

Bożena PIĄTEK

## ZASTOSOWANIE R-FUNKCJI DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH

**Streszczenie.** W pracy autor rozważa metodę R-funkcji Rwa-czewa do rozwiązania dwuwymiarowego bezpośredniego zagadnienia brzegowego. Następnie zastosowano R-funkcje do zagadnienia odwrotnego z niepełnym opisem warunków brzegowych. Oba przypadki zilustrowane są przykładami numerycznymi.

## AN APPLICATION OF R-FUNCTIONS TO SOLVING INVERSE PROBLEMS

**Summary.** We study using R-functions method to solve two dimensional direct boundary problem. An application of R-functions is also extended for inverse problem with incomplete information about boundary conditions which are satisfied. The method is illustrated by numerical examples.

### 1. Wstęp

W wielu zagadnieniach fizykalnych stan obiektu jest jednoznacznie definiowany przez zadane równanie różniczkowe oraz odpowiednio sformułowane warunki graniczne. Opis matematyczny zjawiska to tylko część sukcesu, powstaje bowiem natychmiast problem znalezienia rozwiązania tak sfor-

mułowanego zagadnienia. Rozwiązań można poszukiwać metodami analitycznymi, numerycznymi lub hybrydowymi. Do tej ostatniej grupy należy między innymi metoda bazująca na teorii R-funkcji. Aparat R-funkcji z reguły stosowany jest do rozwiązywania różnorodnych bezpośrednich zagadnień granicznych dla równań fizyki matematycznej przy dokładnej informacji o warunkach brzegowych. Przedstawiona praca stanowi jedną z nielicznych prób rozwiązania z użyciem aparatu R-funkcji brzegowych zagadnień odwrotnych [1], tzn. zagadnień z niepełną informacją o warunkach panujących na brzegu rozważanego obszaru. Z sytuacją taką najczęściej stykamy się w przypadku próby opisu rzeczywistych procesów przemysłowych. W niniejszej pracy autorzy prezentują konstrukcję rozwiązania zagadnień granicznych oraz brzegowych zagadnień odwrotnych dla środowisk, których stan opisują dwuwymiarowe eliptyczne równania różniczkowe, w tym Laplace'a oraz Poissona.

## 2. Sformułowanie problemu bezpośredniego

Niech  $\Omega$  – oznacza pewien fizyczny obiekt (obszar ograniczony w przestrzeni  $\mathbf{R}^2$ ) z brzegiem  $\partial\Omega$ , w którym zachodzące procesy opisuje równanie różniczkowe:

$$\Delta T - k \cdot T = F, \quad k \geq 0. \quad (1)$$

gdzie:  $T(x, y)$  – stanowi szukaną funkcję stanu,  $k$  – stały parametr procesu, natomiast  $F$  – zadaną funkcję dwóch zmiennych  $x$  i  $y$ .

Należy znaleźć taką funkcję stanu  $T$ , aby na brzegu:

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i \quad \text{gdzie} \quad \forall i: \Gamma_i \neq \emptyset \quad \text{oraz} \quad \forall i \neq j: \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset,$$

spełniała ona z góry zadane warunki brzegowe:

$$T \Big|_{\Gamma_i} = f_i, \quad i = 1, \dots, n_1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = g_i, \quad i = n_1 + 1, \dots, n_2; \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = e_i \cdot T \Big|_{\Gamma_i} + h_i, \quad i = n_2 + 1, \dots, n, \quad (4)$$

gdzie  $\frac{\partial T}{\partial n}$  – oznacza pochodną w kierunku normalnej wewnętrznej do brze-  
gu  $\partial\Omega$ , natomiast  $e_i$ ,  $f_i$ ,  $g_i$  oraz  $h_i$  – znane funkcje dwóch argumentów  
geometrycznych  $(x, y)$  opisujące odpowiednie parametry procesu.

### 3. Rozwiązanie problemu bezpośredniego

Rozwiązywanie problemu granicznego przy wykorzystaniu aparatu R-  
funkcji przebiega w dwóch etapach. W pierwszym etapie (analitycznym)  
funkcję stanu  $T$  przedstawiamy tak, aby spełniała zadane warunki granicz-  
ne. Funkcja ta zależy wówczas od skończonej liczby nieznanymi współczyn-  
ników, których poszukujemy w drugim etapie (numerycznym).

W szczególności z teorii R-funkcji (patrz [4]) wynika, że funkcja  $T$  po-  
staci:

$$T = g_{11} - \omega D(g_{11}) + \omega g_{12} - \omega D(\Psi g_{21}) + \Psi g_{21} + \omega \Psi g_{22}, \quad (5)$$

spełnia sformułowane w poprzednim rozdziale warunki graniczne, gdy  $g_{ij}$   
( $i = 1, 2; j = 1, 2$ ) – oznaczają funkcje postaci:

$$g_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{f_i}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}}, \quad g_{12} = \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{g_i}{\hat{\omega}_i} + \sum_{i=n_2+1}^n \frac{h_i}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=n_1+1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}},$$

$$g_{21} = \frac{\sum_{i=n_1+1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}}, \quad g_{22} = \frac{\sum_{i=n_2+1}^n \frac{e_i}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=n_1+1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}},$$

gdzie występujące w powyższych związkach funkcje  $\omega$  i  $\hat{\omega}_i$  definiują odpo-  
wiednio brzeg  $\partial\Omega$  obszaru  $\Omega$  i fragment brzegu  $\Gamma_i$  znormalizowany do pierw-  
szego rzędu [4].

W zależności (5) operator  $D$  stanowi operator różniczkowy postaci:

$$D(\cdot) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial (\cdot)}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial (\cdot)}{\partial y}.$$

Natomiast funkcja  $\Psi$  jest kombinacją liniową funkcji bazowych, które w niniejszym artykule przyjęto w postaci jednomianów, tzn.:

$$\Psi = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq N_A}}^{N_A} A_{ij} x^i y^j, \quad N_A \in \mathbf{N}, \quad (6)$$

gdzie  $A_{ij}$  – nieznanne współczynniki. (W przykładach praktycznych prezentowanych w dalszej części pracy przyjęto  $N_A = 1, 2$  lub  $3$ ).

To ostatnie założenie prowadzi do tego, że funkcję stanu  $T$  możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej:

$$T = X + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq N_A}}^{N_A} A_{ij} X_{ij}, \quad (7)$$

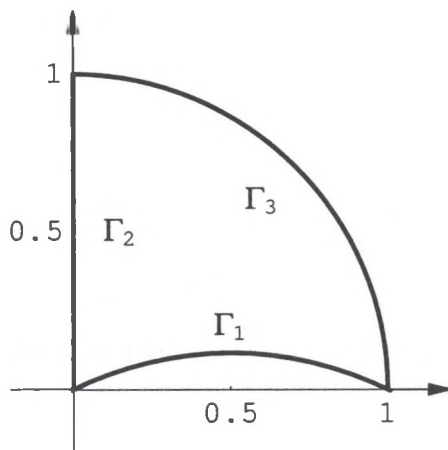
gdzie:

$$\begin{aligned} X &= g_{11} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \omega g_{12}, \\ X_{ij} &= x^i y^j \left[ g_{21} - \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial g_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial g_{21}}{\partial y} - g_{22} \right) \right] + \\ &\quad - \frac{\partial x^i y^j}{\partial x} \omega g_{21} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial x^i y^j}{\partial y} \omega g_{21} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned}$$

Kolejny etap rozwiązywania powyższego problemu polega na znalezieniu nieznanymi współczynników  $A_{ij}$  w taki sposób, aby funkcja stanu  $T$  spełniała równanie (1). Przyjmując podejście wariacyjne do zagadnienia, funkcja ta musi minimalizować funkcjonal postaci [2, 3]:

$$\begin{aligned} J[T] &= \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega} k T^2 d\Omega + \int_{\Omega} 2 f T d\Omega + \\ &\quad + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \int_{\Gamma_i} 2 T g_i d\Gamma + \sum_{i=n_2+1}^n \int_{\Gamma_i} (e_i T^2 + 2 T h_i) d\Gamma, \quad (8) \end{aligned}$$

który z racji przyjętych założeń stanowi funkcję zmiennych  $A_{ij}$ . Korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum, otrzymujemy układ  $(N_A + 1)(N_A + 2)/2$  równań z  $(N_A + 1)(N_A + 2)/2$  niewiadomymi  $A_{ij}$ . Rozwiązując ten układ, otrzymujemy szukane współczynniki  $A_{ij}$ , które następnie podstawiamy do równania (7), otrzymując końcową postać funkcji stanu  $T$ .



Rys. 1. Modelowany obszar  
Fig. 1. Modelling field  $\Omega$

### Przykład 1. Rozwiązanie problemu bezpośredniego

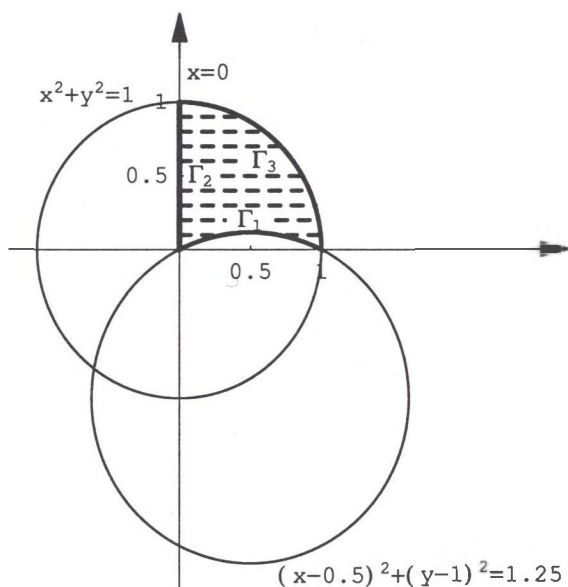
Rozważmy dwuwymiarowy obszar przedstawiony na rysunku 1, w którym zachodzące procesy fizyczne opisuje równanie Poissona:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 4 \quad (9)$$

oraz następujące warunki brzegowe:

$$T(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = 74 - x + 2y,$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0,$$



Rys. 2. Obszar  $\Omega$  zdefiniowany jako iloczyn trzech obszarów  $\Omega_i$   
 Fig. 2. The field  $\Omega$  defined as a product of three fields  $\Omega_i$

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma_3} = T(x, y) \Big|_{\Gamma_3} - 77.$$

Obszar  $\Omega$  możemy opisać jako część wspólną trzech obszarów  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  i  $\Omega_3$  (rysunek 2) zdefiniowanych następująco  $\Omega_i = \{(x, y) : \omega_i(x, y) > 0\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gdzie funkcje  $\omega_i$  znormalizowane do pierwszego rzędu [4] mają postać:

$$\omega_1 = \frac{(x - 0,5)^2 + (y + 1)^2 - \frac{5}{4}}{\sqrt{5}}, \quad \omega_2 = x, \quad \omega_3 = \frac{1 - x^2 - y^2}{2}.$$

Mamy więc:  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$ , a to oznacza, że jeżeli przyjmiemy  $\omega = \omega_1 \wedge_R \omega_2 \wedge_R \omega_3$ , gdzie operator  $\wedge_R$  jest operatorem R-koniunkcji, której działanie na dowolnych wyrażeniach  $p$  i  $q$  określa formuła:  $p \wedge_R q = p + q - \sqrt{p^2 + q^2}$ , wówczas  $\Omega = \{(x, y) : \omega(x, y) > 0\}$ .

Jednocześnie poszczególne fragmenty brzegu zdefiniować możemy jako:

$$\Gamma_i : \hat{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 \wedge_R \varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie:

$$\varepsilon_1 = \frac{(x - 0,5)^2 + (y - 1)^2 - \frac{5}{4}}{\sqrt{5}}, \quad \varepsilon_2 = (1 - y)y,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1 - (x - 1)^2 - (y - 1)^2}{2}.$$

Wówczas funkcje  $g_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ , generujące ogólną strukturę rozwiązania (5), będą miały postać:

$$g_{11} = \frac{f_1}{\hat{\omega}_1}, \quad g_{12} = \frac{\frac{g_2}{\hat{\omega}_2} + \frac{h_3}{\hat{\omega}_3}}{\frac{1}{\hat{\omega}_2} + \frac{1}{\hat{\omega}_3}},$$

$$g_{21} = \frac{\frac{1}{\hat{\omega}_2} + \frac{1}{\hat{\omega}_3}}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\hat{\omega}_i}}, \quad g_{22} = \frac{\frac{e_3}{\hat{\omega}_3}}{\frac{1}{\hat{\omega}_2} + \frac{1}{\hat{\omega}_3}},$$

gdzie  $f_1 = 74 - x + 2y$ ,  $g_2 = 0$ ,  $h_3 = -77$  a  $e_3 = 1$ . Przyjmując dalej, tak jak wspomnieliśmy już wcześniej, funkcję  $\Psi$  w postaci kombinacji liniowej jednomianów:

$$\Psi = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq N_A}}^{N_A} A_{ij} x^i y^j, \quad N_A = 1, 2, \text{ lub } 3,$$

funkcję  $T$  opisującą stan obiektu możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej:

$$T = X_0 + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq N_A}}^{N_A} A_{ij} X_{ij}, \quad (10)$$

gdzie

$$X = g_{11} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \omega g_{12},$$

$$X_{ij} = x^i y^j \left[ g_{21} - \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial g_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial g_{21}}{\partial y} - g_{22} \right) \right] +$$

$$- \frac{\partial x^i y^j}{\partial x} \omega g_{21} \frac{\partial g_{21}}{\partial x} - \frac{\partial x^i y^j}{\partial y} \omega g_{21} \frac{\partial g_{21}}{\partial y}.$$

Dla tak sformułowanego zadania funkcjonal  $J[T]$  przyjmuje postać:

$$J[T] = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega} 8 T d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_2} g_2 T d\Gamma + \int_{\Gamma_3} (e_3 T^2 + h_3 T) d\Gamma,$$

który po wstawieniu w nim w miejsce funkcji  $T$  funkcji określonej zależnością (10) rozważać można jako funkcję zmiennych  $A_{ij}$ . Różniczkując go względem tych zmiennych i przyrównując do zera poszczególne pochodne cząstkowe, otrzymamy układ  $(N_A + 1)(N_A + 2)/2$  równań z  $(N_A + 1)(N_A + 2)/2$  niewiadomymi  $A_{ij}$ . Otrzymane numerycznie wartości współczynników  $A_{ij}$  przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Wartości współczynników

$N_A$	Obliczone wartości współczynników $A_{ij}$			
1	$A_{00} = 74.037;$	$A_{10} = 0.934;$	$A_{01} = 0.456$	
2	$A_{00} = 73.954;$	$A_{10} = 3.373;$	$A_{01} = 0.808;$	
	$A_{20} = -2.289;$	$A_{11} = -1.579;$	$A_{02} = -0.044$	
3	$A_{00} = 74.000;$	$A_{10} = 3.905;$	$A_{01} = -0.415$	
	$A_{20} = -2.827;$	$A_{11} = -1.010;$	$A_{02} = 2.320$	
	$A_{30} = -0.082;$	$A_{21} = 1.092;$	$A_{12} = -2.181;$	$A_{03} = -0.967$

Podstawiając otrzymane wartości współczynników  $A_{ij}$  do wzoru (10), otrzymujemy aproksymację funkcji stanu na całym obszarze  $\Omega$ .

Dla przedstawionego powyżej problemu istnieje rozwiązanie analityczne postaci:

$$T_{anal}(x, y) = 74 + x^2 + y^2. \quad (11)$$

Tabela 2 przedstawia zestawienie, uzyskanych dla różnych wartości  $N_A$ , przybliżonych wartości funkcji stanu  $T$  oraz wartości dokładnych  $T_{anal}$  w wybranych punktach (patrz rysunek 3) z obszaru  $\Omega$ .

Jak łatwo zauważyć, dla tego przypadku zwiększanie liczby jednomianów użytych do aproksymacji funkcji  $\Psi$  wpływa na dokładność uzyskanego



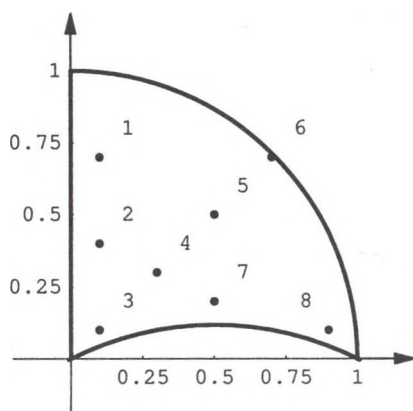
Rys. 3. Losowo wybrane punkty z obszaru  $\Omega$ Fig. 3. Aleatory selecting points of field  $\Omega$ 

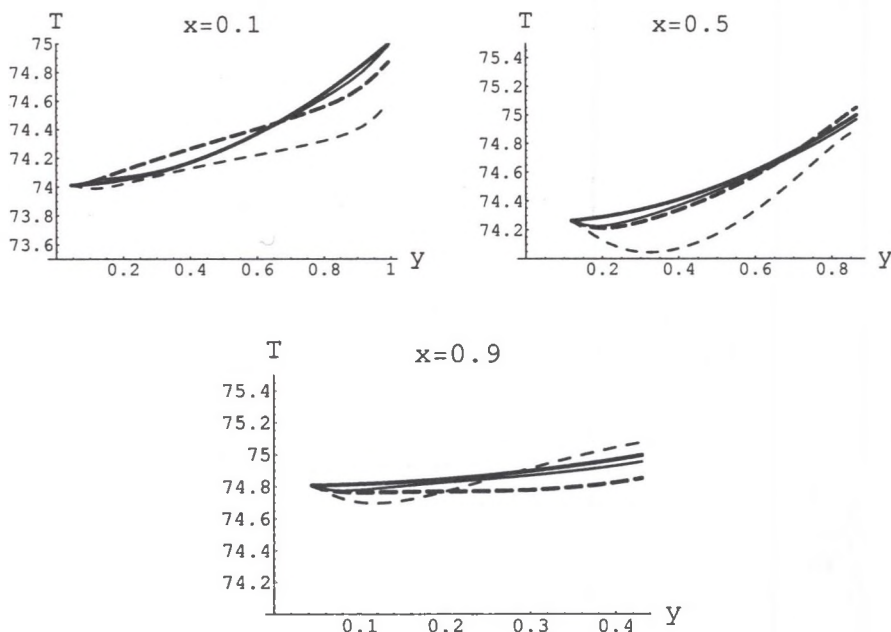
Tabela 2

Zestawienie wyników obliczeń

Punkt	$(x, y)$	$T(x, y)$			$T_{anal}(x, y)$
		$N_A = 1$	$N_A = 2$	$N_A = 3$	
1	(0.1;0.7)	74.268	74.478	74.487	74.500
2	(0.1;0.4)	74.129	74.265	74.172	74.170
3	(0.1;0.1)	73.990	74.034	74.039	74.020
4	(0.3;0.3)	73.950	74.152	74.152	74.180
5	(0.5;0.5)	74.172	74.443	74.462	74.500
6	(0.7;0.7)	74.999	74.935	74.933	74.980
7	(0.5;0.2)	74.129	74.212	74.228	74.290
8	(0.9;0.1)	74.710	74.769	74.785	74.820

rozwiązania. Na rysunku 4 przedstawiono porównanie rozwiązania analitycznego oraz otrzymanych przybliżonych rozwiązań dla przekrojów obszaru  $\Omega$  prostymi  $x = 0.1$ ;  $x = 0.5$  oraz  $x = 0.9$  (linią cienką przerywaną przedstawiono rozwiązanie dla  $N_A = 1$ , linją pogrubioną przerywaną – dla

$N_A = 2$ , linią cienką ciągłą – dla  $N_A = 3$ , natomiast linią ciągłą pogrubioną – rozwiązaniem analitycznym).



Rys. 4. Porównanie graficzne uzyskanych rozwiązań przybliżonych z rozwiązaniem analitycznym

Fig. 4. Graphic comparison of obtained and analytic solutions

Tabela 3 przedstawia maksymalne błędy bezwzględne i odpowiednio błędy względne, z jakimi wyznaczono wartości funkcji stanu w zależności od liczby funkcji bazowych użytych do aproksymacji. Znajduje się tam również informacja, w których to punktach z obszaru  $\Omega$  błąd bezwzględny był największy.

#### 4. Sformułowanie problemu odwrotnego

Niech obszar  $\Omega$  oraz równanie różniczkowe zadane będą analogicznie jak w przypadku problemu bezpośredniego. Dodatkowo zakładamy, że funkcja

Tabela 3

Zestawienie maksymalnych wartości błędów

$N_A$	$(x, y)$	błąd bezwzględny	błąd względny w %
1	(0.01;0.99)	0.0658	0.662
2	(0.01;0.99)	0.2650	0.355
3	(0.61;0.22)	0.4964	0.088

stanu spełnia na brzegu  $\partial\Omega$  obszaru  $\Omega$  warunki graniczne:

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i, \quad \text{gdzie } \forall i: \Gamma_i \neq \emptyset \quad \text{oraz } \forall i \neq j: \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset,$$

$$T \Big|_{\Gamma_i} = f_i, \quad i = 1, \dots, n_1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = g_i, \quad i = n_1 + 1, \dots, n_2; \quad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = e_i \cdot T \Big|_{\Gamma_i} + h_i, \quad i = n_2 + 1, \dots, n - 1. \quad (14)$$

Z powyższych założeń wynika, że na fragmencie brzegu  $\Gamma_n$  nie zadano żadnego warunku.

Zatem zadanie polega na wyznaczeniu obok takiej funkcji stanu, aby spełniała ona zadane równanie różniczkowe i założone warunki brzegowe, również i parametrów procesu determinujących wybrany warunek brzegowy na fragmencie brzegu  $\Gamma_n$ . Aby problem ten miał w wybranej klasie funkcji jednoznaczne rozwiązanie, dodatkowo znane muszą być wartości funkcji stanu w wybranych punktach, zwanych kontrolnymi lub pomiarowymi, leżących wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Tak sformułowane zadanie nazywamy odwrotnym zadaniem brzegowym [1].

## 5. Rozwiązanie problemu odwrotnego

Niezależnie od tego, że mogą nas interesować różne postacie warunków brzegowych (pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju) na nieokreślonym pod tym względem fragmencie brzegu  $\Gamma_n$ , to w rzeczywistości wystarczy na tym fragmencie brzegu wyznaczyć tylko postać funkcji stanu dla tego brzegu (warunek pierwszego rodzaju), ponieważ końcowa analityczna postać rozwiązania, jaką otrzymamy dla wnętrza obszaru  $\Omega$ , pozwoli nam wyznaczyć wszystkie parametry, w przypadku gdyby interesowała nas inna postać warunku brzegowego.

Zatem aby wykorzystać do rozwiązania powyższego problemu aparat R-funkcji, aproksymujemy nieznaną na fragmencie brzegu  $\Gamma_n$  funkcję stanu  $f_n(x, y)$  kombinacją liniową  $\bar{f}_n(x, y)$  funkcji bazowych (w niniejszej pracy przyjętych w postaci jednomianów), tzn.:

$$\bar{f}_n(x, y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq N_B}}^{N_B} B_{ij} x^i y^j, \quad (15)$$

o nieznanymi współczynnikami  $B_{ij}$ .

Budując model analogiczny jak w poprzednim przykładzie, funkcję stanu można przedstawić jako kombinację:

$$T = \bar{X} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq N_B}}^{N_B} B_{ij} \bar{X}_{ij} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq N_A}}^{N_A} A_{ij} X_{ij} \quad (16)$$

o nieznanymi współczynnikami  $A_{ij}$  i  $B_{ij}$ , gdzie:

$$\bar{X} = g_{11} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \omega g_{12},$$

$$\bar{X}_{ij} = g'_{ij} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial g'_{ij}}{\partial x} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial g'_{ij}}{\partial y},$$

$$g_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{f_i}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}}, \quad g_{12} = \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{g_i}{\hat{\omega}_i} + \sum_{i=n_2+1}^{n-1} \frac{h_i}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=n_1+1}^{n-1} \frac{1}{\hat{\omega}_i}},$$

$$g_{21} = \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n-1} \frac{1}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}}, \quad g_{22} = \frac{\sum_{i=n_2+1}^{n-1} \frac{e_i}{\hat{\omega}_i}}{\sum_{i=n_1+1}^{n-1} \frac{1}{\hat{\omega}_i}},$$

$$g'_{ij} = \frac{x^i y^j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\omega}_i}},$$

natomiast funkcje  $X_{ij}$  zdefiniowane są analogicznie jak w przypadku zagadnienia bezpośredniego.

Występujące w (15) współczynniki możemy wyznaczyć wykorzystując warunek konieczny na minimum funkcjonal:

$$J[T] = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega} k T^2 d\Omega + \int_{\Omega} 2 F T d\Omega +$$

$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \int_{\Gamma_i} 2 T g_i d\Gamma + \sum_{i=n_2+1}^{n-1} \int_{\Gamma_i} (e_i T^2 + 2 T h_i) d\Gamma. \quad (17)$$

Otrzymujemy zatem, podobnie jak w przypadku zagadnienia bezpośredniego, układ  $(N_A + 1)(N_A + 2)/2$  równań, w których niewiadomymi będą współczynniki  $A_{ij}$  oraz  $B_{ij}$ . Liczba niewiadomych przekracza zatem liczbę równań, czyli nie możemy wyznaczyć jednoznacznego rozwiązania. Jednoznaczne rozwiązanie powyższego problemu otrzymamy, gdy założymy, że znana jest wartość funkcji stanu w pewnej liczbie wzajemnie różnych punktów pomiarowych  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , leżących wewnątrz rozważanego obszaru  $\Omega$ . Wartości funkcji stanu w kolejnych punktach oznaczmy przez  $T_i$  ( $i = 1, \dots, K$ ). Wówczas pozostałych  $K$  równań w naszym układzie przyjmuje postać:

$$T(x_i, y_i) = T_i.$$

W przypadku gdy zgodnie z założeniem  $K \geq (N_B + 1)(N_B + 2)/2$  liczba równań jest nie mniejsza niż liczba niewiadomych, to niewiadome te można wyznaczyć korzystając ze znanych metod rozwiązywania układów równań liniowych. W sytuacji gdy  $K > (N_B + 1)(N_B + 2)/2$ , korzystamy z metod

właściwych dla układów nadokreślonych, takich jak np. metody iteracyjne czy najmniejszych kwadratów.

### Przykład 2. Rozwiązanie problemu odwrotnego

Założmy, że mamy dany taki sam obiekt geometryczny jak w przykładzie 1 (rysunek 1) i niech zachodzące w nim procesy fizyczne opisuje to samo co w przykładzie 1 równanie Poissona

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 4, \quad (18)$$

oraz dwa z trzech występujących w tym przykładzie warunków brzegowych:

$$T(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = 74 - x + 2y,$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

i dodatkowo warunki

$$T(x_i, y_i) = T_i, \quad i = 1, 2, \dots, K,$$

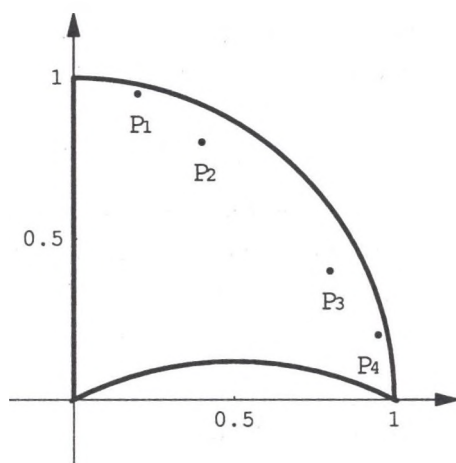
gdzie  $(x_i, y_i) \in \Omega$ , a  $T_i$  oznaczają znane (np. z pomiarów) wartości funkcji stanu.

Z zadanych powyżej warunków wynika, że w tym przypadku brak jest informacji, jakie warunki funkcja stanu ma spełniać na brzegu  $\Gamma_3$ . Mamy natomiast dodatkową informację o stanie obiektu w kilku punktach leżących wewnątrz rozważanego obszaru  $\Omega$ .

Jest to typowe brzegowe zagadnienie odwrotne, w którym obok funkcji, opisującej stan obiektu wewnątrz obszaru, należy dodatkowo wyznaczyć funkcję formułującą warunek brzegowy na brzegu  $\Gamma_3$ .

Zgodnie z przedstawioną w tym rozdziale metodą rozwiązywania tego typu zagadnień odwrotnych, założmy, że funkcja opisująca stan obiektu na brzegu  $\Gamma_3$  jest kombinacją liniową jednomianów  $x^i y^j$ , tzn.:

$$\bar{f}_3(x, y) = \sum_{\substack{i, j=0 \\ i+j \leq N_B}}^{N_B} B_{ij} x^i y^j,$$



Rys. 5. Punkty pomiarowe  
Fig. 5. Measured points

a tym samym warunek brzegowy na tym brzegu będzie miał postać

$$T(x, y) \Big|_{\Gamma_3} = \bar{f}_3(x, y).$$

Przyjmijmy ponadto, że dane są cztery punkty kontrolne o współrzędnych  $P_1 = (0.2; 0.95)$ ,  $P_2 = (0.4; 0.8)$ ,  $P_3 = (0.8; 0.4)$ ,  $P_4 = (0.95; 0.2)$ , w których znane są wartości funkcji stanu. Rozmieszczenie punktów kontrolnych ilustruje rysunek 5.

W pierwszym rozważanym przypadku przyjęto, że funkcja  $\bar{f}_3(x, y)$  opisująca stan obiektu na brzegu  $\Gamma_3$  jest funkcją stałą, tzn.  $N_B = 0$ . Natomiast wartości funkcji stanu  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , w punktach kontrolnych określono w oparciu o znane rozwiązanie analityczne (dokładne) dla zagadnienia bezpośredniego (prostego). Rozwiązanie to ma postać:

$$T_{anal}(x, y) = 74 + x^2 + y^2,$$

zatem wartościami dokładnymi będą:

$$T_i = T_{anal}(P_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$



Z rozwiązania analitycznego wynika, że w tym przypadku stan obiektu na brzegu  $\Gamma_3$  opisuje funkcja stała  $f_3(x, y) = 75$ , tzn.:

$$T(x, y) \Big|_{\Gamma_3} = 75$$

i do tej wartości należy odnosić prezentowane dalej wyniki.

Tabela 4 przedstawia wyniki, jakie uzyskano w zależności od przyjętej do obliczeń liczby punktów kontrolnych, ich położenia oraz od liczby  $N_A$  jednomianów użytych do konstrukcji funkcji  $\Psi$ .

Tabela 4

Wyniki obliczeń dla  $N_B = 0$

Liczba punktów kontrolnych	Położenie punktów	$\bar{f}_3(x, y)$			$f_3(x, y)$
		$N_A = 1$	$N_A = 2$	$N_A = 3$	
2	$P_1, P_4$	74.958	74.963	74.967	75
2	$P_2, P_3$	74.892	77.946	74.967	75
4	$P_1 - P_4$	74.931	74.962	74.966	75

W sytuacjach rzeczywistych procesów przemysłowych wyniki pomiarów (zwłaszcza wewnątrz rozważanego obiektu) obarczone są z reguły błędem. W tabeli 5 przedstawiono wyniki, jakie otrzymano, gdy wartości funkcji stanu w punktach kontrolnych były obarczone odpowiednio błędami 0%, 0.5%, 1% i 2%.

Ten sam problem rozpatrzmy teraz w przypadku, gdy funkcję stanu na brzegu  $\Gamma_3$  aproksymujemy kombinacją liniową trzech jednomianów, a mianowicie:

$$\bar{f}_3(x, y) = B_{00} + B_{10}x + B_{01}y,$$

gdzie  $B_{ij}$ , ( $i, j = 0, 1 \wedge i + j \leq 1$ ) oznaczają poszukiwane współczynniki. Oczywiście, w tej sytuacji znana musi być wartość funkcji stanu w przynajmniej trzech punktach pomiarowych. Aby funkcja stanu była zgodna ze znanym rozwiązaniem analitycznym  $T_{anal}(x, y) = 74 + x^2 + y^2$ , współczynniki  $B_{ij}$  winny przyjmować wartości:

$$B_{00} = 75.000; \quad B_{10} = 0.000; \quad B_{01} = 0.000.$$



Tabela 5

Wyniki obliczeń dla  $N_A = 3$  i  $N_B = 0$  przy zaburzonych wartościach funkcji stanu w punktach kontrolnych

Max	Zaburzone wartości funkcji stanu				$\bar{f}_3(x, y)$	$f_3(x, y)$
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$		
0%	74.942	74.800	74.800	74.942	74.967	75
0.5%	75.160	75.129	74.907	74.683	75.010	75
1%	74.768	74.196	74.935	75.140	74.970	75
2%	75.950	75.077	73.394	75.177	75.706	75

Tabela 6 prezentuje uzyskane wyniki w zależności od liczby i położenia przyjętych punktów pomiarowych, przy czym do aproksymacji funkcji  $\Psi$  przyjęto stałe 10 jednomianów ( $N_A = 3$ ), a wartości funkcji w punktach kontrolnych nie były obciążone błędami.

Tabela 6

Wyniki obliczeń dla  $N_A = 3$  i  $N_B = 1$

Liczba punktów kontrolnych		Współczynniki funkcji $\bar{f}_3(x, y)$		
		$B_{00}$	$B_{10}$	$B_{01}$
3	$P_1, P_2, P_3$	74.979	-0.006	-0.012
3	$P_1, P_2, P_4$	74.968	-0.001	-0.001
3	$P_1, P_3, P_4$	74.953	0.011	0.012
3	$P_2, P_3, P_4$	74.945	0.018	0.015
4	$P_1 - P_4$	74.959	0.006	0.007

W tym przypadku, dla dokładnych danych wejściowych uzyskano prawie idealne odtworzenie warunku brzegowego. W przypadku zaburzenia danych pomiarowych uzyskano już nieco gorsze wyniki, co ilustruje tabela 7.

Tabela 7

Wyniki dla  $N_A = 3$  i  $N_B = 1$  przy zaburzonych wartościach funkcji stanu w punktach kontrolnych

Max	Zaburzone wartości funkcji stanu				Wspólcz. funkcji $\bar{f}_3(x, y)$		
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$B_{00}$	$B_{10}$	$B_{01}$
0%	74.942	74.800	74.800	74.942	74.959	0.0059	0.0067
0.5%	74.748	75.170	74.548	75.121	74.975	0.365	-0.417
1%	75.685	74.240	75.485	74.762	75.635	-1.200	0.619
2%	75.357	76.091	73.509	74.251	75.7074	-1.225	0.413
5%	78.222	78.484	73.596	73.938	77.068	-3.326	1.494

## 6. Podsumowanie

Analizując uzyskane wyniki, można wyciągnąć wniosek, iż na poprawność odtworzonego warunku brzegowego (jego dokładność) wpływają trzy aspekty, a mianowicie liczba funkcji bazowych użytych do aproksymacji funkcji  $\Psi$ , przy czym zwiększanie ich liczby z reguły poprawia dokładność, liczba oraz położenie punktów kontrolnych. Najlepsze oszacowanie otrzymano dla największej liczby jednomianów użytych do aproksymacji, natomiast najgorsze dla małej liczby funkcji bazowych i małej liczby punktów kontrolnych, dodatkowo oddalonych od aproksymowanego brzegu.

Uzyskane wyniki dowodzą ponadto, iż wielkość błędu pomiaru wpływa na dokładność odtworzonego warunku brzegowego.

## Literatura

1. O. M. Alifanov, S. V. Rumyantseva, *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems*, Begell House, New York 1995.

2. S. G. Michlin, C. L. Smolicki, *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa 1972.
3. W. L. Rwaczew, G. P. Mańko, *Automatyzacja programowania w zadaniach brzegowych*, Kijów 1983 (w jęz. rosyjskim).
4. W. L. Rwaczew, A. P. Slesarenko, *Algebra logiki i przekształcenia całkowe w zadaniach brzegowych*, Kijów 1976 (w jęz. rosyjskim).

*Bożena Piątek*  
*Instytut Matematyki*  
*Politechnika Śląska*  
*Kaszubska 23*  
*44-100 Gliwice*

## **Abstract**

In a huge number of physical process the position of the object is uniquely determined by the differential equation and boundary conditions, but it is not sufficient information. We search solution of that system. There are a lot of numerical, analytical and hybrid methods of solving. One of them is an application of the R-functions theory. There are presented R-functions methods of solving direct and inverse boundary problem described by elliptic differential equations such as Laplace and Poisson. There are numerical examples of direct and inverse Poisson problem. Obtained results prove that there are four parameters, which imply the precision of solution of our problem. First of them is the number of basis functions which are used to approximate the function of state. The second is the number of control points. Third and last parameters are also connected with control points. There are the precision of values of the function of state at them and their location. Their influence on the precision of the solution is also given.