ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 91 Nr kol. 1652

Zbigniew SZASZKOWSKI

CIĄG KOMUTANTÓW GRUPY AUTOMORFIZMÓW FINITARNYCH DRZEWA 3-ADYCZNEGO

Streszczenie. W artykule tym podaję warunek konieczny i wystarczający, aby automorfizm drzewa 3-adycznego należał do odpowiedniego komutanta grupy automorfizmów finitarnych drzewa 3-adycznego.

DERIVED SERIES OF THE FINITARY AUTOMORPHISM GROUP OF A 3-ADIC ROOTED TREE

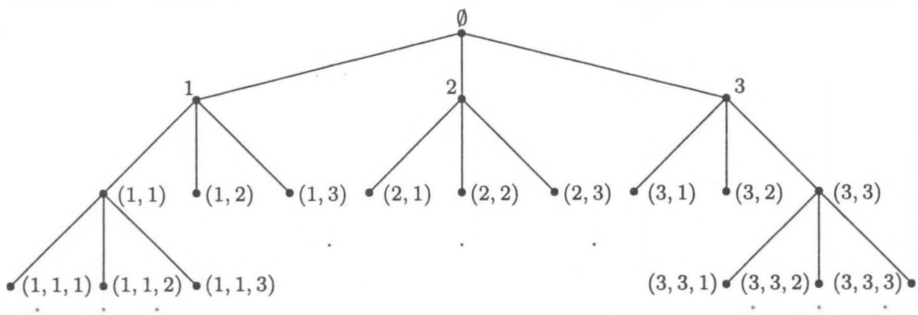
Summary. Members of the derived series for the finitary automorphism group of 3-adic rooted tree and new way of calculations for the automorphism group are described.

1. Wprowadzenie

W ostatnich kilku latach grupa automorfizmów drzewa jednorodnego z korzeniem stała się jednym z podstawowych obiektów geometrycznej teorii grup. Wiemy, że zawiera ona, jako podgrupy, klasy grup mające interesujące własności: grupy typu Burnsaida, grupy wzrostu pośredniego, grupy prawie skończone (just infinite), grupy mające nietypowe faktoryzacje i tak dalej. Ponieważ grupa automorfizmów drzewa $n-$adycznego z korzeniem jest izomorficzna z nieskończonym splotem grup symetrycznych S_n, można rozwinąć użyteczną technikę obliczeń dla elementów tej grupy traktowanej jako nieskończony splot grup symetrycznych S_n. Wynika stąd, że grupa automorfizmów drzewa n–adycznego jest rezydualnie rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2, 3, 4$. Ciąg komutantów grupy automorfizmów drzewa 2–adycznego został scharakteryzowany w [1]. W artykule przedstawiam pełną charakteryzację ciągu komutantów grupy automorfizmów drzewa 3–adycznego z korzeniem.

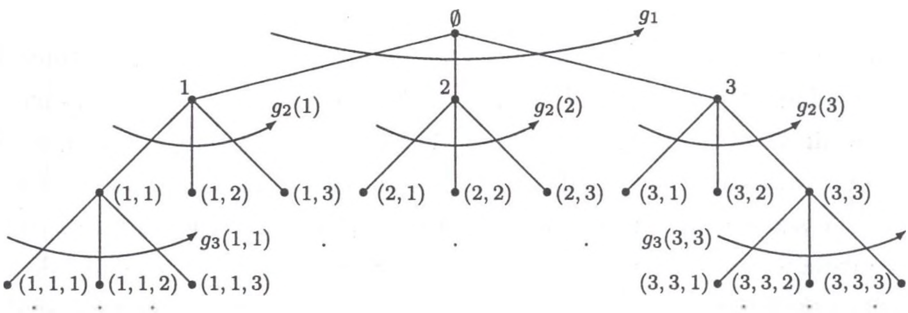
2. Podstawowe definicje i główne twierdzenie

Niech $X = \{1, 2, 3\}$ jest trzyliterowym alfabetem. Załóżmy, że $X_m = X \times \cdots \times X$ (m razy), $m \in \mathbb{N}$, $X_0 = \{\emptyset\}$, $V = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$. W zbiorze V definiujemy strukturę drzewa z korzeniem w taki sposób, że każdy wierzchołek $x \in X_1$ łączymy z korzeniem oraz każdy wierzchołek $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i) \in X_i$ łączymy z wierzchołkiem $(x_1, \ldots, x_{i-1})$, gdzie $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Elementy zbioru V są wierzchołkami drzewa, natomiast $\emptyset$ jest korzeniem. Drzewo takie oznaczamy T_3 i nazywamy *drzewem jednorodnym typu* 3 *z korzeniem* lub *drzewem* 3*-adycznym* (rys. 1). Wierzchołki ze zbioru X_m nazywamy *m–tym poziomem* drzewa T_3.



Rys. 1. Drzewo 3–adyczne T_3
Fig. 1. 3 – *adic* rooted tree T_3

Niech $x \in X_m$, podgraf (T_3, x) zawierający x oraz wszystkie wierzchołki $v \in \bigcup_{i=m+1}^{\infty} X_i$ połączone z nim drogą i krawędzie je łączące tworzy poddrzewo $T_3(x)$ z korzeniem x, które jest izomorficzne z T_3. Symbolem ∂T_3 oznaczamy granicę drzewa T_3. Elementami zbioru ∂T_3 są nieskończone drogi z początkiem w korzeniu, a zatem zbiór ten można utożsamiać z potęgą kartezjańską X^ω [2]. Automorfizmem drzewa T_3 z korzeniem będziemy nazywać dowolny automorfizm grafu T_3, który zachowuje korzeń. Automorfizm g drzewa T_3 możemy przedstawić za pomocą etykietowanego drzewa takiego, że każdemu wierzchołkowi drzewa T_3 przyporządkowana jest permutacja grupy symetrycznej S_3. Drzewo takie nazywamy portretem automorfizmu g (rys. 2).



Rys. 2. Portret automorfizmu g
Fig. 2. The portrait of automorphism g

Skróconym zapisem portretu automorfizmu g jest nieskończony ciąg (nazywany tabelką):

$$g = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots], \tag{1}$$

gdzie $g_1 \in S_3$, $g_i\colon X_{i-1} \to S_3$ dla $i = 2, 3, \dots$. Jeżeli

$$g = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots]\ ,\ h = [h_1, h_2(x_1), h_3(x_1, x_2), \dots],$$

to

$$gh = [g_1 h_1, g_2(x_1) h_2(x_1^{g_1}), g_3(x_1, x_2) h_3(x_1^{g_1}, x_2^{g_2(x_1)}), \dots],$$

oraz

$$g^{-1} = [g_1^{-1}, g_2^{-1}(x_1^{g_1^{-1}}), g_3^{-1}(x_1^{g_1^{-1}}, x_2^{g_2^{-1}\left(x_1^{g_1^{-1}}\right)}), \dots],$$

gdzie x^h jest obrazem elementu x przez permutację $h \in S_3$. Automorfizmowi tożsamościowemu odpowiada tabelka $e = [\varepsilon, \varepsilon, \ldots]$, gdzie ε jest permutacją tożsamościową z S_3. Zbiór automorfizmów drzewa T_3 tworzy grupę, którą oznaczamy AutT_3. Dla $m \in \mathbb{N}$ zbiór automorfizmów postaci

$$g = [g_1, g_2(x_1), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_{m-1}), \varepsilon, \varepsilon, \ldots] \tag{2}$$

tworzy podgrupę, którą oznaczamy symbolem $\widetilde{G}_m$. Oczywiście $\widetilde{G}_1 \subseteq \widetilde{G}_2 \subseteq \widetilde{G}_3 \subseteq \ldots$, a zatem

$$\mathrm{FAut}T_3 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{G}_m$$

jest podgrupą w AutT_3. Automorfizmy postaci (2) nazywamy automorfizmami finitarnymi drzewa T_3, a grupę FAutT_3 nazywamy grupą automorfizmów finitarnych lub bazą AutT_3 [3]. Oczywiście każdy automorfizm grupy FAutT_3 ma skończony rząd, natomiast nie każdy automorfizm z FAutT_3 mający skończony rząd należy do FAutT_3; przykładem jest jeden z automorfizmów generujących 3-grupę Gupta-Sidki, który ma rząd 3, ale nie należy do FAutT_3 [4]. Grupa AutT_3 działa na ∂T_3 w następujący sposób:

$$y^g = (y_1^{g_1}, y_2^{g_2(y_1)}, y_3^{g_3(y_1, y_2)}, \ldots), \tag{3}$$

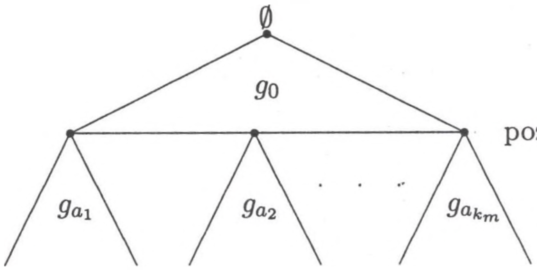
gdzie $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \partial T_3$ i $g \in \mathrm{Aut}T_3$.

Drugim sposobem prezentacji automorfizmu g jest prezentacja rekurencyjna. Proponowana niżej $m-$prezentacja jest uogólnieniem prezentacji rekurencyjnej zaproponowanej w [3] dla $m = 1$. Podgraf $T_{3,m}$, $m \in \mathbb{N}$, drzewa T_3 składający się z wierzchołków $\bigcup_{i=0}^{m} X_i$ i wszystkich krawędzi je łączących nazywamy *początkiem drzewa* T_3 *o wysokości* m, a grupę automorfizmów drzewa $T_{3,m}$ oznaczamy symbolem G_m (jest ona izomorficzna z grupą $\widetilde{G}_m$). Dowolny automorfizm drzewa $T_{3,m}$ możemy przedstawić w postaci tabelki (1) ograniczonej do pierwszych m współrzędnych. Grupa G_m działa na zbiorze X_m według równości (3). Ciąg wierzchołków poziomu m ustawiony w porządku leksykograficznym oznaczamy $a_1, a_2, \ldots, a_{k_m}$, gdzie $k_m = 3^m$.

Definicja 1. *m−prezentacja automorfizmu $g \in AutT_3$ ma postać*

$$g = (g_{a_1}, \dots, g_{a_{k_m}})g_0,$$

gdzie $g_0 \in G_m$ oraz $g_{a_i} \in AutT_3$ dla $i = 1, \dots, k_m$ (rys. 3).



Rys. 3. m−prezentacja automorfizmu g
Fig. 3. m−presentation of automorphism g

Oczywiście automorfizm g jest elementem FAutT_3 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba m, że m−prezentacja automorfizmu g ma postać $g = (e, \dots, e)g_0$. Jeżeli

$$g = (g_{a_1}, \dots, g_{a_{k_m}})g_0\ , \qquad h = (h_{a_1}, \dots, h_{a_{k_m}})h_0$$

to

$$gh = \left(g_{a_1}h_{a_1^{g_0}}, \dots, g_{a_{k_m}}h_{a_{k_m}^{g_0}}\right)g_0h_0$$

oraz

$$g^{-1} = \left(g_{b_1}^{-1}, \dots, g_{b_{k_m}}^{-1}\right)g_0^{-1},$$

gdzie $b_i = a_i^{g_0^{-1}}$ dla $i = 1, \dots, k_m$.

Lemat 1. *Niech $\widetilde{M}$ jest podgrupą automorfizmów*

$$[g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots],$$

takich że $g_1 = \varepsilon$, oraz iloczyn permutacji działających na m−tym poziomie drzewa T_3, jest permutacją parzystą dla dowolnego $m > 1$, $M = \widetilde{M} \cap FAutT_3$. Wtedy $\widetilde{M} \lhd AutT_3$, $M \lhd FAutT_3$.

Dowód. Dowód lematu wynika bezpośrednio z definicji M i $\widetilde{M}$.$\square$

Dla $\alpha \in S_3$ oznaczamy $\overline{\alpha} = [\alpha, \varepsilon, \varepsilon, \dots] \in \mathrm{Aut}T_3$, niech $\overline{B} = \{\overline{\alpha} | \alpha \in B\}$ dla $B \subseteq S_3$.

Ponieważ grupa S_3 jest rozwiązalna (stopnia 2), grupa $\mathrm{Aut}T_3$ jest rezydualnie rozwiązalna, a grupa $\mathrm{FAut}T_3$ jest dodatkowo lokalnie rozwiązalna. A zatem pojawia się problem charakteryzacji elementów ciągu komutantów w tych grupach. Następujące twierdzenie podaje taką charakteryzację w języku $m-$prezentacji automorfizmów dla grupy $\mathrm{FAut}T_3$.

Twierdzenie 1. *(i)* $\mathrm{FAut}T_3' = \overline{A_3} \cdot M$, $\mathrm{FAut}T_3'' = M$.

(ii) Niech $n > 2$ oraz $n = 2m + l$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2$. Automorfizm $g \in \mathrm{FAut}T_3$ należy do $\mathrm{FAut}T_3^{(n)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy g ma m-prezentację $g = (g_{a_1}, \dots, g_{a_{3^m}})$ taką, że $g_{a_i} \in FAutT_3^{(l)}$ dla $i = 1, \dots, 3^m$.

Grupa $\mathrm{Aut}T_3$ jest proskończona, komutanty tej grupy są domknięte, a zatem mogą być scharakteryzowane jako domknięcia odpowiednich komutantów grupy $\mathrm{FAut}T_3$.

3. Dowód Twierdzenia 1

Dla $\alpha \in S_n$, $m \in \mathbb{N}$ oraz $a_i \in X_m$ oznaczmy $\overline{\alpha}_{a_i}$ automorfizm mający $m-$prezentację postaci $(e, \dots, e, g_{a_i}, e, \dots, e)$, gdzie $g_{a_i} = \overline{\alpha}$ (rys. 4).

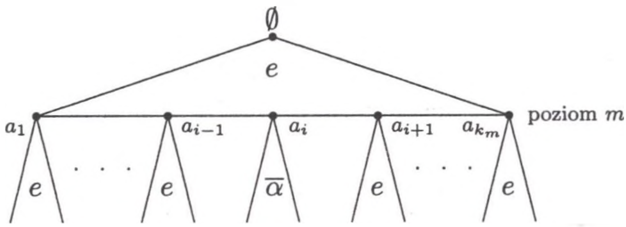
Niech $\overline{\alpha}_{a_i,a_j} = \overline{\alpha}_{a_i}\overline{\alpha}_{a_j}$ dla $a_i, a_j \in X_m$ $(a_i \neq a_j)$. Dla dowolnych elementów $y = (y_1, y_2, \dots), z = (z_1, z_2, \dots) \in \partial T_3$, $i \in \mathbb{N}$ oznaczamy

$$h_i = \begin{cases} (y_i, z_i) & \text{jeżeli} \quad y_i \neq z_i, \\ \varepsilon & \text{jeżeli} \quad y_i = z_i, \end{cases}$$

gdzie (y_i, z_i) jest transpozycją z S_3. Następnie konstruujemy automorfizm $g_{y,z} = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots]$ w następujący sposób:

$$g_1 = h_1, \quad g_{i+1}(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} h_i & \text{dla } (x_1, \dots, x_i) = (y_1, \dots, y_i), \\ \varepsilon & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $i \in \mathbb{N}$.



Rys. 4. Automorfizm $\overline{\alpha}_{a_i}$
Fig. 4. The automorphism $\overline{\alpha}_{a_i}$

Lemat 2. *Jeżeli $y, z \in X_m \times \{1\}^\omega$, to automorfizm $g_{y,z}$ należy do $\widetilde{G}_m$ oraz $y^{g_{y,z}} = z$.*

Dowód. Niech $y, z \in X_m \times \{1\}^\omega$, wtedy według definicji działania (3) mamy

$$(y_1, y_2, \dots)^{g_{y,z}} = \left(y_1^{g_1}, y_2^{g_2(y_1)}, y_3^{g_3(y_1,y_2)}, \dots\right) = $$
$$= (y_1^{h_1}, y_2^{h_2}, y_3^{h_3}, \dots) = (z_1, z_2, z_3, \dots).$$

Ponadto $y_{i+1} = z_{i+1} = 1$ dla $i \geqslant m$. A zatem $g_{i+1} \equiv \varepsilon$, to znaczy że $g_{y,z} \in \widetilde{G}_m$.□

Lemat 3. *Jeżeli $G = A \cdot B$, gdzie $A < G$, $B \lhd G$, to $G' < A' \cdot B$.*

Dowód. Niech $G = A \cdot B$ będzie grupą taką, że $A < G$, $B \lhd G$, wtedy dla każdego $a \in A, b \in B$ istnieje $b' \in B$ takie, że $ba = ab'$. Co więcej, dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ mamy, że $g_1 = a_1 b_1$, $g_2 = a_2 b_2$. Stąd

$$\begin{aligned} [g_1, g_2] &= (a_1 b_1)^{-1}(a_2 b_2)^{-1} a_1 b_1 a_2 b_2 = a_1^{-1}(b_1^{-1})' b_2^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2 b_1' b_2 = \\ &= a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2 \left((b_1^{-1})' b_2^{-1}\right)' b_1' b_2 = [a_1, a_2] \left((b_1^{-1})' b_2^{-1}\right)' b_1' b_2, \end{aligned}$$

czyli $[g_1, g_2] \in A'B$.□

Niech B jest zbiorem automorfizmów drzewa T_3 postaci $\overline{\alpha}_{y,z}$, gdzie $\alpha \in S_3 \setminus A_3$, $y, z \in X_m$ $(y \neq z)$ oraz $\overline{\beta}_y$, gdzie $\beta \in A_3$, $y \in X_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Lemat 4. *Zbiór B jest zbiorem generatorów podgrupy M.*

Dowód. Dowolny automorfizm $g = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots] \in M$ możemy rozłożyć w iloczyn „poziomowych" automorfizmów:

$$g = [\varepsilon, \dots, \varepsilon, g_m(\widetilde{x}_{m-1}), \varepsilon, \dots][\varepsilon, \dots, \varepsilon, g_{m-1}(\widetilde{x}_{m-2}), \varepsilon, \dots] \cdots$$
$$\cdots [\varepsilon, g_2(x_1), \varepsilon, \dots],$$

gdzie $\widetilde{x}_i = (x_1, \dots, x_i)$. Dowolny poziomowy automorfizm jest iloczynem automorfizmów postaci $\overline{\delta}_x \overline{\delta^{-1}}_y$, $\delta \in S_3$, $x, y \in X_m$ $(x \neq y)$ oraz automorfizmów postaci $\overline{\beta}_z$, $\beta \in A_3$, $z \in X_m$. Wystarczy udowodnić, że automorfizmy takiej postaci mogą być zapisane jako iloczyn automorfizmów ze zbioru B. Dla automorfizmów $\overline{\beta}_x$, $\beta \in A_3$, $x \in X_m$ jest to oczywiste. Niech $u = \overline{\delta}_x \overline{\delta^{-1}}_y$ jest automorfizmem innej postaci. Zdefiniujmy automorfizm w następująco: $w = \overline{\delta}_x \overline{\delta}_y = \overline{\delta}_{x,y}$, wtedy $u \cdot w = \overline{\delta}_x^2$. Zapisujemy permutację δ^{-1} jako iloczyn transpozycji $\delta^{-1} = v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = S_3 \setminus A_3$. Wtedy $w^{-1} = \overline{v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_x \cdot \overline{v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_y$. Ponieważ $u = \overline{\delta}_x^2 \cdot w^{-1}$, to $u = \overline{\delta}_x^2 \cdot \overline{v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_x \cdot \overline{v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_y$. Automorfizm $\overline{v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_x \cdot \overline{v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_y$ jest iloczynem automorfizmów postaci $\overline{\alpha_i}_x \cdot \overline{\alpha_i}_y$. Ponieważ $\delta^2 \in A_3$, to $\overline{\delta}_x^2 \in B$, czyli u jest iloczynem automorfizmów ze zbioru B, co kończy dowód. $\square$

Lemat 5. *Niech $\alpha \in S_3 \setminus A_3$, $\delta = (1, 3, 2)$.*

(1) *Jeżeli $x_1, x_2 \in X_m$ $(x_1 \neq x_2)$, $y = (x_1, 1, 1 \dots)$, $z = (x_2, 1, 1, \dots)$ oraz $m \in \mathbb{N}$, wówczas*

$$\overline{\alpha}_{x_1, x_2} = \left[\overline{\alpha}_{x_1}, g_{y,z}^{-1}\right].$$

(2) *Jeżeli $y = (i_1, \dots, i_{m-1})$, $x_1 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 1)$, $x_2 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 2)$, $x_3 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 3)$ oraz $m > 1$, wtedy*

$$\overline{\alpha}_{x_1, x_2} = [\overline{\alpha}_{x_1, x_3}, (\overline{\gamma}_y)^{-1}].$$

(3) *Jeżeli* $x_1 = (1, i_2, \dots, i_m)$, $x_2 = (2, i_2, \dots, i_m)$, $x_3 = (3, i_2, \dots, i_m)$ *oraz* $m \in \mathbb{N}$, *to*

$$\overline{\alpha}_{x_1,x_2} = [\overline{\alpha}_{x_1,x_3}, (\overline{\gamma})^{-1}].$$

Dowód. Niech $\alpha \in S_3 \setminus A_3$ oraz $\gamma = (1,3,2)$. Teraz udowodnimy równość (1). Niech $x_1, x_2 \in X_m$ ($x_1 \neq x_2$), $m \in \mathbb{N}$, $y = (x_1, 1, 1, \dots)$ oraz $z = (x_2, 1, 1, \dots)$. Wtedy z Lematu 2. wynika, że automorfizm $g_{y,z}$ ma następującą $m-$prezentację $(e, \dots, e)\widetilde{g}_{x_1,x_2}$, gdzie tabelka $\widetilde{g}_{x_1,x_2}$ jest tabelką automorfizmu $g_{y,z}$ obciętą do pierwszych m współrzędnych; ponadto z Lematu 2. wynika, że $x_1^{\widetilde{g}_{x_1,x_2}} = x_2$. Niech $f_{x_1} = \overline{\alpha}$, wtedy

$$\begin{aligned}\left[\overline{\alpha}_{x_1}, g_{y,z}^{-1}\right] &= \overline{\alpha}_{x_1} \cdot g_{y,z} \cdot \overline{\alpha}_{x_1} \cdot g_{y,z}^{-1} = \\ &= (e, \dots, e, f_{x_1}, e, \dots, e)\widetilde{g}_{x_1,x_2} \cdot (e, \dots, e, f_{x_1}, e, \dots, e)\widetilde{g}_{x_1,x_2}^{-1} = \\ &= (e, \dots, e, f_{x_1}, e, \dots, e)(e, \dots, e, f_{x_1^{\widetilde{g}_{x_1,x_2}}}, e, \dots, e) = \\ &= (e, \dots, e, f_{x_1}, e, \dots, e)(e, \dots, e, f_{x_2}, e, \dots, e) = \overline{\alpha}_{x_1,x_2}.\end{aligned}$$

Udowodnimy równość (2). Niech $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $x_1 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 1)$, $x_2 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 2)$, $x_3 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 3)$ oraz $y = (i_1, \dots, i_{m-1})$. Automorfizmy $\overline{\alpha}_{x_1,x_3}$, $\overline{\gamma}_y$ mają następujące $m-1-$prezentacje:

$$\overline{\alpha}_{x_1,x_3} = (e, \dots, e, f_{x_1}, e, \dots, e, f_{x_3}, e, \dots, e)\ , \quad \overline{\gamma}_y = (e, \dots, e)\widetilde{\gamma}_y.$$

Ponadto $x_1^{\widetilde{\gamma}_y} = x_3$, $x_2^{\widetilde{\gamma}_y} = x_1$, $x_3^{\widetilde{\gamma}_y} = x_2$. Stąd

$$\begin{aligned}[\overline{\alpha}_{x_1,x_3}, (\overline{\gamma}_y)^{-1}] = \overline{\alpha}_{x_1,x_3} \cdot \overline{\gamma}_y \cdot \overline{\alpha}_{x_1,x_3} \cdot (\overline{\gamma}_y)^{-1} &= \overline{\alpha}_{x_1,x_3} \cdot \overline{\alpha}_{x_1^{\widetilde{\gamma}_y}, x_3^{\widetilde{\gamma}_y}} = \\ &= \overline{\alpha}_{x_1,x_3} \cdot \overline{\alpha}_{x_2,x_3} = \overline{\alpha}_{x_1,x_2}.\end{aligned}$$

Równość (3) dowodzimy podobnie jak równość (2). □

Dowód Twierdzenia 1. przeprowadzimy w trzech krokach.

Krok 1. Udowodnimy równość $\mathrm{FAut}T_3' = \overline{A_3} \cdot M$. Inkluzja $\mathrm{FAut}T_3' \subseteq \overline{A_3} \cdot M$ wynika stąd, że dla dowolnych automorfizmów $g, h \in \mathrm{FAut}T_3$ na $m-$tym poziomie portretu automorfizmu $[g,h]$ dla każdych permutacji

$$g_m(x_1, \dots, x_{m-1}), \quad h_m(x_1, \dots, x_{m-1})$$

występują także permutacje do nich odwrotne. Wobec tego iloczyn permuatcji $m-$tego poziomu portretu automorfizmu $[g, h]$ jest permutacją parzystą.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną wystarczy pokazać, że zbiór FAutT_3' zawiera B i $\overline{A_3}$. Ponieważ $S_3' = A_3$, to $\overline{\beta}_{x_1}, \overline{\beta} \in$ FAutT_3', gdzie $x_1 \in X_m$, $m \in \mathbb{N}$. Pokażemy teraz, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in X_m$ $(x_1 \neq x_2)$, $m \in \mathbb{N}$ grupa FAutT_3' zawiera automorfizmy $\overline{\alpha}_{x_1,x_2}$, gdzie $\alpha \in S_3 \setminus A_3$. Niech $\alpha \in S_3 \setminus A_3$, $m \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2 \in X_m$ $(x_1 \neq x_2)$ oraz $y = (x_1, 1, 1, \dots)$, $z = (x_2, 1, 1, \dots)$ $(x_1 \neq x_2)$. Z punktu (1) Lematu 5. wynika, że $\overline{\alpha}_{x_1,x_2} = \left[\overline{\alpha}_{x_1}, g_{y,z}^{-1}\right]$, czyli $\overline{\alpha}_{x_1,x_2} \in$ FAutT_3'. Pokazaliśmy, że zbiory B, $\overline{A_3}$ są zawarte w FAutT_3'. Ponieważ B jest zbiorem generatorów M, to $\overline{A_3} \cdot M \subseteq$ FAutT_3'.

Krok 2. Udowodnimy równość FAut$T_3'' = M$. Inkluzja FAut$T_3'' \subseteq M$ wynika z Lematu 3. oraz z faktu, że $A_3' = \{\varepsilon\}$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną, wystarczy pokazać, że FAutT_3'' zawiera B. Niech $m \in \mathbb{N}$, $\alpha = (1,3)$, $\beta = (1,2)$, $\gamma = (1,2,3)$ oraz $x_1, x_2 \in X_m$ $(x_1 \neq x_2)$. Z kroku 1 wynika, że $g = \overline{\alpha}_{x_1,x_2}$, $h = \overline{\beta}_{x_1}\overline{\alpha}_{x_2}$ należą do FAutT_3'. Stąd automorfizm $\overline{\gamma}_{x_1} = [g, h] \in$ FAutT_3''.

Niech $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $x_1 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 1), x_2 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 2), x_3 = (i_1, \dots, i_{m-1}, 3) \in X_m$, $y = (i_1, \dots, i_{m-1})$, $\gamma = (1,3,2)$, wtedy z punktu (2) Lematu 5. wynika, że $\overline{\alpha}_{x_1,x_2} = [\overline{\alpha}_{x_1,x_3}, (\overline{\gamma}_y)^{-1}]$, czyli $\overline{\alpha}_{x_1,x_2} \in$ FAutT_3''. Przeprowadzając analogiczne obliczenia jak w dowodzie równości (2) Lematu 5. możemy wykazać, że $\overline{\alpha}_{x_2,x_3} = (\overline{\gamma}_y)^{-1} \cdot \overline{\alpha}_{x_1,x_2} \cdot \overline{\gamma}_y$ oraz $\overline{\alpha}_{x_1,x_3} = \overline{\gamma}_y \cdot \overline{\alpha}_{x_1,x_2} \cdot (\overline{\gamma}_y)^{-1}$.

Niech $x_1 = (1, i_2, \dots, i_m)$, $x_2 = (2, i_2, \dots, i_m)$, $x_3 = (3, i_2, \dots, i_m) \in X_m$, $m \in \mathbb{N}$. Z kroku 1 oraz punktu (3) Lematu 5. mamy, że $\overline{\alpha}_{x_1,x_2} = [\overline{\alpha}_{x_1,x_3}, (\overline{\gamma})^{-1}]$, czyli $\overline{\alpha}_{x_1,x_2} \in$ FAutT_3''. Ponadto $\overline{\alpha}_{x_2,x_3} = (\overline{\gamma})^{-1} \cdot \overline{\alpha}_{x_1,x_2} \cdot \overline{\gamma}$ oraz $\overline{\alpha}_{x_1,x_3} = \overline{\gamma} \cdot \overline{\alpha}_{x_1,x_2} \cdot (\overline{\gamma})^{-1}$. Wykazaliśmy, że FAut$T_3''$ zawiera automorfizmy postaci $\overline{\alpha}_{y_1,y_2}$, gdzie $\alpha \in S_3 \setminus A_3$ oraz $y_1, y_2 \in X_m$ $(y_1 \neq y_2)$, $m \in \mathbb{N}$, a to znaczy, że $B \subset$ FAutT_3''. Ponieważ B jest zbiorem generatorów M, to $M <$ FAutT_3'', co kończy dowód równości FAut$T_3'' = M$.

Lemat 6. *Automorfizm $g \in M$ należy do M' wtedy i tylko wtedy, gdy g ma 1−prezentację $g = (g_1, g_2, g_3)$ taką, że $g_i \in$ FAutT_3'.*

Dowód. Oznaczmy

$$G = \{g \in \mathrm{FAut}T_3 | g = (g_1, g_2, g_3),\ g_i \in \mathrm{FAut}T_3,\ i = 1, 2, 3\}.$$

Zauważmy, że

$$G' = \{g \in \mathrm{FAut}T_3 | g = (g_1, g_2, g_3),\ g_i \in \mathrm{FAut}T_3',\ i = 1, 2, 3\}.$$

Wystarczy pokazać równość $G' = \mathrm{FAut}T_3^{(3)}$. Z kroku 2 mamy $\mathrm{FAut}T_3'' < G$, czyli $\mathrm{FAut}T_3^{(3)} < G'$. Z drugiej strony z kroków 1, 2 mamy, że $G' < \mathrm{FAut}T_3''$, skąd wynika, że $G'' < \mathrm{FAut}T_3^{(3)}$, ale $G'' = \{g \in \mathrm{FAut}T_3 | g = (g_1, g_2, g_3),\ g_i \in \mathrm{FAut}T_3'',\ i = 1, 2, 3\}$. Wystarczy pokazać, że $\mathrm{FAut}T_3^{(3)}$ zawiera automorfizmy mające 1–prezentacje postaci $(\overline{\gamma}, \overline{\delta}, \overline{\zeta})$, gdzie $\gamma, \delta, \zeta \in A_3$. Zbiór takich automorfizmów oznaczmy przez C. Niech $\alpha = (1, 3)$, $\beta = (1, 2)$, $\gamma = (1, 2, 3)$. Z kroku 2 wynika, że automorfizmy $g = \overline{\alpha}_{1,2}$, $h = \overline{\beta}_1\overline{\alpha}_2$ należą do $\mathrm{FAut}T_3''$, to znaczy, że $\overline{\gamma}_1 = [g, h] \in \mathrm{FAut}T_3^{(3)}$. Analogicznie pokazujemy, że $\overline{\gamma}_2$, $\overline{\gamma}_3 \in \mathrm{FAut}T_3^{(3)}$, czyli $C \subseteq \mathrm{FAut}T_3^{(3)}$. Zauważmy, że $C \cdot G'' = G'$, a stąd $G' < \mathrm{FAut}T_3^{(3)}$.□

Krok 3. Dowód części (ii) Twierdzenia 1. można przeprowadzić indukcyjnie.

Niech $n = 2m+2$; dla $m \in \mathbb{N}$ załóżmy, że dla takiego n automorfizm $g \in \mathrm{FAut}T_3$ należy do $\mathrm{FAut}T_3^{(n)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy g ma m–prezentację $g = (g_{a_1}, \ldots, g_{a_{k_m}})$ taką, że $g_{a_i} \in M$ dla $i = 1, \ldots, k_m$. Stąd mamy, że automorfizm $g \in \mathrm{FAut}T_3$ należy do $\mathrm{FAut}T_3^{(n+1)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy g ma m–prezentację $g = (g_{a_1}, \ldots, g_{a_{k_m}})$ taką, że $g_{a_i} \in M'$ dla $i = 1, \ldots, k_m$. Ale z Lematu 6. wynika, że każdy automorfizm g_{a_i} ma 1–prezentację $g_{a_i} = (g_{a_i}^{(1)}, g_{a_i}^{(2)}, g_{a_i}^{(3)})$ taką, że $g_{a_i}^{(j)} \in \mathrm{FAut}T_3'$ dla $j \in \{1, 2, 3\}$, $i = 1, \ldots, k_m$, a więc automorfizm g ma $m+1$–prezentację

$$g = \left(g_{a_1}^{(1)}, g_{a_1}^{(2)}, g_{a_1}^{(3)}, g_{a_2}^{(1)}, g_{a_2}^{(2)}, g_{a_2}^{(3)}, \ldots, g_{a_{k_m}}^{(1)}, g_{a_{k_m}}^{(2)}, g_{a_{k_m}}^{(3)}\right),$$

co kończy dowód tego przypadku.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, krok indukcyjny wynika bezpośrednio z kroku 2 i Lematu 6.□

Literatura

1. N. K. Smetanuk, V. I. Sushchansky, *Verbal subgroups of the finitary automorphism group of 2-adic tree*, Fundam. Prikl. Math **6** (2000), 875–888.
2. Grigorchuk R. I.; Nekrashevich V. V.; Sushchansky, V. I. *Automata, dynamical systems, and groups*, (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova **231** (2000), 134–214; translation in Proc. Steklov Inst. Math. **231** (2000), 128–203.
3. S. Sidki, *Regular trees and their automorphisms*, Monografas de Matemtica **56**, Instituto de Matemtica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro 1998.
4. L. Bartholdi, R. I. Grigorchuk, Z. Sunik, *Branch groups*, Handbook of algebra, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam 2003, 989-1112.

Zbigniew Szaszkowski
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Abstract

The graph T_3 (pic. 1) we call 3−*adic rooted tree*. The set of all automorphisms of T_3 we denote by AutT_3. We denote by FAutT_3 the set of all automorphisms of AutT_3 which assume shape (2), this set we call *finitary automorphism group of tree* T_3. An automorphism $g \in$ FAutT_3 belongs to (FAutT_3)$'$ if and only if for any level of tree T_3 product of all permutations which operates on this level of tree T_3 is even permutation. An automorphism $g \in$ FAutT_3 such that $g = [g_1, g_2(x_1), \dots]$ belongs to (FAutT_3)$''$ if and only if $g \in$ (FAutT_3)$'$ and g_1 is identity permutation. Let $m \in \mathbb{N}$, the subgraph $T_{3,m}$ of T_3 which compose with vertices of levels $0, \dots, m$ and

every edges which connects this vertices we called *beginning tree* T_3 *which has high* m, and group of all automorphisms of tree $T_{3,m}$ we denote by G_m. Let $m \in \mathbb{N}$, $m-$presentation of automorphism g has shape

$$g = (g_{a_1}, \dots, g_{a_{k_m}})g_0,$$

where $g_0 \in G_m$ oraz $g_{a_i} \in \mathrm{Aut}T_3$ for $i = 1, \dots, k_m$ (pic. 3). Let $n > 2$ and $n = 2m + l$ where $m \in \mathbb{N}$, $l \in \{1, 2\}$. An automorphism $g \in \mathrm{FAut}T_3$ belongs to $(\mathrm{FAut}T_3)^{(n)}$ if and only if g has $m-$presentation $g = (g_{a_1}, \dots, g_{a_{3^m}})$ such that $g_{a_i} \in \mathrm{FAut}T_3^{(l)}$ for $i = 1, \dots, 3^m$.