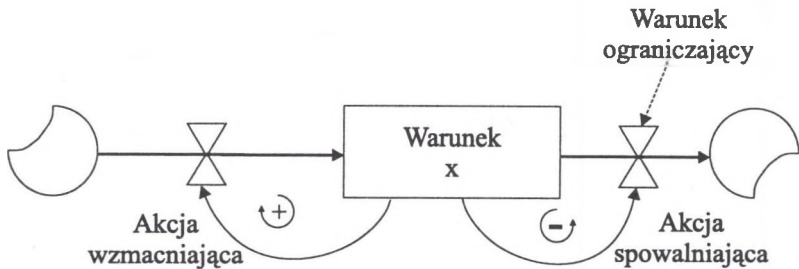
Poświęcimy teraz uwagę archetypowi o nazwie „granice wzrostu”. Jego ideową strukturę zaprezentowano na rysunku 4.

Proces „podsycia się” tworząc okres przyśpieszonego wzrostu czy rozszerzenia. Następnie tempo wzrostu zacznie maleć i w końcu dochodzi do jego zatrzymania się, może nawet nastąpić zmiana kierunku i zacząć się przyśpieszający stopniowo upadek. Faza wzrostu jest spowodowana wzmacniającym procesem sprzężenia zwrotnego. Spowolnienie pojawia się z powodu procesu równoważącego wprowadzonego przy zbliżaniu się do „granicy”. Granica ta może wynikać z ograniczenia zasobów lub zewnętrznych czy



Rys. 4. Ilustracja działania archetypu „granice wzrostu”
 Fig. 4. Archetype „limits to growth”

wewnętrznych reakcji na wzrost. Schemat działania zapisany w konwencji poziomów i strumieni przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Schemat działania archetypu „granice wzrostu” w konwencji poziomów i strumieni

Fig. 5. Archetype „limits to growth” in convention of the levels and rates

Model matematyczny omawianego archetypu jest reprezentowany przez równanie:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - ax(t) \left(1 - \frac{L - x(t)}{L} \right) \quad (3)$$

lub po przekształceniu:

$$\dot{x}(t) = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{L} \right). \quad (4)$$

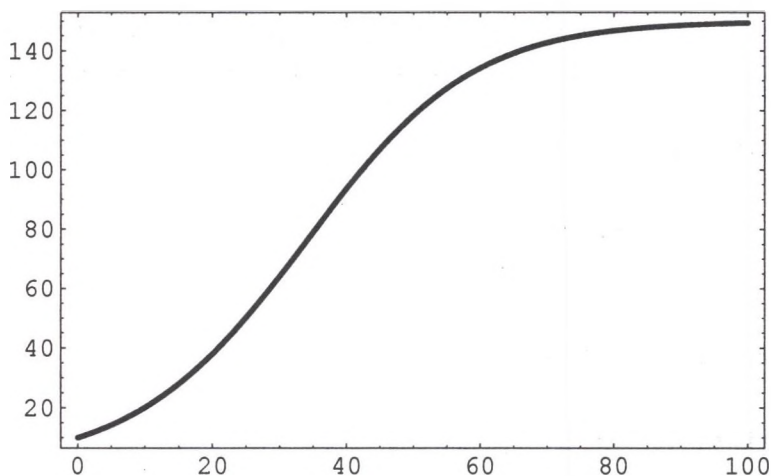
Podczas symulacji przyjęto warunek początkowy $x(0) = 10$. Parametr L to granica wzrostu, natomiast a jest maksymalnym ułamkowym wzrostem. Przyjęto, przykładowo: $L = 150$, $a = 0.08$.

Model oprogramowano w języku symulacyjnym Dynamo (wydruk programu zamieszczono poniżej). Rysunek 6 przedstawia wyniki symulacji.

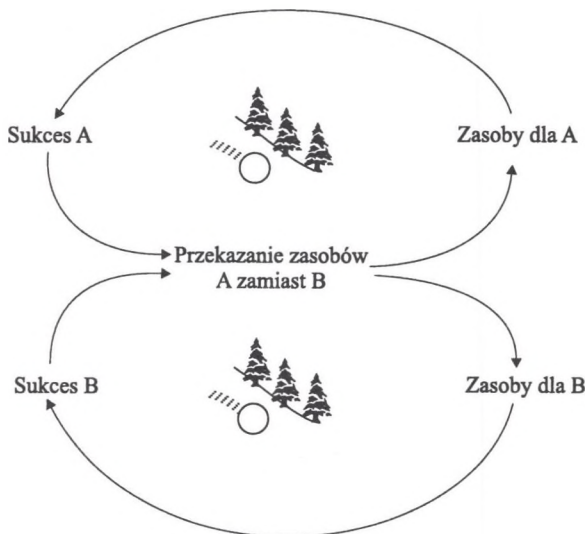
```
* Archetyp "granice wzrostu"
note
note poziom warunku
note
n x=10
l x.k=x.j+dt*(dw.jk-ds.jk)
note
note działanie wzmacniające
note
r dw.kl=a*x.k
note
note działanie spowalniające
note
r ds.kl=a*x.k*(1-((1-x.k)/1))
note
note wartości parametrów
note
c a=0.08
c l=150
note
note parametry symulacji
note
spec length=100/dt=1/savper=1
save x,dw,ds
```

Trzecim z omawianych archetypów jest archetyp o nazwie „sukces dla odnoszących sukces”. Jego ideową strukturę zaprezentowano na rysunku 7.

Dwa działania konkurują o ograniczone możliwości wsparcia lub zasoby. Im większy sukces osiąga jedno, tym więcej wsparcia otrzymuje, prowadząc do „zagłodzenia” innych. Schemat działania zapisany w konwencji poziomów i strumieni przedstawiono na rysunku 8.



Rys. 6. Wyniki symulacji archetypu „granice wzrostu” (x – linia ciągła)
 Fig. 6. The results of simulation of archetype „limits to growth” (x – solid line)

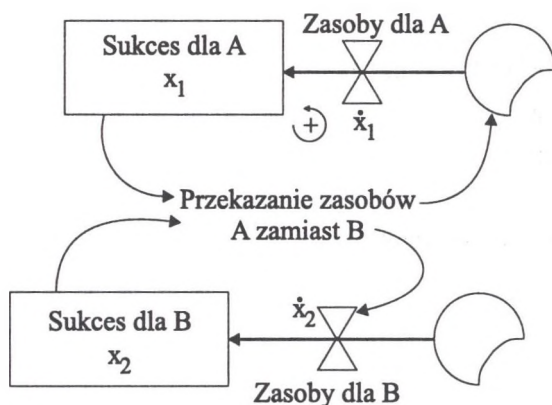


Rys. 7. Ilustracja działania archetypu „sukces dla odnoszących sukces”
 Fig. 7. Archetype „success to the successful”

Model matematyczny omawianego archetypu jest reprezentowany przez układ dwóch równań różniczkowych:

$$\dot{x}_1(t) = a(x_1(t) - x_2(t)), \quad (5)$$

$$\dot{x}_2(t) = b(x_2(t) - x_1(t)). \quad (6)$$



Rys. 8. Schemat działania archetypu „sukces dla odnoszących sukces” w konwencji poziomów i strumieni

Fig. 8. Archetype „success to the successful” in convention of the levels and rates

Podczas symulacji przyjęto następujące warunki początkowe oraz wartości parametrów:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= 200, & a &= 0.07, \\ \dot{x}_2(0) &= 150, & b &= 0.07. \end{aligned}$$

Model oprogramowano w języku symulacyjnym Dynamo (wydruk programu zamieszczono poniżej). Rysunek 9 przedstawia wyniki symulacji.

* Archetyp "sukces dla odnoszących sukces"

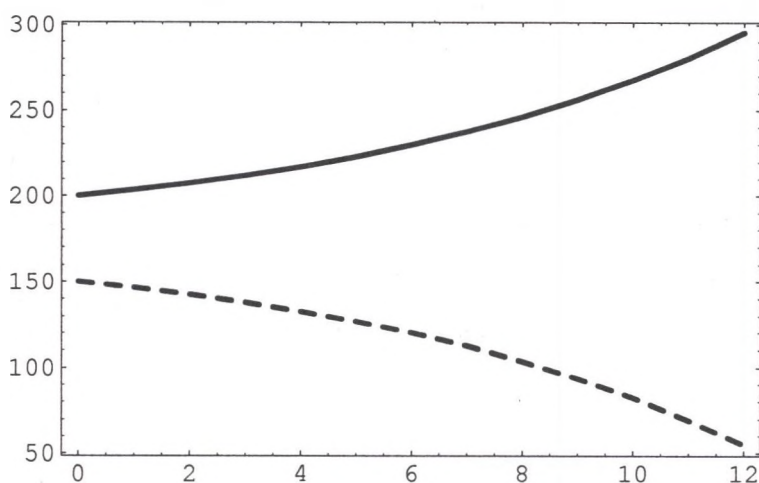
```

note
note poziom sukcesu dla A
note
n x1=200
l x1.k=x1.j+dt*(a1.jk-a2.jk)
r a1.kl=a*x1.k
r a2.kl=a*x2.k
note
note poziom sukcesu dla B
note
    
```

```

n x2=150
l x2.k=x2.j+dt*(b1.jk-b2.jk)
r b1.kl=a*x2.k
r b2.kl=a*x1.k
note
note wartości parametrów
note
c a=0.07
c b=0.07
note
note parametry symulacji
note
spec length=12/dt=1/savper=1
save x1,x2,a1,a2,b1,b2

```



Rys. 9. Wyniki symulacji archetypu „sukces dla odnoszących sukces” (x_1 – linia ciągła, x_2 – linia przerywana)

Fig. 9. The results of simulation of archetype „success to the successful” (x_1 – solid line, x_2 – dot line)

3. Podsumowanie

W pracy przedstawiono kilka wybranych archetypów systemowych, jako elementarnych struktur zbudowanych z pętli sprzężeń zwrotnych. W otaczającym nas świecie funkcjonują złożone systemy, np. biologiczne czy społeczno-gospodarcze, których zrozumienie może być ułatwione przez badanie tworzących je archetypów systemowych. Wydaje się, że stosowanie konwencji opisu systemów, jako połączenia poziomów i strumieni (typowe dla metody Dynamiki Systemowej), ułatwia tworzenie programów symulacyjnych dla symulacji zachowania się tych systemów o obranym horyzoncie analizy. Analiza ta natomiast pozwala na sprawdzenie hipotez o wpływie modelowanych czynników na zachowanie się całości systemu. Tematyka ta będzie przez autorów kontynuowana w przyszłości.

Literatura

1. R. E. Bourguet-Diaz, G. Perez-Salazar, *On mathematical structures for systems archetypes*, w: Proc. 21 International Conference of the System Dynamics Society, P. I. Davidsen, E. Mollona, V. G. Diker, R. S. Langer, J. I. Rowe, ed., SDS, New York 2003, 1–11.
2. R. G. Coyle, *System Dynamics Modelling. A Practical Approach*, Chapman & Hall, London 1996.
3. R. G. Coyle, *The practice System Dynamics: milestones, lessons and ideas from 30 years experience*, System Dynamics Rev. **14** (1998), 343–365.
4. R. G. Coyle, *Simulation by repeated optimisation*, J. Opt. R. S. **50** (1999), 429–438.
5. R. G. Coyle, E. P. Wolsterholm, *Modelling discrete events in System Dynamics models – a case study*, Dynamica **6** (I) (1980), 21–27.
6. J. W. Forrester, *Industrial Dynamics*, MIT Press, Massachusetts 1961.
7. J. W. Forrester, *Urban Dynamics*, MIT Press, Massachusetts 1969.

8. J. W. Forrester, *World Dynamics*, Wright-Allen Press, Massachusetts 1971.
9. J. W. Forrester, *Principles of Systems*, Cambridge Press, Massachusetts 1972.
10. J. W. FORRESTER, *Collected papers of Jay W. Forrester*, Cambridge Press/Wright Allen Press, Massachusetts 1975.
11. E. Kasperska, *Metodyka badań symulacyjnych dla wspomagania planowania i organizowania w przedsiębiorstwie przemysłowym o produkcji ciągłej*, praca doktorska, Zakład Nauk Zarządzania, PAN, Warszawa 1990.
12. E. Kasperska, *Cybernetic formulation of some functions of management – types of simulation and optimization approaches within the System Dynamics method*, w: Proc. 20 International Conference of the System Dynamics Society, P. I. Davidsen, E. Mollona, V. G. Diker, R. S. Langer, J. I. Rowe, ed., SDS, Palermo 2002, 1–11.
13. E. Kasperska, *Supporting the decision in organization by the intelligent simulation package Cosmic and Cosmos*, Pr. Nauk. Akad. Ekonom. w Katowicach, "Support Systems in Organization" (2002), 385–392.
14. E. Kasperska, *System dynamics method and supporting decisions in economic organization*, w: Proc. of ISDSS 2003, DSS in the uncertainty of the Internet age, T. Bui, H. Sroka, St. Stanek, J. Gołuchowski, ed., Univ. of Econo., Katowice 2003, 497–503.
15. E. Kasperska, *Uczenie się organizacji jako proces sprzężenia zwrotnego, realizowanego przez eksperymentowanie w świecie wirtualnym*, w: Systemy wspomaganie organizacji. SWO 2003, H. Sroka, St. Stanek, ed., Univ. of Econo., Katowice 2003, 247–254.
16. E. KASPERSKA, E. MATEJA-LOSA, D. SŁOTA, *Some extension of System Dynamics method – practical aspects*, w: Proc. 16th IMACS World Congress, M. Deville, ed., IMACS, Lausanne 2000, 718–11, 1–6.
17. E. Kasperska, E. Mateja-Losa, D. Słota, *Some extension of System Dynamics method – theoretical aspects*, w: Proc. 16th IMACS World Congress, M. Deville, ed., IMACS, Lausanne 2000, 718–10, 1–6.

18. E. Kasperska, E. Mateja-Losa, D. Słota, *Some dynamics balance of production via optimization and simulation within System Dynamics method*, w: Proc. 19th International Conference of the System Dynamics Society, J. H. Hines, V. G. Diker, R. S. Langer, J. I. Rowe, ed., SDS, Atlanta 2001, 1–18.
19. E. Kasperska, E. Mateja-Losa, D. Słota, *Optimal dynamical balance of raw materials – some concept of embedding optimization in simulation on system dynamics models and vice versa*, w: Proc. 20 International Conference of the System Dynamics Society, P. I. Davidsen, E. Mollona, V. G. Diker, R. S. Langer, J. I. Rowe, ed., SDS, Palermo 2002, 1–23.
20. E. Kasperska, D. Słota, *Metody matematyczne w zarządzaniu w ujęciu Dynamiki Systemowej*, skrypt 2224, Wyd. Pol. Śl., Gliwice 2000.
21. E. Kasperska, D. Słota, *The extension of simulation and optimization on model dynbalance(2-2)*, w: Systemy wspomaganie organizacji, H. Sroka, St. Stanek, ed., Univ. of Econo., Katowice 2003, 255–262.
22. E. Kasperska, D. Słota, *Two different methods of embedding the optimization in simulation on model dynbalance(2-2)*, w: Proc. 21 International Conference of the System Dynamics Society, P. I. Davidsen, E. Mollona, V. G. Diker, R. S. Langer, J. I. Rowe, ed., SDS, New York 2003, 1–23.
23. R. Łukaszewicz, *Dynamika systemów zarządzania*, PWN, Warszawa 1975.
24. R. Łukaszewicz, *The direct form of structure models within System Dynamics*, *Dynamica* 2 (1976).
25. A. L. Pugh, ed., *Professional Dynamo 4.0 for Windows. Tutorial Guide*, Pugh-Roberts Associates, Cambridge 1994.
26. P. H. Senge, *Piąta dyscyplina*, Dom Wyd. ABC, Warszawa 1998.
27. P. H. Senge, *Piąta dyscyplina zbiór ćwiczeń*, Oficyna Ekonomiczna, Warszawa 2002.
28. J. D. Sterman, *Business dynamics – system thinking and modeling for a complex world*, Mc Graw-Hill, Boston 2000.

Elżbieta Kasperska

Elwira Mateja-Losa

Damian Słota

Instytut Matematyki

Politechnika Śląska

Kaszubska 23

44-100 Gliwice

Abstract

The purpose of this paper was to present some chosen mathematical models of, so called, system archetypes. The first one was archetype „eroding goals”. Its mathematical structure, consisted of two balancing loops, was modelled like system of first-order differential equations. Then the simulation of dynamics of the system was performed and the results were presented. The some was achieved with archetypes named: „limits to growth” and „success to the successful”. At the end some conclusions were formulated.