ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 91 Nr kol. 1652

Dariusz PĄCZKO

ZACHOWANIE WŁASNOŚCI REGULARNOŚCI PEWNYCH TYPÓW UKŁADÓW LINIOWYCH ROZSZERZEŃ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH NA TORUSIE

Streszczenie. Praca ta jest poświęcona znalezieniu warunków istnienia funkcji Greena–Samojlenki dla pewnego liniowego rozszerzenia układu dynamicznego na torusie.

REGULARITY OF CERTAIN LINEAR EXTENSION OF DYNAMIC SYSTEMS ON TORUS

Summary. This paper is devoted to finding conditions of existance of Green–Samoylenko function of certain linear extension of dynamic system on torus.

Rozpatrzmy zagadnienie istnienia funkcji Greena-Samojlenki dla liniowego rozszerzenia układu dynamicznego na torusie postaci

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \dfrac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = B(\varphi)x - A^T(\varphi)y, \end{cases} \tag{1}$$

w którym $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T_m$, funkcja wektorowa $a(\varphi)$ i macierze $n \times n$ - wymiarowe $A(\varphi), B(\varphi)$, których elementami są funkcje ciągłe względem

wszystkich zmiennych φ_j, $j = \overline{1,m}$, są 2π-okresowe. Inaczej mówiąc, są określone na m-wymiarowym torusie T_m. Będziemy także zakładać, że funkcja wektorowa $a(\varphi)$ spełnia warunek Lipschitza:

$$\|a(\varphi) - a(\overline{\varphi})\| \leqslant L\|\varphi - \overline{\varphi}\|, \qquad \forall \varphi, \overline{\varphi} \in T_m, \quad L = \text{const} > 0,$$

co zapisujemy $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$.

Wiadomo (patrz [1]), że jeśli układ

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \dfrac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases} \tag{2}$$

jest słabo regularny, tzn. posiada chociażby jedną funkcję Greena-Samojlenki, natomiast macierz $B(\varphi)$ spełnia warunek

$$\langle B(\varphi)x, x\rangle \geqslant \|x\|^2, \tag{3}$$

gdzie $\langle\,.\,,.\,\rangle$ oznacza iloczyn skalarny, wówczas układ (1) posiada dokładnie jedną funkcję Greena-Samojlenki, czyli jest regularny.

Powstaje pytanie, czy spośród układów postaci (1) można wydzielić klasę układów zachowujących regularność, jeśli dopuścimy możliwość degeneracji macierzy $B(\varphi)$, a więc niespełnienie warunku (3). Odpowiedź na to pytanie jest celem tej pracy.

Punktem wyjścia do rozważań jest następujący przykład

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \dfrac{dx}{dt} = (\cos\varphi)x, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $\varphi \in T_1$, $x \in \mathbb{R}$, o którym wiadomo, że posiada nieskończenie wiele funkcji Greena-Samojlenki, gdyż pochodna formy kwadratowej

$$V = (-\cos\varphi)y^2$$

wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \dfrac{dy}{dt} = -(\cos\varphi)y, \qquad y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5}$$

jest dodatnio określona, przy czym V degeneruje się dla $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Udowodnimy teraz regularność układu

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = (\cos\varphi)x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (\sin\varphi)x_1 - (\cos\varphi)x_2, \end{cases} \tag{6}$$

gdzie $\varphi \in T_1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, a następnie uzyskane wyniki spróbujemy uogólnić dla bardziej złożonego przypadku.

Okazuje się, że układ (6) jest regularny, ponieważ jeśli weźmiemy formę kwadratową

$$V = \langle S(\varphi)x,\, x\rangle = x_1^2\cos\varphi + 2x_1x_2\sin\varphi - x_2^2\cos\varphi, \tag{7}$$

gdzie

$$S(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix},$$

to pochodna tej formy wzdłuż rozwiązań układu (6) jest dodatnio określona. Mamy zatem

$$\dot{V} = x_1^2(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + x_2^2(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \geqslant x_1^2 + x_2^2.$$

Znajdźmy, przy jakim $\rho(\varphi)$ uogólnienie układu (6) w postaci

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \rho(\varphi)\sin\varphi, & \\ \dfrac{dx_1}{dt} = (\cos\varphi)x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (\sin\varphi)x_1 - (\cos\varphi)x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}$$

jest także układem regularnym, gdzie $\varphi \in T_1$, $\rho(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_1)$. Weźmy formę kwadratową

$$V = \langle S(\varphi)x,\, x\rangle, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

gdzie

$$S(\varphi) = \begin{bmatrix} (\cos\varphi)I_n & (\sin\varphi)I_n \\ (\sin\varphi)I_n & -(\cos\varphi)I_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas V można zapisać w postaci

$$V = \|x_1\|^2 \cos\varphi + 2\langle x_1,\, x_2\rangle \sin\varphi - \|x_2\|^2 \cos\varphi. \tag{9}$$

Sprawdźmy, przy jakich warunkach nałożonych na funkcję $\rho(\varphi)$ pochodna formy (9) wzdłuż rozwiązań układu (8) będzie dodatnio określona. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\dot{V} =& 2\|x_1\|^2 \cos^2\varphi - \|x_1\|^2 \rho(\varphi) \sin^2\varphi + 2\langle x_1,\, x_2\rangle \sin\varphi\cos\varphi + \\ &+ 2\langle x_1,\, (\sin\varphi)x_1 - (\cos\varphi)x_2\rangle \sin\varphi + 2\langle x_1,\, x_2\rangle \rho(\varphi) \sin\varphi\cos\varphi - \\ &- 2\langle x_2,\, (\sin\varphi)x_1 - (\cos\varphi)x_2\rangle \cos\varphi + \|x_2\|^2 \rho(\varphi) \sin^2\varphi,\end{aligned}$$

skąd po uporządkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{V} =& \|x_1\|^2 (2\cos^2\varphi - \rho(\varphi)\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi) + \\ &+ 2\langle x_1,\, x_2\rangle (\rho(\varphi) - 1) \sin\varphi\cos\varphi + \|x_2\|^2 (2\cos^2\varphi + \rho(\varphi)\sin^2\varphi).\end{aligned}$$

Ponieważ jednak

$$\begin{aligned}&2\langle x_1,\, x_2\rangle (\rho(\varphi) - 1) \sin\varphi\cos\varphi \geqslant \\ &\qquad \geqslant -\|x_1\|\|x_2\||\rho(\varphi) - 1||\sin 2\varphi| \geqslant -\|x_1\|\|x_2\||\rho(\varphi) - 1|,\end{aligned}$$

zatem mamy

$$\begin{aligned}\dot{V} \geqslant& \|x_1\|^2 (2 - \rho(\varphi)\sin^2\varphi) - \|x_1\|\|x_2\||\rho(\varphi) - 1| + \\ &+ \|x_2\|^2 (2\cos^2\varphi + \rho(\varphi)\sin^2\varphi).\end{aligned} \tag{10}$$

Wynika stąd, że koniecznym warunkiem dodatniej określoności $\dot{V}$ jest spełnienie nierówności

$$2 - \rho(\varphi)\sin^2\varphi > 0, \tag{11}$$

$$2\cos^2\varphi + \rho(\varphi)\sin^2\varphi > 0, \tag{12}$$

co oznacza, że

$$0 < \rho(\varphi) < 2.$$

Z nierówności (10) otrzymujemy dalej

$$\dot{V} \geqslant \|x_1\|^2(2-\rho(\varphi)) - \|x_1\|\|x_2\||\rho(\varphi)-1| + \|x_2\|^2\rho(\varphi).$$

Posłużmy się teraz formą kwadratową

$$\Phi(t_1,t_2) = t_1^2(2-\rho) - t_1t_2|\rho-1| + \rho t_2^2. \tag{13}$$

Aby forma kwadratowa (13) była dodatnio określona, musi zachodzić nierówność

$$\begin{vmatrix} 2-\rho & -\frac{1}{2}|\rho-1| \\ -\frac{1}{2}|\rho-1| & \rho \end{vmatrix} > 0.$$

Otrzymujemy stąd

$$1 - \frac{2}{\sqrt{5}} < \rho < 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Przeprowadzone rozważania pozwalają sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja $\rho(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$ spełnia nierówność*

$$|\rho(\varphi)-1| < \frac{2}{\sqrt{5}}, \tag{14}$$

to układ równań (8) będzie regularny i pochodna formy kwadratowej (9) wzdłuż rozwiązań układu (8) będzie dodatnio określona.

Układ (8) można dalej uogólnić do układu postaci

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \rho(\varphi)\sin\varphi, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = (\cos\varphi)x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (\sin\varphi)Bx_1 - (\cos\varphi)x_2, \end{cases} \tag{15}$$

przy czym B jest macierzą $n \times n$-wymiarową oraz

$$\det B \neq 0. \tag{16}$$

Podstawiając $\overline{x}_1 = Bx_1$, otrzymamy układ

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \rho(\varphi)\sin\varphi, \\ \dfrac{d\overline{x}_1}{dt} = (\cos\varphi)\overline{x}_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (\sin\varphi)\overline{x}_1 - (\cos\varphi)x_2, \end{cases}$$

dla którego, przy spełnieniu warunków (14), (16), pochodna formy kwadratowej

$$\begin{aligned} V = \|\overline{x}_1\|^2\cos\varphi + 2\langle\overline{x}_1,\, x_2\rangle\sin\varphi - \|x_2\|^2\cos\varphi = \\ = \|Bx_1\|^2\cos\varphi + 2\langle Bx_1,\, x_2\rangle\sin\varphi - \|x_2\|^2\cos\varphi, \end{aligned}$$

będzie również dodatnio określona.

Zbadajmy teraz układ

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = (\cos\varphi)A(\varphi)x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (\sin\varphi)B(\varphi)x_1 - (\cos\varphi)A^T(\varphi)x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{17}$$

gdzie $A(\varphi), B(\varphi) \in C^0(T_1)$ są macierzami $n\times n$-wymiarowymi. Sprawdźmy, przy jakich warunkach pochodna formy kwadratowej postaci

$$V = \langle S_1x_1,\, x_1\rangle\cos\varphi + 2\langle S_{12}x_1,\, x_2\rangle\sin\varphi + \langle S_2x_2,\, x_2\rangle\cos\varphi$$

wzdłuż rozwiązań układu (17) jest dodatnio określona, przy czym S_1, S_{12}, S_2 są $n\times n$-wymiarowymi stałymi macierzami oraz $S_i = S_i^T$ dla $i = 1, 2$.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \dot{V} =& 2\langle S_1x_1,\, A(\varphi)x_1\rangle\cos^2\varphi - \langle S_1x_1,\, x_1\rangle\sin^2\varphi + \\ &+ 2\langle S_{12}A(\varphi)x_1,\, x_2\rangle\sin\varphi\cos\varphi + 2\langle S_{12}x_1,\, x_2\rangle\sin\varphi\cos\varphi + \\ &+ 2\langle S_{12}x_1,\, (\sin\varphi)B(\varphi)x_1 - (\cos\varphi)A^T(\varphi)x_2\rangle\sin\varphi + \\ &+ 2\langle S_2x_2,\, (\sin\varphi)B(\varphi)x_1 - (\cos\varphi)A^T(\varphi)x_2\rangle\cos\varphi - \\ &- \langle S_2x_2,\, x_2\rangle\sin^2\varphi, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{V} =& \Big\langle (S_1A(\varphi) + A^T(\varphi)S_1)x_1,\, x_1\Big\rangle \cos^2\varphi + \\ &+ \Big\langle [S_{12}^TB(\varphi) + B^T(\varphi)S_{12} - S_1]x_1,\, x_1\Big\rangle \sin^2\varphi + \\ &+ \Big\langle [S_{12}A(\varphi) + S_{12} - A(\varphi)S_{12} + S_2B(\varphi)]x_1,\, x_2\Big\rangle \sin\varphi\cos\varphi + \\ &+ \Big\langle -[A(\varphi)S_2 + S_2A^T(\varphi)]x_2,\, x_2\Big\rangle \cos^2\varphi - \\ &- \langle S_2x_2,\, x_2\rangle \sin^2\varphi.\end{aligned} \tag{18}$$

Widać stąd, że koniecznym warunkiem dodatniej określoności $\dot{V}$ jest spełnienie warunków:

$$\Big\langle [A(\varphi)S_2 + S_2A^T(\varphi)]x_2,\, x_2\Big\rangle \leqslant -\|x_2\|^2, \tag{19}$$

$$\langle S_2x_2,\, x_2\rangle \leqslant -\|x_2\|^2. \tag{20}$$

Jeśli teraz w nierówności (19) zrobimy zamianę zmiennych

$$x_2 = S_2^{-1}x_1,$$

to uzyskamy

$$\Big\langle [S_2^{-1}A(\varphi) + A^T(\varphi)S_2^{-1}]x_1,\, x_1\Big\rangle \leqslant -\|S_2^{-1}x_1\|^2 \leqslant -\frac{1}{\|S_2\|^2}\|x_1\|^2,$$

W ten sposób otrzymaliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Niech istnieją dwie stałe macierze S i S_{12}, przy czyn $S = S^T$, dla których spełnione są warunki*

$$\langle Sx,\, x\rangle \leqslant -\|x\|^2,$$

$$\Big\langle (A(\varphi)S + SA^T(\varphi))x,\, x\Big\rangle \leqslant -\|x\|^2,$$

$$\Big\langle (S_{12}^TB(\varphi) + B^T(\varphi)S_{12} + S^{-1})x,\, x\Big\rangle \geqslant \varepsilon\|x\|^2, \qquad \varepsilon = const > 0,$$

$$S_{12}A(\varphi) - A(\varphi)S_{12} + S_{12} + SB(\varphi) \equiv 0.$$

Wówczas pochodna niezdegenerowanej formy kwadratowej

$$V = -\langle S^{-1}x_1,\, x_1\rangle \cos\varphi + 2\langle S_{12}x_1,\, x_2\rangle \sin\varphi + \langle Sx_2,\, x_2\rangle \cos\varphi,$$

wzdłuż rozwiązań układu (17) będzie dodatnio określona, tzn. układ (17) posiada dokładnie jedną $2n \times 2n$-wymiarową funkcję Greena-Samojlenki z eksponencjalnym szacunkiem.

Literatura

1. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulik, *Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems*, Taylor & Francis, London 2003.
2. Ju. A. Mitropolski, A. M. Samojlenko, W. L. Kulik, *Issliedowanie dichotomii liniejnych sistiem diffieriencialnch urawnienij s pomoszcziu funkcij Liapunowa*, Nauk. Dumka, Kijew 1990.

Dariusz Pączko
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

In this work we consider linear extension of dynamic system on torus in following form

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \dfrac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = B(\varphi)x - A^T(\varphi)y, \end{cases} \tag{21}$$

where $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in T_m$, $A(\varphi), B(\varphi)$ are $n \times n$ dimensional matrices whose elements are continous and 2π periodical functions

in respect to every variable φ_j, $j = 1, \ldots, m$, vector function $a(\varphi)$ is also 2π periodical in respect to every variable φ_j, $j = 1, \ldots, m$, and satisfy Lipschitz condition, i.e.

$$\|a(\varphi) - a(\overline{\varphi})\| \leqslant L\|\varphi - \overline{\varphi}\|, \qquad \forall \varphi, \overline{\varphi} \in T_m, \quad L = \text{const} > 0.$$

It is well-known (see [1]) that if system

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \dfrac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases} \tag{22}$$

is weak regular (i.e. posesses at least one Green-Samoylenko function) and matrix $B(\varphi)$ fulfieled condition

$$\langle B(\varphi)x,\, x\rangle \geqslant \|x\|^2, \tag{23}$$

then unique Green–Samoylenko function exists for system (21). This paper is aimed to answer the question if similar property is satisfied in case when matrix $B(\varphi)$ may be degenerated.