

Adam ZIELONKA

## ZASTOSOWANIE FALKI HAARA W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNYCH ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH DLA RÓWNANIA DYFUZJI NIEUSTALONEJ

**Streszczenie.** W pracy tej została zaprezentowana numeryczna metoda rozwiązywania odwrotnych zagadnień brzegowych dla równania dyfuzji nieustalonej. Metoda ta zbudowana została w oparciu o bazę falkową falki Haara.

## SOLVING THE INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF UNSTABLE DIFFUSION BY APPLYING HAAR'S SYSTEM

**Summary.** The numerical method of the inverse problem for the equation of unstable diffusion is presented in this paper. This method is based on Haar's system.

### 1. Sformułowanie zadania

Rozważmy równanie Fouriera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, 1)^2, \quad (1)$$

z danym warunkiem brzegowym:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = f(t), \quad t \in [0, 1),$$

i warunkiem początkowym:

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, 1),$$

gdzie funkcje  $f$  i  $g$  są odpowiedniej klasy i spełniają warunki zgodności.

Załóżmy ponadto, że znamy wartości  $u^\epsilon(x_0, \tau_j)$  funkcji  $u(x, t)$  w ustalonym punkcie  $x = x_0$ ,  $x_0 \in (0, 1)$  dla  $m$  różnych chwil czasowych  $t = \tau_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , odmierzanych ze stałym krokiem czasu  $\Delta\tau$  ( $\tau_j = j\Delta\tau$ ). Wartości  $u^\epsilon(x_0, \tau_j)$  mogą oznaczać np. wyniki pomiarów i mogą być obarczone pewnym błędem ( $\epsilon$  oznacza oszacowanie procentowe maksymalnego zaburzenia).

Naszym zadaniem będzie wyznaczenie funkcji  $u(x, t)$  oraz funkcji opisującej warunek brzegowy na brzegu  $x = 1$ . W zależności od rodzaju warunku brzegowego będą to funkcje:

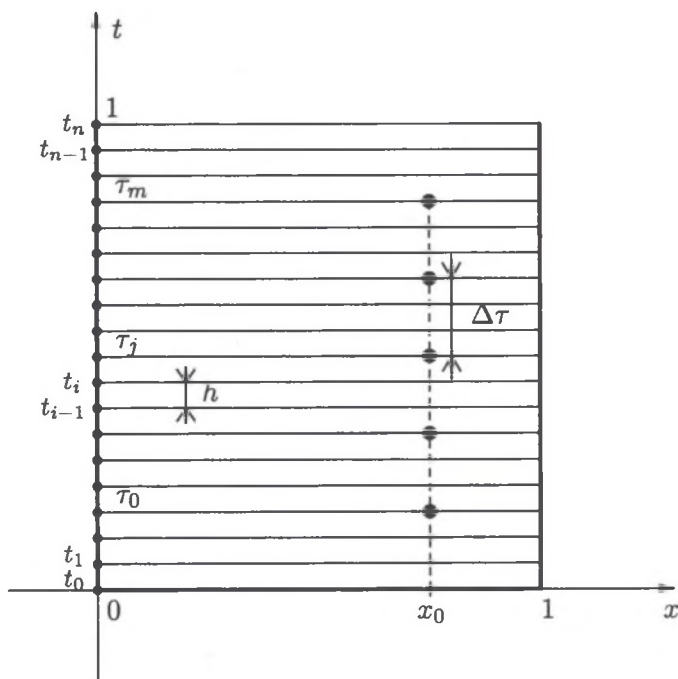
- $\phi(t)$  w przypadku warunku I rodzaju  $u(1, t) = \phi(t)$ ,
- $q(t)$  w przypadku warunku II rodzaju  $\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = q(t)$ ,
- $\alpha(t)$  w przypadku warunku III rodzaju  $\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \alpha(t)u(1, t)$ .

Jest to klasyczne brzegowe zagadnienie odwrotne dla równania przewodnictwa, a jego rozwiązania będziemy poszukiwali wykorzystując teorię falek [3].

## 2. Metoda rozwiązania

Jako pierwsze rozpatrzmy zadanie, w którym interesuje nas warunek pierwszego rodzaju [2].

Równanie (1) rozważymy na zdyskretyzowanym zbiorze wartości zmiennej  $t \in [0, 1]$ . Możemy przyjąć, że węzły są rozmieszczone równomiernie (stały krok  $h$ ), przez co rozumiemy, że uwzględnimy tylko wartości  $t \in \{t_i : t_i = ih, h = 1/n, i = 0, 1, \dots, n\}$ . Istotne jest, żeby do zdyskretyzowanego zbioru wartości  $t$  należały wartości  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , dla których wykonany został pomiar (rysunek 1).



Rys. 1. Modelowany obiekt – dyskretyzacja  $I^2$   
 Fig. 1. Considering model – discretization  $I^2$

Po przyjęciu powyższego założenia równanie (1) sprowadza się do układu równań postaci:

$$\begin{cases} u(x, t_0) = g(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_i) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t_i) = 0, & x \in (0, 1), \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Dla każdej zdyskretyzowanej wartości  $t = t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , będziemy poszukiwali funkcji  $u(x, t_i)$  w postaci rozwinięcia jej funkcji względem bazy falkowej  $B_H$  na  $r$ -tym poziomie rozdzielczości. Mamy więc:

$$u(x, t_i) \approx \tilde{u}_r^i(x) = a^i + \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{jk}^i H_{jk}(x) \quad i = 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że bezpośrednio z warunku początkowego możemy wyznaczyć funkcję  $\tilde{u}_r^0(x)$ , która będzie aproksymacją funkcji  $g(x)$  przy tym samym poziomie rozdzielczości co poszukiwane przybliżenia.

Przyjmijmy ponadto, że nieznaną funkcję  $\phi(t) = u(1, t)$  będziemy poszukiwali w postaci sumy:

$$\phi(t) \approx \tilde{u}_b(t) = \sum_{k=0}^p a_k v_k(t), \quad p < m,$$

gdzie  $v_k(t)$ ,  $k = 0, \dots, p$  są ustalonymi funkcjami bazowymi. Uwzględniając nałożone powyżej założenia, skupimy się na wyeliminowaniu z układu równań (2) pochodnych cząstkowych oraz na uwzględnieniu danego warunku początkowego, warunku brzegowego i danych wartości  $u^\varepsilon(x_0, \tau_j)$  funkcji  $u(x, t)$ .

W tym celu, w pierwszej kolejności całkujemy równania układu (2) (z wyjątkiem pierwszego) względem zmiennej  $x$ . Stąd dostajemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t_i) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_i) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(s, t_i) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Całkując ponownie ostatnie równania względem zmiennej  $x$  w przedziale  $[x, 1]$  otrzymujemy:

$$\phi(t_i) - u(x, t_i) - (1-x) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_i) = \iint_{x_0}^z \frac{\partial u}{\partial t}(s, t_i) ds dz, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aby wyeliminować występujące w powyższych równaniach pochodne cząstkowe względem czasu ( $\frac{\partial u}{\partial t}$ ), aproksymujemy te pochodne ilorazem różnicowym wstecznym

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_i) \approx \frac{u(x, t_i) - u(x, t_{i-1})}{h}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Tym samym rozważane równania przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \phi(t_i) - u(x, t_i) - (1-x) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_i) &= \\ &= \frac{1}{h} \iint_{x_0}^z (u(s, t_i) - u(s, t_{i-1})) ds dz, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Wstawiając do powyższych równań w miejsce funkcji  $u(x, t_i)$  poszukiwane przybliżenia  $\tilde{u}_r^i(x)$  oraz uwzględniając warunek brzegowy, w którym

w miejsce funkcji  $\phi(t)$  podstawiamy poszukiwane przybliżenie  $\tilde{u}_b(t)$ , otrzymujemy:

$$\tilde{u}_b(t_i) - \tilde{u}_r^i(x) - f(t)(1-x) = \frac{1}{h} \iint_{x_0}^{1-z} (\tilde{u}_r^i(s) - \tilde{u}_r^{i-1}(s)) ds dz, \quad i = 1, \dots, n.$$

Rozważając każde z powyższych równań w punktach  $x_j = (j-0.5)/2^{r+1}$ ,  $j = 1, \dots, 2^{r+1}$  (punkt  $x_j$  jest środkiem przedziału  $[j2^{-(r+1)}, (j+1)2^{-(r+1)}]$ , na którym poszukiwane funkcje są stałe), otrzymujemy układ  $n \times 2^{r+1}$  równań liniowych, w którym niewiadomymi są współczynniki poszukiwanych funkcji:  $\tilde{u}_r^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  i  $\tilde{u}_b$ . Oznacza to, że otrzymany w ten sposób układ równań liniowych będzie miał  $n \times 2^{r+1} + p + 1$  niewiadomych.

Ponieważ chcemy, żeby poszukiwane funkcje  $\tilde{u}_r^i(x)$  przyjmowały w punktach  $(x_0, \tau_j)$  dane wartości  $u^\epsilon(x_0, \tau_j)$ , to do ostatniego układu równań liniowych dołączymy  $m$  dodatkowych równań postaci:

$$\tilde{u}_r^{l_j}(x_0) = u^\epsilon(x_0, \tau_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

gdzie  $l_j$  jest indeksem dyskretnej wartości zmiennej  $t$  odpowiadającej wartości  $\tau_j$  ( $t_{l_j} = \tau_j$ ).

W ten sposób otrzymamy  $n2^{r+1} + m$  równań liniowych o  $n2^{r+1} + p + 1$  niewiadomych. Jest to układ nadokreślony, który rozwiązujemy jedną z metod numerycznych właściwych dla tego rodzaju zagadnień. W ten sposób otrzymujemy nieznanne współczynniki poszukiwanych funkcji  $\tilde{u}_r^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  oraz funkcji  $\tilde{u}_b(t)$  reprezentujących rozwiązanie  $u(x, t)$  i funkcję  $\phi(t)$ .

Zaproponowaną metodę rozwiązywania zagadnienia odwrotnego dla warunku pierwszego rodzaju można rozszerzyć na dwa pozostałe warunki.

Najpierw skupimy się na wyznaczeniu funkcji  $q(t)$  opisującej warunek drugiego rodzaju. Funkcję  $q(t)$  będziemy poszukiwali w postaci sumy:

$$q(t) \approx \tilde{q}_b(t) = \sum_{k=0}^{p'} a'_k v'_k(t), \quad p' < m,$$

gdzie  $v'_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p'$  są ustalonymi funkcjami bazowymi, a  $m$  jest liczbą punktów próbnych. Chcemy, żeby poszukiwane przybliżenie  $\tilde{q}_b(t)$  spełniało warunek zgodności, przez co rozumiemy:

$$\tilde{q}_b(0) = g'(1^-),$$

gdzie:  $g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x)$ . Stąd mamy, że  $a'_0 = g'(1^-)$ . Zauważmy, że równania układu (3) określone są dla  $x \in [0, 1]$ . W szczególności, dla  $x = 1$ , otrzymujemy układ równań:

$$q(t_i) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_i) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(s, t_i) ds, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

w którym występują interesujące nas wartości  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t)$  pochodnej  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ . W celu wyeliminowania występujących w równaniach powyższego układu równań pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial u}{\partial t}$  aproksymujemy je ilorazem różnicowym wstecznym (por. (4)), a tym samym otrzymujemy:

$$q(t_i) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_i) = \frac{1}{h} \int_0^1 (u(s, t_i) - u(s, t_{i-1})) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Gdy zastąpimy występujące w równaniach powyższego układu funkcje  $u(x, t_i)$ , ich przybliżeniami  $\tilde{u}_r^i(x)$  oraz wartości pochodnej cząstkowej  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t_i)$  ich poszukiwanym przybliżeniem  $\tilde{q}_b(t_i)$ , dostajemy:

$$\tilde{q}_b(t_i) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_i) + \frac{1}{h} \int_0^1 (\tilde{u}_r^i(s) - \tilde{u}_r^{i-1}(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Powyższy układ równań jest liniowy ze względu na występujące w nim nieznanne współczynniki  $a'_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p'$  poszukiwanego przybliżenia. Jest to układ nadokreślony, który, podobnie jak wcześniej, rozwiązujemy właściwą dla tego typu zagadnień metodą.

Funkcję  $\alpha(t)$  odtworzymy w postaci sumy, podobnie jak funkcję  $q(t)$ :

$$\alpha(t) \approx \tilde{\alpha}_b(t) = \sum_{k=0}^{p''} a''_k v''_k(t), \quad p'' < m,$$

gdzie  $v_k''(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p''$  są ustalonymi funkcjami bazowymi, a  $m$  oznacza liczbę punktów pomiarowych. Z warunków zgodności mamy:

$$\tilde{\alpha}_b(0) = \frac{g'(0^-)}{f(1)},$$

co pociąga za sobą, że  $a_0'' = \frac{g'(0^-)}{f(1)}$ .

Rozważając równanie:

$$\bar{q}_b(t) = \tilde{\alpha}_b(t)\bar{u}_b(t),$$

na zdyskretyzowanym zbiorze wartości  $t = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  otrzymujemy nadokreślony układ równań liniowych o niewiadomych  $a_k''$ ,  $k = 1, 2, \dots, p''$ , który rozwiązujemy podobnie jak poprzednie układy równań.

### 3. Przykład obliczeniowy

Dane jest równanie Fouriera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, 1)^2, \quad (7)$$

z warunkiem brzegowym:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 10, \quad t \in [0, 1],$$

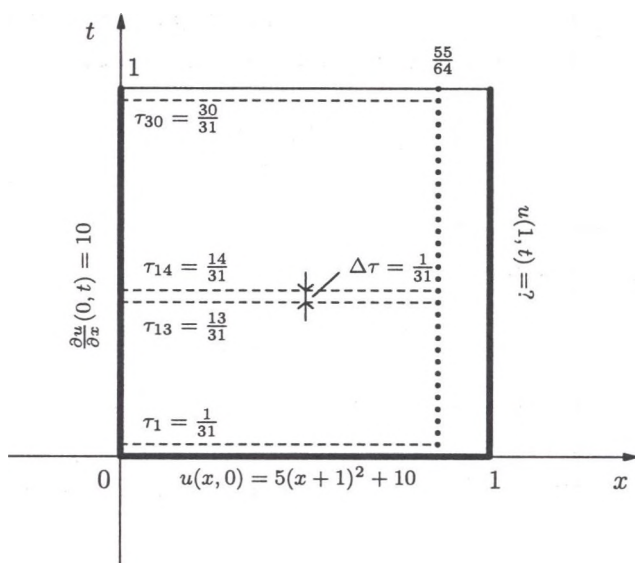
i warunkiem początkowym:

$$u(x, 0) = 5(x + 1)^2 + 10, \quad x \in (0, 1),$$

oraz dodatkowo z danymi (por. rys. 2):

a) dokładnymi wartościami  $u^0(x, t)$  funkcji  $u(x, t)$  w wybranych punktach  $(55/64, j/31)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 31$  (31 pomiarów wykonanych w punkcie  $x_0 = 55/64$  z krokiem  $\Delta\tau = 1/31$ ),

b) zakłóconymi (maksymalny błąd 1%) wartościami  $u^1(x, t)$  funkcji  $u(x, t)$  w punktach  $(55/64, i/31)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 31$  (31 pomiarów wykonanych dla  $x_0 = 55/64$  z krokiem  $\Delta\tau = 1/31$ ),



Rys. 2. Ilustracja przedstawionego powyżej zagadnienia

Fig. 2. Model of considered example

c) zakłóconymi (maksymalny błąd 2%) wartościami  $u^2(x, t)$  funkcji  $u(x, t)$  w punktach  $(55/64, i/31)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 31$  (31 pomiarów wykonanych dla  $x_0 = 55/64$  z krokiem  $\Delta\tau = 1/31$ ).

Ze względu na brak informacji dotyczącej zachowania się funkcji  $u(x, t)$  na prawym brzegu ( $x = 1$ ), określone powyżej zagadnienie jest brzegowym zagadnieniem odwrotnym, gdzie naszym zadaniem będzie wyznaczenie, oprócz funkcji  $u(x, t)$ , również funkcji generującej warunek brzegowy dla  $x = 1$ . W tym przykładzie odtworzymy warunki brzegowe pierwszego, drugiego oraz trzeciego rodzaju, to znaczy interesuje nas wyznaczenie funkcji  $\phi(t)$ ,  $q(t)$  oraz  $\alpha(t)$  występujących w tych warunkach. Oczywiście, my skądinąd znamy dokładne rozwiązanie tego zagadnienia, którym przy danych niezakłóconych jest funkcja stanu  $u(x, t) = 5(x+1)^2 + 10t + 10$ , a to oznacza, że odtwarzane funkcje występujące w warunkach brzegowych mają postać  $\phi(t) = 10t + 30$ ,  $q(t) = 20$ ,  $\alpha(t) = \frac{20}{10t+30}$ .

Brak informacji na temat, jak zachowuje się obiekt na prawym brzegu, zrekompensovany jest wartościami funkcji  $u(x, t)$  w punkcie  $x_0 = 55/64$ .



Zagadnienie to zostało sformułowane, jak wiemy, z trzema wariantami danych  $u^0$ ,  $u^1$  i  $u^2$ . Pierwszy wariant to dane dokładne, natomiast drugi i trzeci to dane zakłócone błędem 1% oraz 2%, wygenerowane na bazie rozwiązania dokładnego.

Wszystkie obliczenia zaprezentowane poniżej wykonane zostały w środowisku platformy programistycznej Mathematica [1].

*Rozwiązanie.* Postępując zgodnie z opisanym w rozdziale 2. algorytmem, w pierwszym kroku musimy zdyskretyzować obszar  $(0, 1) \times (0, 1)$  względem zmiennej  $t$ . Stąd rozważymy tylko wartości zmiennej

$$t \in \{t_i : t_i = i/31, i = 0, 1, \dots, 31\}.$$

Zauważmy, że dyskretyzacja zmiennej  $t$  była wykonana tak, aby do zbioru zdyskretyzowanych wartości zmiennej  $t$  należały wszystkie chwile czasowe  $\tau_j = j/31$ ,  $j = 1, 2, \dots, 31$ , w których mamy zadane wartości odpowiednio  $u^0$ ,  $u^1$  i  $u^2$ .

W rozważanym przykładzie przyjmujemy, że przybliżonego rozwiązania szukamy dla czwartego poziomu rozdzielczości. Oznacza to, że dla każdej zdyskretyzowanej wartości  $t = i/31$ , funkcji  $u(x, t_i)$  poszukujemy w postaci sumy:

$$u(x, t_i) \approx \tilde{u}_4^i(x) = a^i + \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{jk}^i H_{jk}(x) \quad i = 0, \dots, 31.$$

Ponadto przyjmujemy, że interesującą nas w tym przykładzie, nieznaną na prawym brzegu funkcję  $\phi(t)$  będziemy poszukiwali w postaci funkcji wielomianowej trzeciego stopnia:

$$\phi(t) \approx \tilde{u}_b(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0.$$

Nietrudno zauważyć, że w tym przypadku przyjęliśmy następujące funkcje bazowe:

$$v_0(t) = 1, \quad v_1(t) = t, \quad v_2(t) = t^2, \quad v_3(t) = t^3.$$

Realizując proces obliczeniowy, zgodnie z opisaną wcześniej metodyką postępowania, otrzymujemy układ równań:

$$\tilde{u}_b(t_i) - \tilde{u}_4^i(x) - 10(1-x) = \frac{1}{h} \int_0^z (\tilde{u}_4^i(s) - \tilde{u}_4^{i-1}(s)) ds dz, \quad i = 1, \dots, 32,$$

gdzie  $\tilde{u}_4^0$  jest aproksymacją funkcji  $u(x, 0) = 5(x+1)^2 + 10$  na czwartym poziomie rozdzielczości. Teraz otrzymany układ równań rozważamy w punktach  $x_i = (i - 0.5)/32$ ,  $i = 1, \dots, 32$  ( $x_i$  są środkami przedziałów  $[(i-1)/32, i/32)$ , na których poszukiwane funkcje są stałe). W ten sposób otrzymujemy układ  $31 \times 32$  równań liniowych, w którym niewiadomymi są współczynniki poszukiwanych funkcji:  $\tilde{u}_r^i$ ,  $i = 1, \dots, 31$  i  $\tilde{u}_b$ . Oznacza to, że ostatni układ jest zależny od  $31 \times 32 + 4$  niewiadomych.

Do tak otrzymanego układu równań dołączamy dodatkowe równania postaci:

$$\tilde{u}_4^i(55/64) = u^0(55/64, i/31), \quad i = 1, 2, \dots, 31,$$

dla wariantu z danymi dokładnymi, lub

$$\tilde{u}_4^i(55/64) = u^1(55/64, i/31), \quad i = 1, 2, \dots, 31,$$

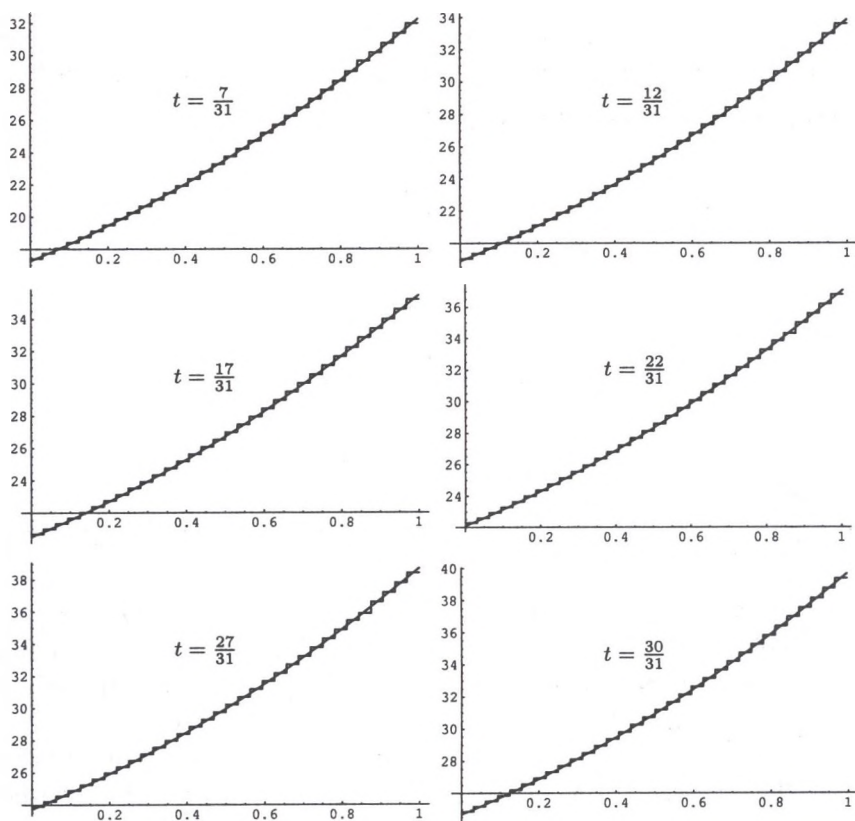
dla wariantu z danymi zakłóconymi błędem 1% albo

$$\tilde{u}_4^i(55/64) = u^2(55/64, i/31), \quad i = 1, 2, \dots, 31,$$

dla ostatniego wariantu, z danymi zakłóconymi błędem 2%.

W ten sposób dla wszystkich trzech wariantów danych otrzymamy układ 1022 równań liniowych zależnych od 996 niewiadomych. Jest to układ nadokreślony, który w tym przykładzie rozwiązujemy metodą najmniejszych kwadratów.

Rysunek 3 przedstawia otrzymane w wyniku procesu obliczeniowego poszukiwane przybliżenia  $\tilde{u}_r^i(t)$  funkcji  $u(x, t)$  dla wariantu z danymi zakłóconymi  $u^1$ , w wybranych przekrojach  $t_i$ ,  $i = 7, 12, 17, 22, 27, 30$ . Rysunki 4, 6 i 8 przedstawiają wykresy funkcji  $\phi(t)$  oraz jej przybliżenia  $\tilde{u}_b(t)$  dla wszystkich trzech przypadków danych wejściowych. Natomiast rysunki 5, 7 i 9 prezentują funkcje błędów  $\delta(t) = \left| \frac{\phi(t) - \tilde{u}_b(t)}{\phi(t)} \right| 100\%$ , z jakimi odtworzona jest funkcja  $\phi(t)$  odpowiednio dla wszystkich przypadków danych wejściowych.



Rys. 3. Dokładne  $u(x, t_i)$  (linia ciągła) oraz przybliżone  $\tilde{u}_r^i(x)$  (linia schodkowa) wartości funkcji  $u(x, t)$  w wybranych chwilach  $t_i$ ,  $i = 7, 12, 17, 22, 27, 30$  dla zagadnienia z danymi zakłóconymi  $u^1$

Fig. 3. The precise (continuous line) and approximated (step function) values of the function  $u(x, t)$  at moments  $t_i$ ,  $i = 7, 12, 17, 22, 27, 30$  for the problem with data  $u^1$

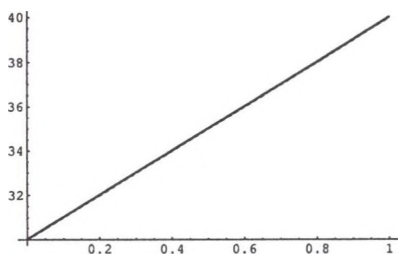
Teraz wykorzystując otrzymane już wyniki wyznaczmy funkcje opisujące warunki brzegowe drugiego oraz trzeciego rodzaju:  $q(t)$  i  $\alpha(t)$ .

W rozważanym przez nas przykładzie poszukiwaną funkcję  $q(t)$  aproksymujemy wielomianem trzeciego stopnia:

$$q(t) \approx \tilde{q}_b(t) = a'_0 + a'_1 t + a'_2 t^2 + a'_3 t^3.$$

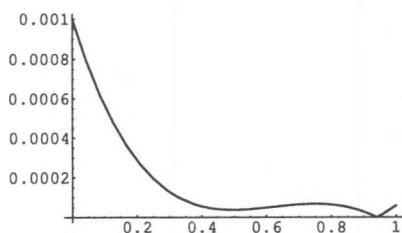
Chcemy, żeby nasze poszukiwane przybliżenie spełniało warunek zgodności  $\tilde{q}_b(0) = g'(1^-)$ . Stąd otrzymujemy, że  $a'_0 = 20$ . Układ równań (6) dla interesującego nas przykładu ma postać:

$$\tilde{q}_b(i/31) = \frac{1}{31} \int_0^1 (\tilde{u}_r^i(s) - \tilde{u}_r^{i-1}(s)) ds, \quad i = 1, \dots, 31.$$



Rys. 4. Wykresy funkcji dokładnej  $\phi(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{u}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^0$

Fig. 4. The precise  $\phi(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{u}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^0$



Rys. 5. Funkcja błędu  $\delta(t)$ , z jakimi odtworzona jest funkcja  $\phi(t)$  przy danych dokładnych  $u^0$

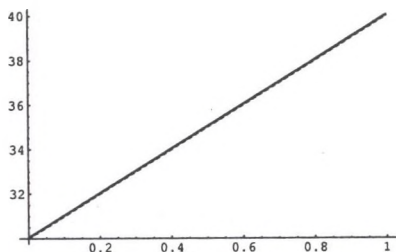
Fig. 5. The distribution of the error  $\delta(t)$  for data without noise

Powyższy układ jest zależny od nieznanymi współczynników  $a'_1, a'_2, a'_3$  poszukiwanej funkcji  $\tilde{q}_b(t)$ . Jak łatwo zauważyć, jest to układ nadokreślony, który rozwiązujemy metodą najmniejszych kwadratów.

Zestawienie dokładnych wartości funkcji  $q(t)$  oraz przybliżonych  $\tilde{q}_b(t)$  dla wszystkich trzech wariantów danych, jak również funkcje błędów wyznaczonych przybliżeń ( $\delta'(t) = \left| \frac{\tilde{q}_b(t) - q(t)}{q(t)} \right| 100\%$ ), ilustrują rysunki odpowiednio 10, 12 i 14 oraz 11, 13 i 15.

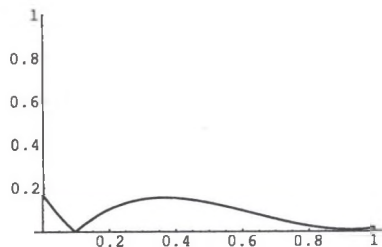
W interesującym nas przykładzie funkcję  $\alpha(t)$ , opisującą warunek trzeciego rodzaju, będziemy poszukiwali w postaci wielomianu trzeciego stopnia, podobnie jak funkcję  $q(t)$ :

$$\alpha(t) \approx \tilde{\alpha}_b(t) = a''_0 + a''_1 t + a''_2 t^2 + a''_3 t^3.$$



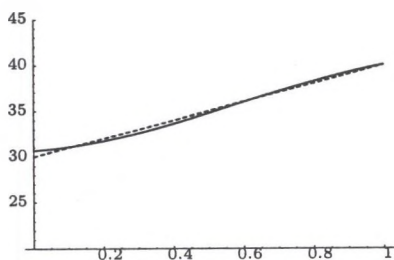
Rys. 6. Wykresy funkcji dokładnej  $\phi(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{u}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^1$

Fig. 6. The precise  $\phi(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{u}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^1$



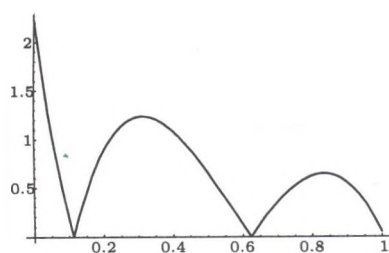
Rys. 7. Funkcja błędnej  $\delta(t)$ , z jakimi odtworzona jest funkcja  $\phi(t)$  przy danych  $u^1$

Fig. 7. The distribution of the error  $\delta(t)$  for data  $u^1$



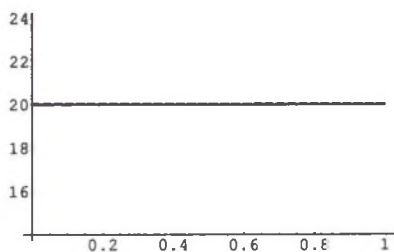
Rys. 8. Wykresy funkcji dokładnej  $\phi(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{u}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^2$

Fig. 8. The precise  $\phi(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{u}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^2$



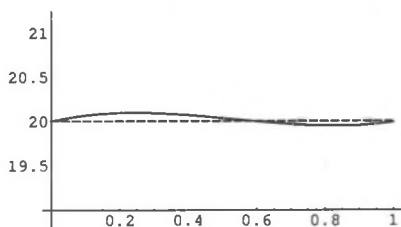
Rys. 9. Funkcja błędnej  $\delta(t)$ , z jakimi odtworzona jest funkcja  $\phi(t)$  przy danych  $u^2$

Fig. 9. The distribution of the error  $\delta(t)$  for data  $u^2$



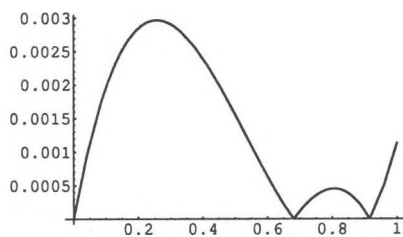
Rys. 10. Wykresy funkcji dokładnej  $q(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{q}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^0$

Fig. 10. The precise  $q(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{q}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^0$



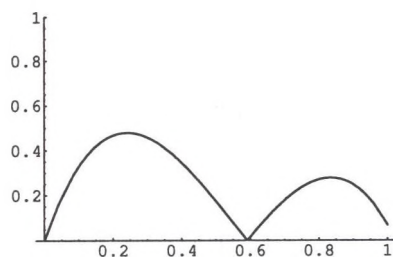
Rys. 12. Wykresy funkcji dokładnej  $q(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{q}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^1$

Fig. 12. The precise  $q(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{q}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^1$



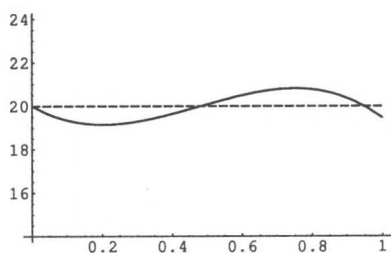
Rys. 11. Funkcja błędu  $\delta'(t)$ , z jakim odtworzona jest funkcja  $q(t)$  przy danych dokładnych  $u^0$

Fig. 11. The distribution of the error  $\delta'(t)$  for data  $u^0$



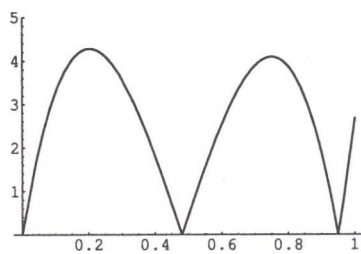
Rys. 13. Funkcja błędu  $\delta'(t)$ , z jakim odtworzona jest funkcja  $q(t)$  przy danych zakłóconych  $u^1$

Fig. 13. The distribution of the error  $\delta'(t)$  for data  $u^1$



Rys. 14. Wykresy funkcji dokładnej  $q(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{q}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^2$

Fig. 14. The precise  $q(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{q}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^2$



Rys. 15. Funkcja błędowa  $\delta'(t)$ , z jakimi odtworzona jest funkcja  $q(t)$  przy danych zakłóconych  $u^2$

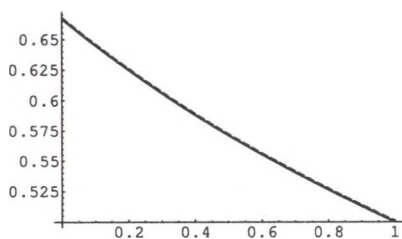
Fig. 15. The distribution of the error  $\delta'(t)$  for data  $u^2$

Warunek zgodności dla poszukiwanego przybliżenia ma postać:  $\tilde{\alpha}_b(0) = \frac{q'(0^-)}{f(1)}$ . Stąd dostajemy  $\alpha_0'' = 2/3$ . Do wyznaczenia funkcji  $\tilde{\alpha}_b(t)$  wykorzystamy otrzymane już przybliżenia  $\tilde{u}_b(t)$  oraz  $\tilde{q}_b(t)$ . Wstawiając te funkcje, jak również poszukiwane przybliżenie  $\tilde{\alpha}_b(t)$ , do równania opisującego warunek brzegowy trzeciego rodzaju, a następnie rozważając tak otrzymane równanie na zdyskretyzowanym zbiorze wartości zmiennej  $t$  otrzymujemy układ równań:

$$\tilde{q}_b(t_i) = \tilde{\alpha}_b(t_i)\tilde{u}_b(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, 31.$$

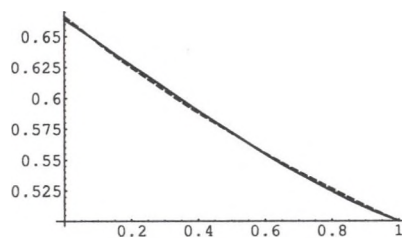
Jest to układ nadokreślony, który rozwiązujemy metodą najmniejszych kwadratów.

Zestawienie dokładnych wartości funkcji  $\alpha(t)$  z ich przybliżonymi wartościami  $\tilde{\alpha}_b(t)$ , jak również funkcje błędów  $(\delta''t) = \left| \frac{\tilde{\alpha}_b(t) - \alpha(t)}{\alpha(t)} \right|$  przedstawiają odpowiednio rysunki 16, 18 i 20 oraz 17, 19 i 21.



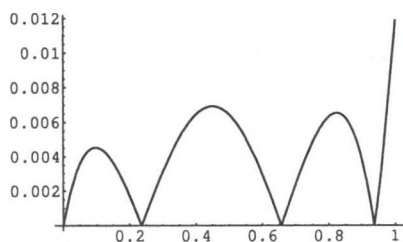
Rys. 16. Wykresy funkcji dokładnej  $\alpha(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{\alpha}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^0$

Fig. 16. The precise  $\alpha(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{\alpha}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^0$



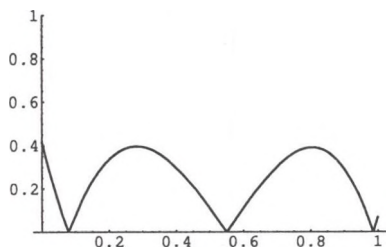
Rys. 18. Wykresy funkcji dokładnej  $\alpha(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{\alpha}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^1$

Fig. 18. The precise  $\alpha(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{\alpha}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^1$



Rys. 17. Funkcja błędu  $\delta''(t)$ , z jakim odtworzona jest funkcja  $\alpha(t)$  przy danych dokładnych  $u^0$

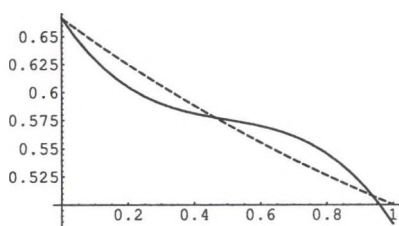
Fig. 17. The distribution of the error  $\delta''(t)$  for data  $u^0$



Rys. 19. Funkcja błędu  $\delta''(t)$ , z jakim odtworzona jest funkcja  $\alpha(t)$  przy danych zakłóconych  $u^1$

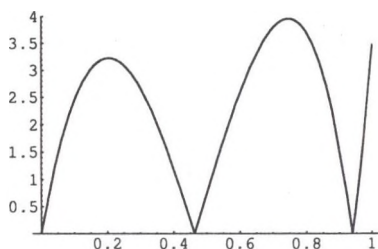
Fig. 19. The distribution of the error  $\delta''(t)$  for data  $u^1$





Rys. 20. Wykresy funkcji dokładnej  $\alpha(t)$  (linia przerywana) i przybliżonej  $\tilde{\alpha}_b(t)$  (linia ciągła) dla zadania z danymi  $u^2$ .

Fig. 20. The precise  $\alpha(t)$  (dashed line) and approximated  $\tilde{\alpha}_b(t)$  (continuous line) functions for data  $u^2$ .



Rys. 21. Funkcja błędnej  $\delta''(t)$ , z jakimi odtworzona jest funkcja  $\alpha(t)$  przy danych zakłóconych  $u^2$ .

Fig. 21. The distribution of the error  $\delta''(t)$  for data  $u^2$ .

## 4. Podsumowanie

Podsumowując otrzymane dla rozważanego przykładu wyniki, należy podkreślić, że dokładne dane wejściowe  $u^0$  dają niemalże dokładne wyniki, których błąd nie przekracza 0.01%. Ponadto rozważając zadanie z danymi zakłóconymi otrzymujemy wyniki, które zawierają błąd na podobnym poziomie co dane wejściowe  $u^1, u^2$ . Obydwa te fakty są bardzo ważne w rozwiązywaniu zadań odwrotnych.

Prowadząc liczne badania, dla różnych przykładów zadań odpowiadających określonymu w rozdziale 1. modelowi, należy podkreślić, że w zadaniach z danymi dokładnymi otrzymane wyniki były niemalże równe rozwiązaniom dokładnym. Natomiast w zadaniach z danymi zakłóconymi wpływ na dokładność otrzymanych wyników miała przede wszystkim liczba punktów próbnych, jak również lokalizacja punktu pomiarowego  $x_0$ . Na podstawie przeprowadzonych badań można zauważyć, że zwiększenie liczby punktów próbnych oraz „zbliżenie” punktu  $x_0$  do brzegu, na którym nie znamy

warunku brzegowego (w tym przypadku do prawego brzegu) rozważanego obiektu, poprawia otrzymane wyniki.

## Literatura

1. G. Drwal, R. Grzymkowski, A. Kapusta, D. Słota, *Mathematica 4*, WPKJS, Gliwice 2000.
2. R. Grzymkowski, A. Zielonka, *Solving one dimensional IHCP by applying Haar's system*, Proc. of the microCAD 2004 – International Scientific Conference, University of Miskolc, Miskolc 2004, 129–134.
3. P. Wojtaszczyk, *Teoria falek*, PWN, Warszawa 2000.

*Adam Zielonka*  
*Instytut Matematyki*  
*Politechnika Śląska*  
*Kaszubska 23*  
*44-100 Gliwice*

## Abstract

The numerical method of the inverse problem for the equation of unstable diffusion is presented in this paper. This method is based on Haar's system. The solution of the inverse problem is found as an approximation of expansion of searched function for Haara's system. The numerical example of inverse problem is presented in this work.