STUDIA INFORMATICA 2003
Volume 24 Number 3 (55)

Jerzy KLAMKA, Sławomir BUGAJSKI
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej PAN

DWUOSOBOWA GRA KWANTOWA[1]

Streszczenie. W ostatnim czasie wykazano, że zastosowanie pewnych wybranych metod mechaniki kwantowej może znacznie przyspieszyć niektóre czasochłonne obliczenia. Teoretycznie, obliczenia kwantowe mogą być przeprowadzane znacznie szybciej niż metodami klasycznymi, czego przykładem jest teoria gier. W artykule przedstawiono definicję statycznej dwuosobowej gry kwantowej oraz przedyskutowano jej podstawowe własności. Pokazano, między innymi, że statyczna dwuosobowa gra kwantowa jest reprezentowana przez wektor o współrzędnych zespolonych określony w iloczynie tensorowym dwóch przestrzeni stanów kwantowych. Ponadto przedstawiono uwagi i komentarze dotyczące zagadnień gier kwantowych.

Słowa kluczowe: gra kwantowa, gra dwuosobowa, gra statyczna.

TWO-PERSON QUANTUM GAME

Summary. Recently, it was realized that use of the properties of quantum mechanics might speed up certain computations. It now appears that, at least theoretically, quantum computations may be much faster than classical computations for solving certain problems including for example game theory. In the present paper static two-person quantum game is defined and discussed. It is shown, that two-person static quantum game is described by a complex vector defined in the tensor product of two quantum state spaces. Moreover, remarks and comments concerning quantum games are also given.

Keywords: quantum game, two-person game, static game.

[1] Praca wykonana w ramach grantu KBN nr 7 T11C 017 21

1. Wprowadzenie

Teoria gier jest ważnym działem matematycznej teorii sterowania optymalnego, mającym liczne zastosowania w różnych, często odległych od siebie, dziedzinach nauki i techniki [3]. Przykładowo teoria gier wykorzystywana jest do rozwiązywania różnorodnych zagadnień z dziedziny ekonomii, biologii, ekologii oraz psychologii. Klasyczna matematyczna teoria gier rozwijana jest od wielu lat, a literatura dotycząca tego zagadnienia w postaci monografii oraz artykułów naukowych jest wyjątkowo bogata [3], [4].

W ostatnim okresie w związku z rozwojem informatyki kwantowej pojawiły się prace dotyczące opisu matematycznego statycznych gier kwantowych [3], [4]. W przypadku dwuosobowej statycznej gry kwantowej dwaj gracze oznaczeni literami A oraz B wykorzystując podstawowe operacje kwantowe określone na pojedynczych qubitach zmieniają stan kwantowy przyporządkowanych im pojedynczych qubitów w celu maksymalizacji odpowiednio zdefiniowanych wskaźników jakości gry. W każdej chwili stan gry kwantowej jest stanem kwantowym układu złożonego z dwóch qubitów [1], [2]. Zakłada się, że obaj gracze znają zbiór strategii dopuszczalnych przeciwnika, natomiast nie znają aktualnie wybranej przez niego strategii.

W opisie matematycznym statycznej gry kwantowej wykorzystuje się oznaczenia i pojęcia związane bezpośrednio z mechaniką kwantową oraz rachunkiem macierzowym, a w szczególności z macierzami unitarnymi o elementach zespolonych. Pokazano, między innymi, że statyczna dwuosobowa gra kwantowa jest reprezentowana przez 4-wymiarowy wektor o współrzędnych zespolonych, określony w iloczynie tensorowym dwóch przestrzeni stanów kwantowych [1], [2].

2. Matematyczny model dwuosobowej gry kwantowej

Najprostsza statyczną grą jest tak zwana gra dwuosobowa, to znaczy gra prowadzona jedynie z udziałem dwóch graczy. Na podstawie rezultatów zaczerpniętych z ogólnej teorii gier statycznych można zdefiniować statyczną dwuosobową grę kwantową [3], [4].

Dwuosobowa statyczna gra kwantowa $\Gamma=(H,w_0,S_A,S_B,P_A,P_B)$ jest zdefiniowana przez podanie zespolonej przestrzeni Hilberta H, będącej przestrzenią stanów fizycznego układu kwantowego, stanu początkowego $w_0 \in H$, zbiorów strategii dopuszczalnych S_A, S_B oraz wskaźników jakości gry P_A, P_B.

W przypadku dwuosobowej gry kwantowej dwa qubity są ustawiane w stanach początkowych, a następnie przesyłane do dwóch graczy, którzy mają możliwość fizycznego oddziaływania na przypisane im qubity. Ponadto dla każdego z graczy definiuje się wskaźniki jakości określające wygraną lub przegraną danego gracza. Przestrzenią stanów H dwuosobowej gry kwantowej jest iloczyn tensorowy przestrzeni stanów kwantowych dla poszczególnych qubitów, to znaczy $H=H_A \otimes H_B=C^2 \otimes C^2$ [1], [2].

W przypadku gier kwantowych zakłada się, że dopuszczalne strategie kwantowe $s_A \in S_A$ oraz $s_B \in S_B$ są operacjami kwantowymi działającymi odpowiednio w przestrzeniach kwantowych H_A oraz H_B. Zatem zbiory strategii dopuszczalnych S_A oraz S_B mogą być identyfikowane z odpowiednio wybranymi podzbiorami macierzy 2×2-wymiarowych. Gracze A oraz B mogą stosować odpowiednie strategie kwantowe s_A oraz s_B jedynie w odniesieniu do swoich qubitów. Ponadto, zakłada się, że gracze A oraz B znają zbiory strategii dopuszczalnych S_A oraz S_B, natomiast nie znają aktualnie wybranych strategii drugiego gracza.

Jednoczesne zastosowanie dopuszczalnych strategii kwantowych $s_A \in S_A$ oraz $s_B \in S_B$ określa w sposób jednoznaczny odwzorowanie w 4-wymiarowej przestrzeni stanów kwantowych H postaci następującej

$$s_A \otimes s_B \colon H \to H,$$

które przeprowadza układ kwantowy ze stanu początkowego w_0 do stanu końcowego

$$w_f = (s_A \otimes s_B) w_0.$$

Wskaźniki jakości gry kwantowej związane są bezpośrednio z pomiarem końcowego stanu kwantowego w_f. Zakłada się, że wskaźniki jakości gry dla obu graczy, to znaczy wypłaty w grze, są formami kwadratowymi odpowiednio postaci:

$$P_A(w_f) = P_A(s_A \otimes s_B) = w_f^T Q_A w_f ,$$

$$P_B(w_f) = P_B(s_A \otimes s_B) = w_f^T Q_B w_f ,$$

gdzie Q_A oraz Q_B są 4×4-wymiarowymi macierzami hermitowskim, to znaczy macierzami samosprzężonymi o elementach zespolonych, natomiast symbol T oznacza transpozycję wektora stanu.

Należy wyraźnie podkreślić, że wypłata dla danego gracza zależy nie tylko od wybranej przez niego strategii dopuszczalnej, lecz również od strategii drugiego gracza.

W przypadku statycznych gier kwantowych szczególne znaczenie mają tak zwane unitarne strategie dopuszczalne, które są reprezentowane 2×2-wymiarowymi unitarnymi macierzami U_A oraz U_B. W tym przypadku stan końcowy statycznej gry kwantowej $w_f \in H$ jest dany następującym wzorem:

$$w_f = (U_A \otimes U_B) w_0 .$$

Specyfikując oraz odpowiednio parametryzując zbiór strategii dopuszczalnych, rozpatruje. się pewne proste przypadki szczególne statycznych dwuosobowych gier kwantowych, a mianowicie:

- statyczne gry kwantowe o dwuparametrowym zbiorze strategii dopuszczalnych,
- statyczne gry kwantowe o jednoparametrowym zbiorze strategii dopuszczalnych.

3. Dwuparametrowy zbiór strategii

Rozpatrzmy specjalny rodzaj dwuosobowej gry kwantowej, a mianowicie przypadek, gdy strategie dopuszczalne oraz wskaźniki jakości dla obu graczy są jednakowe, tzn. $S_A=S_B=S$, oraz $P_A=P_B=P$.

W tym przypadku formalnie gra kwantowa jest postaci $\Gamma=(C^2\otimes C^2,w_0,S,S,P,P)$. Ograniczając się do unitarnych strategii dopuszczalnych, można zbiór strategii dopuszczalnych przedstawić w postaci 2-parametrowego zbioru 2×2-wymiarowych macierzy unitarnych $U(\theta,\phi)$ postaci:

$$U(\theta,\phi)=\begin{bmatrix} e^{i\phi}\cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & e^{-i\phi}\cos(\theta/2) \end{bmatrix},$$

gdzie kąty $\theta\in[0,\pi]$, $\phi\in[0,\pi/2]$.

W przypadku dwuparametrowej gry kwantowej zakłada się, że wskaźniki jakości gry dla obu graczy, to znaczy wypłaty w grze, są takiej samej postaci jak w przypadku ogólnej dwuosobowej gry kwantowej.

4. Jednoparametrowy zbiór strategii

Rozpatrzmy specjalny rodzaj dwuosobowej gry kwantowej, a mianowicie przypadek, gdy strategie dopuszczalne dla obu graczy są reprezentowane obrotami wokół początku układu współrzędnych. W tym przypadku mamy $\phi=0$, a zatem jednoparametrowy zbiór strategii dopuszczalnych zależy wyłącznie od kąta $\theta\in[0,\pi]$ i jest reprezentowany macierzami unitarnymi postaci;

$$U(\theta)=\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}.$$

Przykładowo, tak zwana strategia współpracy reprezentowana jest macierzą unitarną

$$C=U(0,0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zatem powyższa operacja kwantowa związana jest z jednostkową macierzą C, więc nie zmienia ona stanu kwantowego.

Natomiast strategia walki jest reprezentowana macierzą unitarną

$$D=U(\pi,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Strategia ta w oczywisty sposób zmienia stan kwantowy pojedynczego qubitu.

5. Uwagi końcowe

W artykule na podstawie pojęć z dziedziny mechaniki kwantowej oraz algebry macierzowej przedstawiono ogólną matematyczną definicję statycznej dwuosobowej gry kwantowej. Wykorzystując znany z literatury zapis macierzowo-wektorowy zdefiniowano przestrzeń stanów kwantowych dwuosobowej statycznej gry kwantowej, podano postać zbioru strategii dopuszczalnych oraz postacie wskaźników jakości gry kwantowej dla obu graczy.

Specyfikując oraz odpowiednio parametryzując zbiór strategii dopuszczalnych jednakowy dla obu graczy, rozpatrzono dwa interesujące przypadki szczególne, a mianowicie przypadek dwuparametrowego zbioru unitarnych strategii dopuszczalnych oraz jednoparametrowego zbioru unitarnych strategii dopuszczalnych. W obu tych przypadkach 2×2-wymiarowe macierze unitarne reprezentujące dopuszczalne strategie unitarne są wyjątkowo prostej postaci.

Należy również zaznaczyć, że na podstawie wyników znanych w dziedzinie mechaniki kwantowej możliwe jest rozszerzenie przedstawionych w artykule rezultatów na bardziej ogólny przypadek n-osobowych statycznych gier kwantowych, a także na przypadek kwantowych gier różniczkowych. Statyczne n-osobowe gry kwantowe są definiowane w 2^n-wymiarowej przestrzeni kwantowej n-qubitów, zbiory unitarnych strategii dopuszczalnych zawierają $2^n\times2^n$-wymiarowe macierze unitarne [1], [2], a wskaźniki jakości gry dla poszczególnych graczy są formami kwadratowymi reprezentowanymi przez $2^n\times2^n$-wymiarowe macierze hermitowskie.

LITERATURA

1. Bugajski S., Klamka J., Węgrzyn S.: Foundation of quantum computing. Part I, Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, vol.13, no. 1, 2001, pp.97-142.
2. Bugajski S., Klamka J., Węgrzyn S.: Foundation of quantum computing. Part II, Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, vol.14, no. 2, 2002, pp.93-106.
3. Eisert J., Wilkens M., Lewenstein M.: Quantum Games and Quantum Strategies. Physical Review Letters, vol.83, 1999, p.3077.
4. Eisert J., Wilkens M.: Quantum Games. quant-ph/0004076, 2000.

Recenzent: Prof. dr inż. Stefan Węgrzyn

Wpłynęło do Redakcji 12 maja 2003 r.

Abstract

The last decades have seen a steady increase in the theory and application of classical games. Game theory is the theory of decision making in the situations in which two or several players make decisions according to their personal interests. Classical game theory is a well established discipline of applied mathematics, which has found numerous applications in many areas of sciences, e.g., in mathematical control theory, economy, biology, ecology, and psychology.

Quantum games, the new area of research develops quickly and gains broad interest. There are several reasons why quantum games may be interesting. First, it has recently transpired that eavesdropping in quantum-channel communication and optimal cloning can readily be conceived a strategic game between two or more players, the objective being to obtain as much information as possible. Second, in quantum computation it has been demonstrated that certain problems, which are intractable according to classical complexity theory, become solvable using quantum algorithms.

A remarkable number of papers on quantum games study quantum versions of well known classical games, so includes some more or less implicit procedure of extending a particular classical game into its quantum counterpart. A remarkable feature of these quantum versions is that the classical games are faithfully entailed in the quantum games. We attempted to describe in possibly general terms the "quantization procedure" as it emerges from the particular cases met in the recent literature.

In the present paper we restricted considerations to 2-player binary-choice games. In the 2-player games each of the 2-players must independently decide to choose their strategy. Depending on their decision, each player receives a certain pay-off. The objective of each player is to maximize their individual pay-off. Physically, 2-player quantum game is easily implemented by means of a source of 2 qubits, one qubit for each player, a set of physical instruments which enable the player to manipulate a qubit in a strategic manner, and a physical measurement device which determines the player pay-off from the terminal quantum state of the qubits. Moreover, since only fair quantum games are considered therefore, players have full access to a common known strategy space.

Finally, it should be pointed out, that the results given in the present paper can be extended to cover the general case of n-person static quantum games, and generally to

differential quantum games. In order to do that it is enough to consider quantum system containing n-qubits and defined in 2^n-dimensional quantum state space.

Adres

Jerzy KLAMKA: Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej PAN, ul. Bałtycka 5, 44-100 Gliwice, Polska, jklamka@ia.polsl.gliwice.pl