ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 91 Nr kol. 1652

Mirosław OSYS

ROZSZERZENIA AUTOMATOWE ODWZOROWAŃ MONOIDÓW WOLNYCH NAD SKOŃCZONYM ALFABETEM

Streszczenie. W pracy tej scharakteryzowano własności rozszerzeń automatowych dowolnych odwzorowań monoidów wolnych nad alfabetem skończonym. Podane zostały dwa warianty rozszerzeń, dla których zbadano dynamikę i znaleziono kryterium nilpotentności.

AUTOMATON EXTENSIONS OF TRANSFORMATIONS OF FREE MONOID OVER FINITE ALPHABET

Summary. This paper is concerned with the notion of an automaton extension that extends a mapping defined on the free monoid. Two variations of extensions are proposed. Their dynamics is inspected as well as nilpotent elements are described.

1. Wiadomości wstępne

Niech X będzie skończonym alfabetem, X^* wolnym monoidem nad X, z pustym słowem ε jako elementem neutralnym. Symbolem uv oznaczamy iloczyn elementów $u, v \in X^*$, ponadto $u^k = \overbrace{u \dots u}^{k}$. Długość słowa u w alfabecie X będzie oznaczana przez $|u|$. Słowo $u \in X^*$ jest *przedrostkiem* słowa

$v \in X^*$, gdy $v = uw$ dla pewnego $w \in X^*$, co oznaczać będziemy przez $u \leqslant v$. Słowo v jest *fragmentem* słowa u, gdy istnieją słowa $u_1, u_2 \in X^*$, takie że $u = u_1 v u_2$.

Automatem Mealy'ego nazywamy ciąg postaci

$$\mathcal{A} = (Q, q_0, X, \delta, \lambda),$$

gdzie:

- ▷ Q jest zbiorem *stanów wewnętrznych*, $Q \neq \emptyset$,
- ▷ $q_0 \in Q$ jest wyróżnionym *stanem początkowym*,
- ▷ X jest alfabetem wejściowym, $X \neq \emptyset$,
- ▷ $\delta : Q \times X \to Q$ jest *funkcją przejść* (wyznaczającą stan, w którym znajdzie się automat po odczytaniu symbolu z wejścia),
- ▷ $\lambda : Q \times X \to X$ jest *funkcją wyjść* (opisującą symbole pojawiające się na wyjściu automatu).

Automat nazywamy *skończonym*, jeżeli zbiór jego stanów Q jest zbiorem skończonym.

Przedłużając funkcje δ oraz λ na zbiór $Q \times X^*$ w sposób następujący

$$\delta(q, \varepsilon) = q, \qquad \delta(q, ux) = \delta(\delta(q, u), x),$$

$$\lambda(q, \varepsilon) = \varepsilon, \qquad \lambda(q, ux) = \lambda(\delta(q, u), x),$$

gdzie: $x \in X$, $u \in X^*$, otrzymujemy odwzorowanie $f_{\mathcal{A}} : X^* \to X^*$ wyznaczone przez automat $\mathcal{A}$ w sposób następujący

$$f_{\mathcal{A}}(\varepsilon) = \varepsilon, \qquad f_{\mathcal{A}}(x_1 \ldots x_k) = \lambda(q_0, x_1)\lambda(q_0, x_1 x_2) \ldots \lambda(q_0, x_1 \ldots x_k).$$

Definicja 1. *Funkcję $f : X^* \to X^*$ jest* odwzorowaniem (skończenie) automatowym, *jeżeli istnieje (skończony) automat $\mathcal{A}$, taki że $f = f_{\mathcal{A}}$.*

Funkcja $g : X^* \to X^*$ jest *częściowo określonym odwzorowaniem automatowym*, jeżeli:

1. dziedzina g jest zbiorem zamkniętym ze względu na przedrostki słów, to znaczy że z warunków $u \in \operatorname{Dom} g$ i $v \leqslant u$ wynika, że $v \in \operatorname{Dom} g$,

2. istnieje odwzorowanie automatowe $f : X^* \to X^*$ takie, że obcięcie $f|_{\mathrm{Dom}\, g}$ jest równe g.

Stwierdzenie 1. *Funkcja $f : X^* \to X^*$ jest odwzorowaniem automatowym wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. *zachowuje długości słów, tzn. dla dowolnego $u \in X^*$ zachodzi $|f(u)| = |u|$,*

2. *dla dowolnych słów $u, v \in X^*$ długość maksymalnego wspólnego przedrostka słów $f(u)$, $f(v)$ jest nie mniejsza niż długość maksymalnego wspólnego przedrostka słów u, v.*

Dowód. Szczegóły dowodu można znaleźć w rozdziale 2 pracy [3]. □

2. Rozszerzenia automatowe odwzorowań

Niech $f : X^* \to X^*$ będzie dowolną funkcją, taką że $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Niech $X_\alpha = X \cup \{\alpha\}$, $\alpha \notin X$ będzie rozszerzonym alfabetem. Symbolem t oznaczmy półgrupowy homomorfizm $X_\alpha^* \to X^*$ zadany warunkami

$$t(\alpha) = \varepsilon, \qquad t(x) = x, \qquad x \in X.$$

Definicja 2. *Odwzorowanie automatowe $\widehat{f} : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ nazywamy* rozszerzeniem automatowym *funkcji $f : X^* \to X^*$, jeżeli $\widehat{f}$ jest odwzorowaniem automatowym oraz istnieje zanurzenie $\mu_f : X^* \to X_\alpha^*$ czyniące poniższy diagram przemiennym*

$$\begin{array}{ccc}
u \in X^* & \xmapsto{f} & f(u) \in X^* \\
\mu_f \downarrow & & \uparrow t \\
u' \in X_\alpha^* & \xmapsto{\widehat{f}} & \widehat{f}(u') \in X_\alpha^*
\end{array}$$

Rozszerzenie automatowe dowolnej funkcji $f : X^* \to X^*$ będziemy konstruować w dwóch etapach:

1. tworzymy częściowo określone rozszerzenie funkcji f, to znaczy funkcję $X_\alpha^* \to X_\alpha^*$, określoną na pewnym ustalonym zbiorze $M \subset X_\alpha^*$,
2. przedłużamy tak otrzymaną funkcję na cały monoid X_α^*.

Dla konstrukcji związanej z pierwszym etapem zastosujemy metodę opisaną w pracy [2, str. 19].

Definicja 3. *Dla słowa $u \in X^*$ określamy*

$$\mu_f(u) = u\alpha^{|f(u)|}.$$

Niech

$$M = \{v' \in X_\alpha^* : v' \leqslant \mu_f(u),\ u \in X^*\}.$$

Definiujemy funkcję $\widehat{f} : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$, określoną na zbiorze M, w sposób następujący:

a) jeżeli u' jest postaci $u\alpha^{|f(u)|}$, $u \in X^*$, to

$$\widehat{f}(u') = \widehat{f}(u\alpha^{|f(u)|}) = \alpha^{|u|} f(u),$$

b) jeżeli $u' \in M$ oraz $v' \leqslant u'$, wtedy

$$\widehat{f}(v') = w', \quad w' \leqslant \widehat{f}(u'), \quad |w'| = |v'|.$$

Powyższa definicja jest poprawna, gdyż w' nie zależy od wyboru słowa $u' \in M$. Spełnione są również własności $t(u') = u$ oraz $t(\widehat{f}(\mu_f(u))) = f(u)$. Zatem diagram z Definicji 2. jest przemienny.

Stwierdzenie 2. *Funkcja $\widehat{f} : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ jest częściowo określonym odwzorowaniem automatowym.*

Dowód. Dla słowa $u' \in X_\alpha^*$ postaci $u\alpha^{|f(u)|}$ mamy

$$|u'| = |u\alpha^{|f(u)|}| = |\alpha^{|u|} f(u)| = |f(u')|$$

i dla jego dowolnego przedrostka $v' \leqslant u'$

$$f(v') \leqslant f(u'), \qquad |f(v')| = |v'|.$$

Zatem $\widehat{f}$ posiada własności wymienione w stwierdzeniu 1. Ponadto zbiór M będący dziedziną $\widehat{f}$ jest zamknięty ze względu na przedrostki słów. Obydwa te fakty stwierdzają tezę. □

Przykład 1. Rozważmy funkcję $f : X^* \to X^*$, $X = \{0, 1\}$, zdefiniowaną w następujący sposób

$$f(u) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |u| \text{ parzyste,} \\ 11, & \text{gdy } |u| \text{ nieparzyste,} \\ \varepsilon, & \text{gdy } u = \varepsilon. \end{cases}$$

Funkcja f nie jest odwzorowaniem automatowym, gdyż nie zachowuje długości słów, a także nie posiada własności przedrostkowej. Ponieważ, w szczególności, $f(10) = 0$ i $f(101) = 11$, to dla odwzorowania rozszerzonego $\widehat{f}$ mamy

$$\widehat{f}(01\alpha) = \alpha\alpha 0 \quad \text{i} \quad \widehat{f}(101\alpha\alpha) = \alpha\alpha\alpha 11.$$

Można zauważyć, że w słowach po lewej stronie znaku równości symbole α oznaczają zakończenie ciągu symboli ze zbioru X, podczas gdy po drugiej stronie pełnią rolę symboli „pustych", tworzonych w czasie, gdy nie jest znana wartość funkcji. □

Przedstawimy dwie metody przedłużenia funkcji $\widehat{f} : M \to X_\alpha^*$ na zbiór X_α^* — rozszerzenie proste i rozszerzenie cykliczne.

Definicja 4. *Rozszerzeniem prostym funkcji $f : X^* \to X^*$ nazywamy funkcję $\widehat{f}_1 : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ zdefiniowaną w sposób następujący:*

> $\widehat{f}_1|_M = \widehat{f}$, *gdzie $\widehat{f}$ jest rozszerzeniem funkcji f, a M zbiorem wymienionym w Definicji 3.,*
>
> $\widehat{f}_1(\alpha^k v') = \alpha^k \widehat{f}_1(v')$,
>
> $\widehat{f}_1(u\alpha^{|f(u)|}v') = \alpha^{|u|} f(u)\alpha^{|v'|}$,
>
> $\widehat{f}_1(u\alpha^m v') = \alpha^{|u|} f(u)\alpha^n$, $m + |v'| = |f(u)| + n$ *dla* $m + |v'| \geqslant |f(u)|$,

$$\widehat{f}_1(u\alpha^m v') = \alpha^{|u|}v,\ v \leqslant f(u),\ m + |v'| = |v|\ dla\ m + |v'| < |f(u)|,$$

przy czym $u, v \in X^*$, $v' \in X_\alpha^*$.

Określone w ten sposób odwzorowanie automatowe ignoruje końcowy fragment postaci v' traktując go podobnie jak ciąg symboli α.

W następnej definicji skorzystamy z faktu, że dowolne słowo $v' \in X_\alpha^*$ można jednoznacznie zapisać w postaci

$$v' = \alpha^{k_0}u_1\alpha^{k_1}u_2\alpha^{k_2}\ldots u_n\alpha^{k_n}, \qquad u_i \in X^*,$$

gdzie $k_0, k_n \geqslant 0$ oraz $k_1, \ldots, k_{n-1} \geqslant 1$.

Definicja 5. *Rozszerzeniem cyklicznym funkcji* $f : X^* \to X^*$ *nazywamy funkcję* $\widehat{f}_2 : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ *zdefiniowaną w sposób następujący:*

> $\widehat{f}_2|_M = \widehat{f}$, *gdzie* $\widehat{f}$ *jest rozszerzeniem funkcji* f, *a* M *zbiorem wymienionym w Definicji 3.*,
>
> $\widehat{f}_2(\alpha^k) = \alpha^k$,
>
> $\widehat{f}_2(u\alpha^{|f(u)|}\alpha^k) = \alpha^{|u|}f(u)\alpha^k$,
>
> $\widehat{f}_2(u\alpha^m) = \alpha^{|u|}v, \qquad v \leqslant f(u), \quad |v| = m \quad dla \quad m < |f(u)|$,
>
> $\widehat{f}_2(v') = \alpha^{k_0}\widehat{f}_2(u_1\alpha^{k_1})\widehat{f}_2(u_2\alpha^{k_2})\ldots\widehat{f}_2(u_n\alpha^{k_n})$,

dla $v' = \alpha^{k_0}u_1\alpha^{k_1}u_2\alpha^{k_2}\ldots u_n\alpha^{k_n}$.

Uzyskane w ten sposób rozszerzenie automatowe działa niezależnie dla każdego fragmentu postaci $u_i\alpha^{k_i}$.

Przykład 2. Niech $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ będzie funkcją zdefiniowaną w następujący sposób:

$$f(u) = \begin{cases} 22 & \text{dla } u = 1, \\ 4 & \text{dla } u = 33, \\ \varepsilon & \text{dla } u \ / \ \{1, 33\}. \end{cases}$$

Wtedy działanie rozszerzeń prostego i cyklicznego można zilustrować tabelką

$u \in X_\alpha^*$	$1\alpha\alpha$	1α	33α	33	$1\alpha 1\alpha$	$3\alpha 33\alpha$
$\widehat{f}_1(u)$	$\alpha 22$	$\alpha 2$	$\alpha\alpha 4$	$\alpha\alpha$	$\alpha 2\alpha\alpha$	$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$
$\widehat{f}_2(u)$	$\alpha 22$	$\alpha 2$	$\alpha\alpha 4$	$\alpha\alpha$	$\alpha 2\alpha 2$	$\alpha\alpha\alpha\alpha 4$

□

Stwierdzenie 3.

1. *Dla dowolnej funkcji $f : X^* \to X^*$, $f(\varepsilon) = \varepsilon$ zachodzą poniższe własności:*

   a) *rozszerzenia proste i cykliczne są dobrze określonymi odwzorowaniami automatowymi nad alfabetem X_α^*,*

   b) *$\widehat{f}_1 \neq \widehat{f}_2$, oprócz przypadku, gdy f jest trywialne (tzn. $f(u) = \varepsilon$ dla dowolnego $u \in X^*$).*

2. *Dla dowolnych funkcji $f, g : X^* \to X^*$, $f(\varepsilon) = g(\varepsilon) = \varepsilon$, takich że $f \neq g$, mamy*

$$\widehat{f}_1 \neq \widehat{g}_1, \qquad \widehat{f}_2 \neq \widehat{g}_2.$$

Dowód. (1a) Podane wcześniej definicje pozwalają obliczyć $\widehat{f}_1(u')$ oraz $\widehat{f}_2(u')$ dla dowolnego $u' \in X_\alpha^*$. Zarówno $\widehat{f}_1$, jak i $\widehat{f}_2$ są odwzorowaniami automatowymi, gdyż dla dowolnego słowa $u' \in X_\alpha^*$ mamy

$$|\widehat{f}_1(u')| = |\widehat{f}_2(u')| = |u'|.$$

Druga własność ze Stwierdzenia 1. również wynika wprost z definicji rozszerzeń prostego oraz cyklicznego.

(1b) Jeżeli f jest funkcją trywialną to $\widehat{f}_1(u') = \widehat{f}_2(u') = \alpha^{|u'|}$ dla dowolnego $u' \in X_\alpha^*$. W przeciwnym przypadku istnieje słowo $u \in X^*$, takie że $f(u) = v \neq \varepsilon$. Rozszerzenia $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_2$ są różne, ponieważ

$$\widehat{f}_1(u\alpha^{|v|}u\alpha^{|v|}) = \alpha^{|u|}v\alpha^{|u|}\alpha^{|v|} \qquad \text{oraz} \qquad \widehat{f}_2(u\alpha^{|v|}u\alpha^{|v|}) = \alpha^{|u|}v\alpha^{|u|}v.$$

(2) Wystarczy pokazać, że pierwotna funkcja f jest wyznaczona jednoznacznie zarówno przez rozszerzenie $\widehat{f}_1$, jak i $\widehat{f}_2$. Niech $\widehat{f} : X_\alpha \to X_\alpha$

będzie rozszerzeniem prostym lub cyklicznym. Udowodnimy, że dla dowolnego $u \in X^*$ można wyznaczyć słowo $f(u)$. Weźmy ciąg słów $v_i = \widehat{f}(u\alpha^i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Istnieje liczba j, taka że ostatnie symbole słów v_i, $i \leqslant j$ są różne od α, a wszystkie słowa v_i, $i > j$ kończą się symbolem α. Można zauważyć, że $f(u) = t(v_j)$, skąd wynika, że funkcja f jest wyznaczona jednoznacznie przez $\widehat{f}$ i w konsekwencji operacje rozszerzenia $f \mapsto \widehat{f}_1$ oraz $f \mapsto \widehat{f}_2$ są funkcjami różnowartościowymi. $\square$

3. Dynamiczne własności rozszerzeń automatowych

Grafem odwzorowania $g : A \to A$ nazywamy parę (A, g), gdzie A jest zbiorem wierzchołków, a $g = \{(a_1, a_2) \in A \times A : a_2 = g(a_1)\}$ zbiorem krawędzi.

Stwierdzenie 4. *Niech $\widehat{f}$ będzie prostym lub cyklicznym rozszerzeniem automatowym funkcji $f : X^* \to X^*$. Wówczas:*

1. *Słowo $u' \in X_\alpha^*$ jest punktem stałym odwzorowania $\widehat{f}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$t(u') = \varepsilon,$$
to znaczy ma postać $u' = \alpha \ldots \alpha$.

2. *Graf odwzorowania $\widehat{f} : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ jest lasem. Każde drzewo w tym grafie posiada zbiór wierzchołków złożony ze słów tej samej długości. Korzeniem drzewa jest słowo postaci $\alpha \ldots \alpha$.*

Dowód. (1) Wprost z definicji rozszerzenia każde słowo ze zbioru $\{\alpha\}^*$ jest punktem stałym $\widehat{f}$. Dla $u' \in X_\alpha^* \setminus \{\alpha\}^*$ mamy
$$\alpha^k \leqslant u' \quad \Rightarrow \quad \alpha^{k+1} \leqslant \widehat{f}(u'),$$
zatem $\widehat{f}$ wydłuża liczbę początkowych symboli α, skutkiem czego u' nie jest punktem stałym funkcji $\widehat{f}$.

(2) W grafie odwzorowania $\widehat{f}$ nie występują nietrywialne cykle, gdyż pozycja, na której w słowie występuje pierwszy symbol ze zbioru X, ulega zwiększeniu w wyniku działania odwzorowania. Składowymi spójności grafu są drzewa o stałej długości wierzchołków, co wynika z faktu, że $\widehat{f}$ zachowuje długości słów. W każdym drzewie istnieje dokładnie jeden punkt stały $u' \in \{\alpha\}^*$ będący wierzchołkiem drzewa. $\square$

Uwaga. Można rozważać rozszerzenie automatowe $\widehat{f}$ określone na zbiorze nieskończonych słów w następujący sposób

$$\widehat{f} : X_\alpha^* \alpha^\omega \to X_\alpha^* \alpha^\omega,$$

$$\mu_f(u) = u\alpha^{|f(u)|}\alpha^\omega = u\alpha^\omega,$$

$$\widehat{f}(u') = \alpha^{|u|} f(u)\alpha^\omega, \quad u' = \mu_f(u),$$

skutkiem czego nieskończone słowo $\alpha^\omega = \alpha\alpha\ldots$ jest jedynym punktem stałym. Odwzorowanie to można przedłużyć na zbiór $X_\alpha^*\alpha^\omega$ zgodnie z jednym z dwóch wcześniej opisanych wariantów. Graf odwzorowania $\widehat{f} : X_\alpha^*\alpha^\omega \to X_\alpha^*\alpha^\omega$ jest drzewem, którego korzeniem jest słowo α^ω. $\square$

Niech X będzie ustalonym alfabetem. Rozważmy monoid wszystkich funkcji $f : X^* \to X^*$ spełniających warunek $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Funkcja

$$0 : u \mapsto \varepsilon, \qquad u \in X^*,$$

jest zerem monoidu. Podobnie w monoidzie generowanym przez rozszerzenia automatowe postaci $\widehat{f}_1 : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ oraz $\widehat{f}_2 : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ odwzorowanie

$$\widehat{0} : u \mapsto \alpha^{|u|}, \qquad u \in X_\alpha^*$$

jest prawostronnym zerem, gdyż dla dowolnego rozszerzenia $\widehat{f}$ mamy

$$u \xmapsto{\widehat{f}} v \xmapsto{\widehat{0}} \alpha^{|u|}, \qquad u \in X_\alpha^*,$$

jak również jest lewostronnym zerem

$$u \xmapsto{\widehat{0}} \alpha^{|u|} \xmapsto{\widehat{f}} \alpha^{|u|}, \qquad u \in X_\alpha^*,$$

ponieważ $\alpha^{|u|}$ jest punktem stałym każdego rozszerzenia automatowego. Na tej podstawie w dalszej części zostaną sformułowane warunki nilpotentności rozszerzeń automatowych.

Przypomnijmy, że element x półgrupy z zerem nazywa się *nilpotentnym*, jeżeli istnieje liczba k, taka że $x^k = 0$. Najmniejszą liczbę o tej własności odpowiadającą nilpotentowi x oznaczać będziemy przez $\mathrm{nil}(x)$. Więcej informacji można znaleźć w pracy [4].

Lemat 1. *Niech $\widehat{f} : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ będzie prostym lub cyklicznym rozszerzeniem automatowym funkcji $f : X^* \to X^*$. Jeżeli $\widehat{f}$ jest nilpotentem, to również f jest nilpotentem oraz zachodzi nierówność*

$$nil(f) \leqslant nil(\widehat{f}).$$

Dowód. Przypuśćmy, że f nie jest elementem nilpotentnym. Wtedy dla dowolnej liczby k istnieje ciąg

$$u_1 \stackrel{f}{\longmapsto} u_2 \stackrel{f}{\longmapsto} \dots \stackrel{f}{\longmapsto} u_k \neq \varepsilon.$$

Na podstawie powyższego ciągu konstruujemy odpowiadający mu ciąg dla odwzorowania $\widehat{f}$, mianowicie:

$$\begin{aligned}
&v_1 = u_1\alpha^{n_1},\\
&v_2 = \alpha^{|u_1|}u_2\alpha^{n_2},\\
&v_3 = \alpha^{|u_1|}\alpha^{|u_2|}u_3\alpha^{n_3},\\
&\vdots\\
&v_k = \alpha^{|u_1|}\alpha^{|u_2|}\dots\alpha^{|u_{k-1}|}u_k\alpha^{n_k},
\end{aligned}$$

przy czym liczby n_i są dobrane tak, aby

$$|v_1| = |v_2| = \dots = |v_k|.$$

Ze sposobu określenia ciągu $v_1, \dots, v_k$ wynika, że

$$v_1 \stackrel{\widehat{f}}{\longmapsto} v_2 \stackrel{\widehat{f}}{\longmapsto} \dots \stackrel{\widehat{f}}{\longmapsto} v_k.$$

Ostatni wyraz tego ciągu jest nietrywialnym słowem, co stanowi sprzeczność z nilpotentnością odwzorowania $\widehat{f}$. W ten sposób otrzymujemy uzasadnienie zarówno nilpotentności, jak i powyższej nierówności. $\square$

Lemat 2. *Niech $\widehat{f_2} : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ będzie cyklicznym rozszerzeniem automatowym funkcji $f : X^* \to X^*$. Jeżeli $\widehat{f_2}$ jest nilpotentem, to słowo u nie jest przedrostkiem $f(u)$ dla dowolnego $u \in X^* \setminus \{\varepsilon\}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że u jest takim przedrostkiem. Wówczas dla dowolnej liczby m oraz

$$u' = (u\alpha^{|u|})^m,$$

otrzymujemy ciąg

$$\widehat{f_2} : u' \mapsto f(u') \mapsto f^2(u') \mapsto \dots \mapsto f^{2m}(u')$$

złożony z nietrywialnych słów. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem nilpotentności. □

Przykład 3. Niech X będzie jednoelementowym alfabetem ($|X| = 1$), a $\widehat{f_2} : X_\alpha^* \to X_\alpha^*$ cyklicznym rozszerzeniem funkcji $f : X^* \to X^*$. Odwzorowanie $\widehat{f_2}$ jest nilpotentne wtedy i tylko wtedy, gdy f jest nilpotentne oraz dla dowolnego słowa $u \in X^*$ zachodzi nierówność

$$|f(u)| < |u|.$$

Dowód. Powyżej pokazano, że warunki te są konieczne dla nilpotentności $\widehat{f}$. Z drugiej strony, jeżeli są one spełnione, to odwzorowanie $\widehat{f_2}$ jest nilpotentne, gdyż wspomniane w jego definicji fragmenty postaci $u_i\alpha^{|k_i|}$ są przetwarzane niezależnie. Dlatego nie istnieje ciąg

$$\widehat{f_2} : v_1' \mapsto v_2' \mapsto \dots \mapsto v_n'$$

o długości większej niż $\mathrm{nil}(f)$. □

Należy zauważyć, że powyższe warunki nie są konieczne dla przypadku $|X| > 1$. Przykładem jest funkcja

$$f(u) = \begin{cases} 2 & \text{dla } u = 1, \\ \varepsilon & \text{dla } u \neq 1, \end{cases}$$

której rozszerzenie jest nilpotentem. Następny przykład ułatwi znalezienie kryterium w ogólnym przypadku.

Przykład 4. Niech $f : X^* \to X^*$, $X = \{0, 1\}$ będzie funkcją zdefiniowaną w sposób następujący

$$f(u) = \begin{cases} \varepsilon & \text{gdy } u = 0^k,\ k \in \{1, 3, 5, \dots\}, \\ \varepsilon & \text{gdy } u = 1^k,\ k \in \{0, 2, 4, \dots\}, \\ 0^k & \text{gdy } |u| = k \in \{1, 3, 5, \dots\}, \\ 1^k & \text{gdy } |u| = k \in \{0, 2, 4, \dots\}. \end{cases}$$

Funkcja f zamienia wszystkie litery słowa na symbole 0, jeśli jego długość jest liczbą nieparzystą, albo na symbole 1 w przeciwnym przypadku (z wyjątkiem sytuacji, gdy słowo jest postaci 0^k lub 1^k). Funkcja f nie jest odwzorowaniem automatowym, jest natomiast nilpotentem ($\mathrm{nil}(f) = 2$).

Rozszerzenie automatowe $\widehat{f_2}$ nie jest jednak nilpotentne, ponieważ można utworzyć dowolnej długości ciąg

$$u',\ \widehat{f_2}(u'),\ \widehat{f_2}^2(u'),\ \dots,\ \widehat{f_2}^m(u')$$

złożony z elementów nietrywialnych. Wystarczy w tym celu wziąć słowo

$$u' = 0^{2k}\alpha^{2k-1}0^{2k-2}\alpha^{2k-3}\dots 00\alpha, \qquad 2k \geqslant m,$$

dla którego otrzymujemy ciąg

$$\begin{aligned} v_1 &= \overbrace{0\dots0}^{2k}\ \overbrace{\alpha\dots\alpha}^{2k-1}\ \overbrace{0\dots0}^{2k-2}\ \overbrace{\alpha\dots\alpha}^{2k-3}\dots\ 00\,\alpha \\ v_2 &= \alpha\dots\alpha\ 1\dots1\ \alpha\dots\alpha\ 1\dots1\ \dots\ \alpha\alpha\,1 \\ v_3 &= \alpha\dots\alpha\ \alpha\dots\alpha\ 0\dots0\ \alpha\dots\alpha\dots\ 00\,\alpha \\ &\ \vdots \\ v_{2k} &= \alpha\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \alpha \end{aligned}$$

spełniający warunek $v_{2k-1} \notin \{\alpha\}^*$. Fakt ten dowodzi, że $\widehat{f_2}$ nie jest nilpotentem. □

Z powyższego przykładu wynika, że kryterium nilpotentności powinno ograniczać długość ciągów postaci

$$u_1 \stackrel{f}{\longmapsto} u_2 \stackrel{f}{\longmapsto} \dots \stackrel{f}{\longmapsto} u_k \neq \varepsilon, \qquad u_i \in X^*$$

nie tylko gdy każdy element jest obrazem poprzednika, ale także gdy jest przedrostkiem obrazu poprzednika.

Twierdzenie 1. *Niech $f : X^* \to X^*$ będzie funkcją, taką że $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Wówczas:*

1. *rozszerzenie proste $\widehat{f_1} : X^*_\alpha \to X^*_\alpha$ jest nilpotentne wtedy i tylko wtedy, gdy f jest nilpotentne. Jeżeli f jest nilpotentem, to zachodzi równość*

$$nil(f) = nil(\widehat{f_1}),$$

2. *rozszerzenie cykliczne $\widehat{f_2} : X^*_\alpha \to X^*_\alpha$ jest nilpotentne wtedy i tylko wtedy, gdy f jest nilpotentne oraz długości ciągów*

$$u_1, u_2, \ldots, u_m, \qquad u_k \leqslant f(u_{k-1}), \qquad u_m \neq \varepsilon$$

są wspólnie ograniczone.

Dowód. (1) Zgodnie z definicją rozszerzenia prostego widać, że wystarczy zbadać sytuację dla słów v', takich że $t(v')$ jest fragmentem v' lub inaczej takich, dla których symbol α nie występuje pomiędzy symbolami ze zbioru X.

Rozważmy ciąg

$$\widehat{f_1} : v'_1 \mapsto v'_2 \mapsto \ldots \mapsto v'_d.$$

Wówczas dla $u_i = t(v'_i)$ otrzymujemy ciąg

$$f : u_1 \mapsto u_2 \mapsto \ldots \mapsto u_d,$$

skąd wynika nierówność $\mathrm{nil}(f) \geqslant \mathrm{nil}(\widehat{f_1})$. Nierówność przeciwna została udowodniona w Lemacie 2.

(2) Pierwszy warunek jest konieczny, co wynika z Lematu 2. Ponadto, Przykład 4. ukazuje, że drugi warunek również jest konieczny.

Omawiane warunki są wystarczające dla nilpotentności $\widehat{f_2}$, gdyż przy założeniu nilpotentności f jedynym sposobem na uzyskanie ciągu

$$\widehat{f_2} : v'_1 \mapsto v'_2 \mapsto \ldots \mapsto v'_d$$

o długości większej niż nil(f) jest wykorzystanie własności niezależnego przetwarzania przez odwzorowanie $\widehat{f_2}$ fragmentów postaci $u_i\alpha^{k_i}$ przedstawione w Przykładzie 4. Drugi warunek w oczywisty sposób implikuje nilpotentność $\widehat{f_2}$. $\square$

Uwaga. Należy zaznaczyć, że w przypadku rozszerzenia cyklicznego możliwa jest sytuacja

$$\mathrm{nil}(f) < \mathrm{nil}(\widehat{f_2}),$$

ponieważ ograniczenie długości wyżej wspomnianych ciągów wpływa na wartość nil($\widehat{f_2}$) będąc jednocześnie niezależne od wartości nil(f). $\square$

Literatura

1. S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. A, Academic Press, New York 1974.
2. В. М. Глушков, *Абстрактная теория автоматов*, Усп. мат. наук **XVI 5(101)** (1961), 3–62.
3. R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchanskii, *Automata, Dynamical Systems, and Groups*, Proc. Steklov Inst. Math. **231** (2000), 128–203.
4. G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications*, Wiley, New York 1979.
5. A. Blikle, *Automaty i gramatyki*, PWN, Warszawa 1971.
6. J. Szabatin, *Zarys abstrakcyjnej teorii automatów*, PWN, Warszawa 1972.

Mirosław Osys
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

In the set of all transformations of the set of finite words over given alphabet we distinguish a subset of the automaton mappings, i.e. transformations induced by (finite or infinite) Mealy automata . Although both sets are uncountable, not every function $f : X^* \to X^*$ is induced by certain automaton. It is known fact that after addition a new symbol to the alphabet, arbitrary transformation can be extended to an automaton mapping, that uniquely determines the initial transformation. Moreover, an effective method for such constructions exists.

Since mentioned extension is not unique, we define two different possibilities of the construction, the plain extension and the cyclic extension, and develop some basic properties of them. The main result of this paper is a characterization of the nilpotent automaton extensions.