ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 91 Nr kol. 1652

Janusz K. SŁUPIK

PÓŁGRUPY INWERSYWNE GENEROWANE PRZEZ NIE WSZĘDZIE OKREŚLONE „LAMPLIGHTER" AUTOMATY

Streszczenie. Niech $A = \langle X, Y, Q, \pi, \lambda \rangle$ będzie dwustanowym automatem nad alfabetami $X = Y = \{0, 1\}$, który generuje „Lamplighter" grupę. Modyfikujemy ten automat, usuwając jedną parę (x, q) z dziedziny funkcji wyjścia λ, gdzie $x \in X$ i $q \in Q$. Otrzymujemy w ten sposób cztery częściowo określone odwracalne automaty. Głównym wynikiem tej pracy jest dowód, że tego typu automaty generują skończone półgrupy inwersywne.

INVERSE SEMIGROUPS GENERATED BY PARTIALLY DEFINED "LAMPLIGHTER" AUTOMATA

Summary. Let $A = \langle X, Y, Q, \pi, \lambda \rangle$ be a two-state automaton over the alphabets $X = Y = \{0, 1\}$, which generates the "Lamplighter" group. We remove one pair (x, q) from domain of the output function λ, where $x \in X$ and $q \in Q$. We obtain four partially defined invertible automata. It is proved that aforementioned automata generate finite inverse semigroups.

1. Wprowadzenie

Automaty odgrywają ważną rolę w algebrze. Skończone automaty są używane do konstrukcji półgrup i grup z różnorodnymi własnościami: nieskończonych grup periodycznych ze skończoną ilością generatorów, grup z pośrednim wzrostem, just infinite grup, itp. Automaty Mealy'ego są bardzo wygodną metodą definiowania półgrup i grup transformacji. Znane są automaty z małą liczbą stanów rozpatrywane nad alfabetami składającymi się z dwóch lub trzech symboli, które definiują półgrupy wolne i grupy wolne. Artykuły [1, 3, 6] są poświęcone automatom generującym półgrupy. Natomiast grupy definiowane poprzez odwracalne automaty skończone są opisane w [2].

Pozycje [2, 7] opisują Lamplighter grupę generowaną dwustanowym automatem nad alfabetem dwuliterowym. Jeżeli w tym automacie funkcje przejścia i wyjścia nie byłyby wszędzie określone, to wówczas takim automatem można definiować półgrupy inwersywne.

Pojęcie półgrupy inwersywnej było wprowadzone w latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia. Pierwsze abstrakcyjne definicje pojawiły się w pracach V. Wagnera i A. Prestona. Półgrupy te stanowią próbę uogólnienia pojęcia grupy. Istnieje wiele analogii pomiędzy grupami i półgrupami inwersywnymi. Związek półgrup inwersywnych z częściowymi symetriami jest rozszerzeniem związku pomiędzy grupami i symetriami.

Rozpatrzymy półgrupy inwersywne generowane automatami, które powstały przez nieokreślenie funkcji wyjścia dla jednego symbolu w automacie generującym Lamplighter grupę. Udowodnimy, że takie półgrupy są skończone.

2. Podstawowe definicje

Wprowadzenie do teorii półgrup inwersywnych w [4, 5].

Definicja 1. *Niech S będzie półgrupą. Jeżeli dla dowolnego elementu $a \in S$ istnieje dokładnie jeden element $x \in S$ spełniający*

$$x = xax \quad \text{i} \quad a = axa$$

to półgrupę S nazywamy półgrupą inwersywną. Ponadto, element x nazywamy odwrotnym do elementu a i oznaczamy go przez a^{-1}.

Przykładem półgrupy inwersywnej jest półgrupa $IS(X)$ częściowych permutacji zbioru X.

Definicja 2. *Automatem Mealy'ego nazywamy piątkę*

$$A = \langle X, Y, Q, \pi, \lambda \rangle,$$

gdzie X jest alfabetem symboli wejściowych, Y jest alfabetem symboli wyjściowych ($|X| < \infty, |Y| < \infty$), Q jest zbiorem stanów wewnętrznych, $\pi : X \times Q \to Q$ i $\lambda : X \times Q \to Y$ są odpowiednio funkcjami przejścia i wyjścia.

Oznaczmy przez $\mathrm{dom} f$ dziedzinę funkcji f.

Definicja 3. *Automat $A = \langle X, Y, Q, \pi, \lambda \rangle$ nazywamy częściowo określonym automatem, jeżeli* $\mathrm{dom}\ \pi \subsetneq X \times Q$ *lub* $\mathrm{dom}\ \lambda \subsetneq X \times Q$.

Definicja 4. *Automat A nazywamy odwracalnym, jeżeli $\lambda(x, q) \neq \lambda(y, q)$ dla dowolnych* $(x, q), (y, q) \in \mathrm{dom}\ \lambda$ *($x \neq y$).*

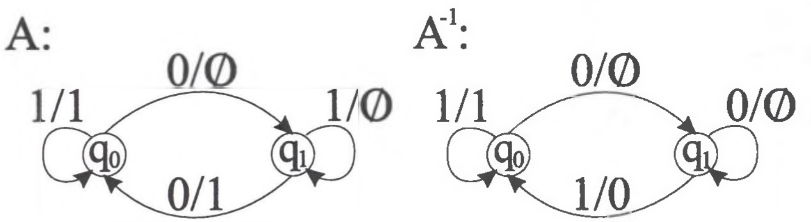
Niech $A = \langle X, X, Q, \pi, \lambda \rangle$ będzie odwracalnym częściowo określonym automatem. Określmy automat $A' = \langle X, X, Q, \pi', \lambda' \rangle$ tak, aby zachodziły następujące równości:

$$\pi(x, q) = \pi'(\lambda(x, q), q) \quad \text{i} \quad \lambda(\lambda'(x, q), q) = x$$

gdzie (x, q) i $\lambda'(x, q) \in \mathrm{dom}\ \lambda$. Ponadto, jeśli $\lambda(x, q) = y$ i $(y, q) \notin \mathrm{dom}\ \lambda$, wtedy $\lambda'(y, q) = x$ i $(x, q) \notin \mathrm{dom}\ \lambda'$. W szczególności, jeżeli $\lambda(x, q) = x$ i $(y, q) \notin \mathrm{dom}\ \lambda$, wtedy $\lambda'(x, q) = x$ i $(y, q) \notin \mathrm{dom}\ \lambda'$.

Definicja 5. *Automat A', określony jak wyżej, nazywamy automatem odwrotnym do automatu A.*

Skończone automaty możemy przedstawiać na diagramach. Taki sposób definiowania jest bardzo wygodny. Diagram automatu A jest grafem skierowanym Γ o etykietowanych krawędziach. Zbiorem wierzchołków jest zbiór Q. Wierzchołki p i q grafu Γ łączymy krawędzią (strzałką) w kierunku z p do q, jeżeli istnieje $x \in X$ taki, że $\pi(x,p) = q$. Każda krawędź ma etykietę $x|y$, gdzie $\lambda(x,p) = y$. Jeżeli $(x,p) \notin \operatorname{dom} \lambda$, to etykieta ma postać $x|\emptyset$.



Rys. 1. Automat oraz automat odwrotny
Fig. 1. The automaton and the inverse automaton

Jeżeli $X = Y$, to funkcje π i λ mogą być rozszerzone do $\overline{\pi} : X^* \times Q \to Q$ i $\overline{\lambda} : X^* \times Q \to X^*$ w następujący sposób:

$$\overline{\pi}(e,q) = q, \qquad \overline{\pi}(\omega x, q) = \pi(x, \overline{\pi}(\omega, q)),$$

$$\overline{\lambda}(e,q) = e, \qquad \overline{\lambda}(\omega x, q) = \overline{\lambda}(\omega, q)\lambda(x, \overline{\pi}(\omega, q)),$$

gdzie $e \in X^*$ jest pustym słowem, $q \in Q$, $\omega \in X^*$, $x \in X$. Ponadto, jeżeli $(\omega, q) \notin \operatorname{dom} \overline{\lambda}$, to $(\omega x, q) \notin \operatorname{dom} \overline{\lambda}$.

Teraz możemy wprowadzić częściowe odwzorowanie $f_{A_q} : X^* \to X^*$ określone przez częściowo określony automat A w stanie $q \in Q$ następująco:

$$f_{A_q}(x_1 x_2 \ldots x_n) = \overline{\lambda}(x_1 x_2 \ldots x_n, q),$$

gdzie $x_i \in X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Zatem częściowo określony automat Mealy'ego A ze zbiorem stanów $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ wyznacza zbiór częściowych odwzorowań $T = \{f_{A_{q_0}}, f_{A_{q_1}}, \ldots, f_{A_{q_m}}\}$ w X^*.

Definicja 6. *Półgrupę* $S_A = \langle f_{A_{q_0}}, f_{A_{q_1}}, \ldots, f_{A_{q_m}} \rangle$ *nazywamy półgrupą częściowych transformacji określonych automatem* A *ze zbiorem stanów wewnętrznych* $Q = \{q_1, q_1, \ldots, q_m\}$.

Ponadto, jeżeli A jest odwracalnym częściowo określonym automatem, to dla każdego $q \in Q$ transformacja f_{A_q} jest częściową permutacją nad X^*. Stąd, S_A jest półgrupą inwersywną.

Jeżeli będziemy rozpatrywać dwustanowe częściowo określone automaty nad dwuelementowym alfabetem, to przyjmiemy, że $X = Y = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, $f := f_{A_{q_0}}$, $g := f_{A_{g_1}}$ i $S = \langle f, g \rangle$. Dla takich automatów, jeżeli dom $\pi = Q \times X$, możemy przyjąć rekurencyjny zapis transformacji f i g:

$$f = (x_1, x_2)\sigma_1 \ , \quad g = (x_3, x_4)\sigma_2,$$

gdzie x_i $(i = 1,2,3,4)$ jest odwzorowaniem f, g lub symbolem pustym $\emptyset$ oraz σ_1, σ_2 są permutacjami:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Symbolu pustego używamy, gdy funkcja wyjścia nie jest określona dla pewnego słowa. Na przykład, $f = (f, \emptyset)\sigma$, jeśli słowo $1 \notin \mathrm{dom} f$.

3. Własności półgrup inwersywnych

Zbiór wszystkich idempotentów półgrupy inwersywnej S oznaczymy przez $E(S)$. Określmy odwzorowanie $l : S \to N$, takie że $l(s)$ jest minimalną liczbą czynników postaci f, g, f^{-1}, g^{-1}, jakie należy wymnożyć, by otrzymać $s \in S$. Liczbę $l(s)$ nazywamy *długością* elementu $s \in S$.

Definiujemy zbiór $Core(S)$, którego elementy należą do $S \setminus E(S)$ i nie „zawierają" idempotentów, tzn. jest to zbiór takich $s \in S$, których nie można zapisać w jednej z postaci:

$$s = uev \ \wedge \ l(s) \geqslant l(u) + l(e) + l(v),$$
$$s = ev \ \wedge \ l(s) \geqslant l(e) + l(v),$$
$$s = ue \ \wedge \ l(s) \geqslant l(u) + l(e),$$

dla każdego $u, v \in S$ i $e \in E(S)$. Założenie dotyczące długości jest istotne, ponieważ każdy element $s \in S$ może być zapisany w postaci: $(ss^{-1})s$ i $ss^{-1} \in E(S)$.

Pewne typy automatów definiują półgrupy o bardzo skomplikowanej strukturze, dlatego potrzebne jest narzędzie pomocne w badaniu takich półgrup.

Sformułujemy następujący lemat:

Lemat 1. *Niech $S = \langle f, g \rangle$. Niech $\langle f \rangle$ i $\langle g \rangle$ są skończone. Wtedy, jeśli $Core(S)$ jest skończony, to $E(S)$ jest również skończony.*

Dowód. Przeprowadzimy konstrukcję. Niech

$$n = \max\{l(c) : \ c \in Core(S)\}$$

oraz

$$E_n = \{e \in S : \ e^2 = e \ \wedge \ l(e) \leqslant 2n\}.$$

Zbiór E_n jest skończony. Następnie, niech

$$\overline{E}_n = \{e_1 e_2 \dots e_m : \ e_i \in E_n\}.$$

Ten zbiór zawiera wszystkie możliwe iloczyny elementów z E_n. Jednakże, ponieważ $et = te$ dla dowolnych $e, t \in E_n$, więc $\overline{E}_n$ jest skończony.

Zdefiniujmy następujące zbiory:

$$A = \{c_1 c_2 : \ (c_1 c_2)^2 = c_1 c_2, \ c_1, c_2 \in Core(S)\},$$

$$B = \{c^{-1} e c : \ e \in \overline{E}_n \cup A, \ c \in Core(S)\},$$

i zbiór $H = E(\langle f \rangle) \cup E(\langle g \rangle)$, który będzie przydatny, jeśli $Core(S) = \emptyset$. Ostatecznie, niech

$$\mathfrak{E}(S) = \{e_1 e_2 \dots e_m : \ e_i \in A \cup B \cup H \cup E_n\}.$$

Udowodnimy teraz, że $\mathfrak{E}(S) = E(S)$. Jest oczywiste, że każdy element $\mathfrak{E}(S)$ jest idempotentem, więc zachodzi inkluzja: $\mathfrak{E}(S) \subseteq E(S)$.

U1) Zanim udowodnimy inkluzję odwrotną, pokażemy algorytm sprowadzający dowolny element $s = c_1c_2 \dots c_m \in S$ (gdzie $c_i \in S$ i $l(c_i) \leqslant n$) do postaci $s = e_1e_2 \dots e_kc$, gdzie $c \in Core(S)$, $e_i \in \mathfrak{E}(S)$ (będziemy tutaj dopuszczać przypadki, gdy $e_1e_2 \dots e_k$ lub c mogą nie wystąpić w tym zapisie).

Rozpatrzmy iloczyn dwóch pierwszych czynników c_1c_2. Mamy następujące możliwości: jeśli $c_1c_2 = d$ i $d \in Core(S)$, wtedy piszemy $s = (dc_3)c_4 \dots c_m$ i powtarzamy procedurę dla pary zawartej w nawiasach; jeśli $c_1c_2 = e$ i $e \in E_n$, wtedy mamy $s = e(c_3c_4)c_5 \dots c_m$ i powtarzamy procedurę dla pary zawartej w nawiasach; jeśli $c_1c_2 = ed$, gdzie $e \in E_n$ i $d \in Core(S)$, wtedy piszemy $s = e(dc_3)c_4 \dots c_m$ i rozpatrujemy wyróżnioną parę; jeśli $c_1c_2 = de$, gdzie $e \in E_n$ i $d \in Core(S)$, wtedy mamy $s = (ded^{-1})(dc_3)c_4 \dots c_m$ i powtarzamy procedurę dla pary zawartej w drugim nawiasie (oczywiście $ded^{-1} \in B$); w końcu jeśli $c_1c_2 = d_1ed_2$ i $d_1, d_2 \in Core(S)$ i $e \in E_n$, to mamy $s = (d_1ed_1^{-1})(d_1d_2)c_3 \dots c_m$ i powtarzamy procedurę dla pary zawartej w drugim nawiasie (zauważmy, że $l(d_1d_2) < l(c_1c_2)$, więc ten przypadek wystąpi tylko skończoną ilość razy w rozkładzie pary c_1c_2). Kontynuujemy to postępowanie dla kolejnych par, aż uzyskamy po skończonej liczbie kroków jedną z postaci

$$s = e_1e_2 \dots e_kc, \qquad s = e_1e_2 \dots e_k, \qquad s = c,$$

gdzie $e_i \in \mathfrak{E}(S)$ i $c \in Core(S)$.

U2) Zwróćmy również uwagę na fakt, że dla dowolnych $e \in E(S)$, $c \in S$, jeśli $ec \in E(S)$, to mamy

$$ec = (ec)(ec) = (ec)(ec)^{-1} = ecc^{-1}e = ecc^{-1}.$$

Powróćmy teraz do dowodu inkluzji $E(S) \subseteq \mathfrak{E}(S)$. Weźmy dowolny element $e \in E(S)$. Dokonujemy rozkładu tego elementu za pomocą wyżej opisanego algorytmu. Otrzymamy $s = e_1e_2 \dots e_kc$ albo $e = e_1e_2 \dots e_k$, gdzie $e_i \in \mathfrak{E}(S)$ i $c \in Core(S)$. Możliwość trzecia nie może zajść, bo $Core(S) \subset S \setminus E(S)$. W drugim przypadku otrzymujemy natychmiast, że $e \in \mathfrak{E}(S)$. Natomiast w pierwszym przypadku wystarczy powołać się na uwagę U2), wówczas otrzymamy $e = e_1e_2 \dots e_kcc^{-1}$, ale ponieważ $cc^{-1} \in A$, stąd $e \in \mathfrak{E}(S)$.

Zatem mamy $E(S) = \mathfrak{E}(S)$. Jeżeli zgodnie z założeniami $Core(S)$ jest skończony, to z konstrukcji zbioru $\mathfrak{E}(S)$ wynika, że również musi on być skończony. Stąd $E(S)$ jest skończony. □

Lemat 2. *Przy założeniach poprzedniego lematu, jeżeli $Core(S)$ jest skończony, to półgrupa S jest skończona.*

Dowód. Ponieważ dowolny element $s \in S$, możemy zapisać zgodnie z uwagą U1) w postaci

$$s = e_1 e_2 \dots e_n c,$$

gdzie $e_i \in E(S)$ i $c \in Core(S)$ oraz e_i nie są iloczynami innych idempotentów ($e_i \neq e_j e_k$ dla $e_j \neq e_i$ i $e_k \neq e_i$). Oczywiście, taki zapis nie będzie jednoznaczny, ponieważ każdy element można zapisać na kilka sposobów w tej formie. Jednakże, co dla nas jest istotne, różne elementy mają różne zapisy.

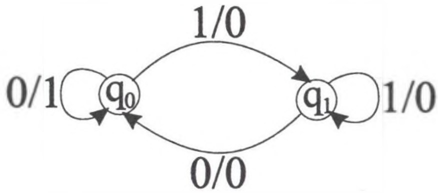
Ponieważ idempotenty komutują, więc możemy powiedzieć, że s jest wyznaczony przez dwa zbiory:

$$s \ : \ \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{c\}.$$

Dopuszczamy tutaj, że jeden z nich może być pusty (pierwszy w przypadku $s \in Core(S)$, drugi gdy $s \in E(S)$). Z założeń mamy: $Core(S)$ jest skończony. Na podstawie Lematu 1., mamy: $E(S)$ jest skończony. Zatem, otrzymujemy skończoną liczbę konstrukcji elementu s. □

4. Półgrupy inwersywne i „Lamplighter" automaty

Automat



generuje nieskończoną grupę $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}_2$, którą nazywamy „Lamplighter" grupą. Dowód w [2] i [7]. Skonstruujemy teraz nowe automaty poprzez usunięcie z dziedziny funkcji wyjścia jednej pary (x, q), $x \in \{0, 1\}$, $q \in \{q_0, q_1\}$. Otrzymujemy cztery częściowo określone automaty, które opiszemy tabelami:

A_1:

	0	1
q_0	$q_0/1$	$q_1/0$
q_1	$q_0/0$	$q_1/\emptyset$

A_2:

	0	1
q_0	$q_0/\emptyset$	$q_1/0$
q_1	$q_0/0$	$q_1/1$

A_3:

	0	1
q_0	$q_0/1$	$q_1/\emptyset$
q_1	$q_0/0$	$q_1/1$

A_4:

	0	1
q_0	$q_0/1$	$q_1/0$
q_1	$q_0/\emptyset$	$q_1/1$

Twierdzenie 3. *Niech S_i będzie półgrupą inwersywną generowaną automatem A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Półgrupy inwersywne S_1, S_2, S_3 i S_4 są skończone.*

Dowód. Dla każdej półgrupy $S_i = \langle f, g \rangle$ w pierwszym kroku pokażemy, że półgrupy $\langle f \rangle$ i $\langle g \rangle$ są skończone. Następnie, aby móc skorzystać z Lematu 1., pokażemy, że $Core(S_i)$ jest skończony. Rozpatrzymy następujący iloczyn:

$$g^{\alpha_1} f^{\beta_1} g^{\alpha_2} f^{\beta_2} \dots g^{\alpha_m} f^{\beta_m} \tag{1}$$

dla każdego $m \in N$, gdzie α_i i β_i są związane z rzędami półgrup $\langle f \rangle$ i $\langle g \rangle$. Ponadto, g^{α_1} i f^{β_m} mogą nie występować w tym iloczynie. Oczywiście, każdy element z $Core(S_i)$ ma postać (1).

Półgrupa S_1:

Odwzorowania określone automatem A_1 możemy zapisać w postaci: $f = (f, g)\sigma$ i $g = (f, \emptyset)$. Stąd $f^{-1} = (g^{-1}, f^{-1})\sigma$ i $g^{-1} = (f^{-1}, \emptyset)$. Mamy następujące równości: $gf = (f, \emptyset)(f, g)\sigma = (f^2, \emptyset)\sigma$, $gfg = (f^2, \emptyset)\sigma(f, \emptyset) = (\emptyset, \emptyset)\sigma = 0$. Następnie, $f^2 = (fg, gf)$, $f^3 = (fgf, gfg)\sigma = (fgf, 0)\sigma$, $f^4 = (0, 0)$, $f^5 = (0, 0)\sigma$, $f^6 = (0, 0)$. Zatem, mamy $f^4 = f^6$ i $f^5 = f^7$, więc $\langle f \rangle$ jest skończona. Ponadto $f^4 \in E(S_1)$. Ponieważ $g^n = (f^n, \emptyset)$ i $g^{-n} = (f^{-n}, \emptyset)$, stąd $\langle g \rangle$ jest również skończona.

By móc skorzystać z Lematu 1. musimy przeanalizować wielkość zbioru $Core(S_1)$. Elementy $Core(S_1)$ mają postać (1), gdzie

$$\alpha_i, \beta_j \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Jeżeli $|\beta|$ jest nieparzyste, to $f^\beta = (\cdot, \cdot)\sigma$, stąd $g^\alpha f^\beta = (f\cdot, \emptyset)\sigma$ dla $\alpha \neq 0$ i dalej, $g^\alpha f^\beta g^\gamma = (\emptyset, \emptyset)\sigma = 0$, więc te elementy nie mogą być składowymi elementów z $Core(S_1)$.

Wiemy, że f^4 jest idempotentem, więc wystarczy zbadać elementy: gf^2 i gf^{-2}. Mamy $gf^2 = (f^2 g, \emptyset)$, $f^2 g = (fgf, \emptyset)$ i $fgf = (\emptyset, gf^2)$. Zatem gf^2 jest określone na słowach postaci $\omega = (001)^*$ i ich prefiksach, ponadto działa na nich jak identyczność, więc $gf^2 \in E(S_1)$. Analogicznie $gf^{-2} \in E(S_1)$.

Zatem, $gf^\beta g$ nie należy do $Core(S_1)$ dla każdego β, stąd $Core(S_1)$ jest skończony. Na podstawie lematu otrzymujemy, że $S_1 = \langle f, g \rangle$ jest skończona.

Półgrupa S_2:

Odwzorowania generujące tę półgrupę są postaci: $f = (\emptyset, g)\sigma$ i $g = (f, g)$. Mamy $f^2 = 0$ i $g^2 = g^3$, więc $f^2, g^2 \in E(S_2)$. Ponadto $fgf = 0$ i $fg^{-1}f = 0$. Zatem elementy z $Core(S_2)$ są postaci (1) z potęgami $\alpha_i, \beta_j \in \{-1, 1\}$ oraz kolejne β_i nie mogą mieć tego samego znaku. Zachodzą równości: $fg = gfg = g^{-1}fg$, $g^{-1}f^{-1} = g^{-1}f^{-1}g^{-1} = g^{-1}f^{-1}g$, stąd mamy, że każdy element s zawierający czynnik $f^{-1}gfgf^{-1}$ można zapisać krócej za pomocą idempotentów $f^{-1}(gfg)f^{-1} = f^{-1}fgf^{-1}$, więc $s \notin Core(S_2)$. Ponieważ zachodzą też równości: $f^{-1}gf = f^{-1}g^{-1}f$, $fg^{-1}f^{-1} = fg^{-1}f^{-1}g = fg^{-1}f^{-1}g^{-1}$ oraz $fgf^{-1} = gfgf^{-1} = g^{-1}fgf^{-1}$, to element o największej długości należący do $Core(S_2)$, jaki możemy skonstruować, jest postaci

$fgf^{-1}gfg^{-1}f^{-1}$. Stąd wynika, że $Core(S_2)$ jest skończony. Zatem S_2 na mocy lematu jest skończona.

Półgrupa S_3:

Odwzorowania generujące tę półgrupę są postaci: $f = (f, \emptyset)\sigma$ i $g = (f, g)$. Mamy $f^2 = 0$, $g^2 \in E(S_3)$. Ponadto zachodzi: $f = fg = fg^{-1}$, stąd $Core(S_3) = \{f, f^{-1}, g, g^{-1}, f^{-1}g, g^{-1}f, gf, f^{-1}g^{-1}\}$. Zatem S_3 na mocy lematu jest skończona.

Półgrupa S_4:

Odwzorowania generujące tę półgrupę są postaci: $f = (f, g)\sigma$ i $g = (\emptyset, g)$. W tym przypadku mamy $g \in E(S_4)$. Analogicznie jak w przypadku półgrupy S_1 możemy obliczyć, że $f^4 = f^6$ stąd $f^4 \in E(S_4)$. Zatem $Core(S_4) = \{f, f^{-1}, f^2, f^{-2}, f^3, f^{-3}\}$, więc S_4 jest skończona. $\square$

Autor dziękuje Recenzentowi za cenne uwagi, które dały możliwość ulepszenia tekstu artykułu.

Literatura

1. C. K. Gupta, V. I. Sushchansky, *Semigroups of Automatic Transformations in: Topics in Infinite Groups*, Quaderni di matematica **8** (2001).
2. R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchansky, *Automata, Dynamical Systems, and Groups*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **231** (2000), 134–214.
3. I. I. Reznykov, V. I. Sushchansky, *2-generates semigroup of automatic transformations whose growth is defined by Fibonachi series*, Matematychni Studii **17** (2002), 81–92.
4. M. V. Lawson, *Inverse semigroups: The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, Singapore 1998.
5. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York 1984.
6. A. Olijnyk, *Free semigroups of automatic transformation*, Matematycheskie zametki (1998), 248–259.

7. R. Grigorchuk, A. Żuk, *The Lamplighter Group as a Group Generated by a 2-State Automaton and Its Spectrum*, Preprint of Forschunginst. Math, ETH-Zurich 1999.

Janusz K. Słupik
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

The groups and semigroups of automatic transformations have been studied actively since the 60th years of the last century. The Mealy automata became a convenient method of the definition of transformation groups and semigroups with interesting properties.

In this article we begin to investigate inverse semigroups defined by partially defined automata.

Let $A = \langle X, Y, Q, \pi, \lambda \rangle$ be a two-state automaton over the alphabets $X = Y = \{0, 1\}$, which generates the "Lamplighter" group. We remove one pair (x, q) from domain of the output function λ, where x is a symbol in X and q is a state in Q. We obtain four partially defined invertible automata. It is proved that aforementioned automata generate finite inverse semigroups.