

Alina MOMOT
Politechnika Śląska, Instytut Informatyki

FALKI I ICH ZASTOSOWANIE W PRZETWARZANIU OBRAZÓW

Streszczenie. Artykuł przedstawia podstawowe informacje związane z teorią falek. W artykule wprowadzono pojęcie falki i związanej z nią analizy wielorozdzielczej. Przedstawiony został algorytm wyznaczania dyskretnej transformaty falkowej w przypadku jednowymiarowym i dwuwymiarowym. Praca zawiera również przykłady zastosowań dyskretnej transformaty falkowej w dziedzinie przetwarzania obrazów.

Słowa kluczowe: falka, analiza wielorozdzielcza, przetwarzanie obrazów

WAVELETS WITH APPLICATION TO THE IMAGE PROCESSING

Summary. This paper presents the basic information about the wavelets theory. The idea of wavelet based on multiresolution analysis was introduced. The algorithm of calculating the Discrete Wavelet Transform in single-dimensional as well as two-dimensional cases was presented. The paper contains also the examples of applications of Discrete Wavelet Transform in the area of image processing.

Keywords: wavelet, multiresolution analysis, image processing

1. Teoria falek

1.1. Pojęcie falki

W naukach technicznych często spotykany jest wariant następującego problemu. Dana jest funkcja $f(t)$ określona dla wszystkich $t \in R$, która opisuje pewne rzeczywiste zjawisko i należy przesłać tę funkcję za pomocą jakiegoś urządzenia. Dla uproszczenia można przyjąć, że $f \in L_2(R)$ (przestrzeń funkcji mierzalnych f takich, że $\int_R |f(x)|^2 dx < \infty$) [7]. Funkcja ta zadana jest przez swoje wartości we wszystkich punktach prostej R , a to daje kontinuum

punktów – nie można więc jej zapisać używając „skończonego” urządzenia. Jednak przy założeniu, że istnieje pewna baza ortonormalna $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ w przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$, można daną funkcję przedstawić w postaci zbieżnego w tej przestrzeni szeregu:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n, \quad (1)$$

gdzie współczynniki a_n są określone za pomocą iloczynu skalarnego $a_n = \langle f, f_n \rangle$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Iloczyn ten w przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$ definiowany jest wzorem $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$. Zamiast

więc przekazywać całą funkcję f wystarczy przekazywać ciąg współczynników $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i pozostawić odbiorcy odtworzenie funkcji na podstawie danych mu współczynników. Aby jednak całą sytuację uczynić naprawdę „skończoną”, można wybrać skończony podzbiór

$A \subset \mathbb{N}$ taki, aby suma $\sum_{n \in A} a_n f_n$ była „prawie równa” sumie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n$, a ściślej mówiąc, aby

odległość pomiędzy funkcjami opisanymi przez te dwie sumy była nie większa od pewnej zadanej z góry wartości.

Różne są sposoby postępowania w wielu szczególnych przypadkach tego problemu, a falki stanowią jedno z wielu narzędzi przydatnych w tego typu sytuacjach. Dalej zdefiniowano pojęcie falki w przypadku funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Definicja 1

Falką nazywa się funkcję $\Psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ taką, że układ:

$$\Psi_{j,k} = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k), \quad (2)$$

gdzie j oraz k to dowolne liczby całkowite, jest ortonormalną bazą przestrzeni Hilberta $L_2(\mathbb{R})$.

Zgodnie z tą definicją z każdą falką związany jest pewien układ ortonormalny $\{2^{j/2} \Psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}}$, nazywany bazą falkową. Najprostszym przykładem falki jest falka

Haara, określona na prostej rzeczywistej wzorem:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ -1 & \text{dla } t \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \\ 0 & \text{dla } t \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, 1 \rangle. \end{cases} \quad (3)$$

Dowód twierdzenia, że układ $\{2^{j/2} H(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}}$ stanowi ortonormalną bazę w przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$ jak również przykłady innych falek można znaleźć w [14].

1.2. Konstrukcja falki

1.2.1. Analiza wielorozdzielcza

Konstrukcję falek zaczyna się na ogół od analizy wieloskalowej [6], zwanej również analizą wielorozdzielczą, zdefiniowanej następująco:

Definicja 2

Analizą wieloskalową nazywa się ciąg $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ domkniętych podprzestrzeni $L_2(\mathbb{R})$ spełniających następujące warunki:

- (a) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$,
- (b) $\text{span} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L_2(\mathbb{R})$,
- (c) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
- (d) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$,
- (e) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-m) \in V_0$ dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$,
- (f) istnieje funkcja $\Phi \in V_0$, zwana funkcją skalującą taka, że układ $\{\Phi(t-m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną w V_0 .

Można wykazać, że ciąg przestrzeni $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, gdzie $L_n = \{\text{wszystkie funkcje z } L_2(\mathbb{R}) \text{ stałe na przedziałach postaci } \langle k2^{-n}, (k+1)2^{-n} \rangle \text{ dla } k \in \mathbb{Z}\}$, jest przykładem analizy wieloskalowej. W tym przypadku jako funkcję skalującą można przyjąć funkcję charakterystyczną przedziału $\langle 0,1 \rangle$, czyli $\Phi(t) = 1_{(0,1)}(t)$.

Warto zauważyć, że warunki (a) – (c) w definicji 2 oznaczają, że każda funkcja z $L_2(\mathbb{R})$ może być przybliżona elementami podprzestrzeni V_j i gdy j wzrasta do nieskończoności, dokładność przybliżenia wzrasta. Warunki (d) i (e) wyrażają niezmienniczość układu podprzestrzeni $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ względem przesunięć i diadycznej dylatacji, określonych następująco:

Definicja 3

Dla danej liczby rzeczywistej h określony jest operator przesunięcia T_h , działający na funkcjach określonych na \mathbb{R} , wzorem:

$$T_h(f)(x) = f(x-h). \quad (4)$$

Definicja 4

Dla danej liczby rzeczywistej s określony jest operator diadycznej dylatacji J_s , działający na funkcjach określonych na \mathbb{R} , wzorem:

$$J_s(f)(x) = f(2^s x). \quad (5)$$

Natomiast, dokonując zamiany zmiennych, warunek (f) można przeformułować następująco: dla każdego $j \in Z$ układ $\{2^{j/2}\Phi(2^j t - m)\}_{m \in Z}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni V_j .

Warto zauważyć ponadto, że podana definicja analizy wieloskalowej nie jest „minimalna” w tym sensie, że pewne z warunków (a) – (f) wynikają z pozostałych. Można zauważyć bowiem, że warunek (e) wynika wprost z warunku (f), jak również warunek (c) można wyprowadzić z pozostałych [14].

Na podstawie definicji 4 można przyjąć dwa punkty widzenia na analizę wieloskalową. Można przyjąć podprzestrzenie $\{V_j\}_{j \in Z}$ jako podstawę tak, aby spełniały one warunki (a) – (e) i następnie znaleźć funkcję skalującą spełniającą warunek (f), co zazwyczaj nie jest proste. Można jednak zacząć od funkcji skalującej Φ , określić V_0 jako span $\{\Phi(t - m)\}_{m \in Z}$ i zdefiniować pozostałe podprzestrzenie V_j za pomocą warunku (d), a następnie sprawdzić warunki (a) – (c), gdyż warunek (e) jest spełniony automatycznie. Tak więc funkcja skalująca w pełni określa analizę wieloskalową.

1.2.2. Od funkcji skalującej do falki

Niech będzie dana analiza wieloskalowa $\{V_j\}_{j \in Z}$ w $L_2(R)$ z funkcją skalującą $\Phi(x)$. Należy znaleźć falkę $\Psi \in V_1$ taką, że $\text{span}\{2^{j/2}\Psi(2^j t - k)\}_{k \in Z, j \in Z} = V_s$ dla każdego $s \in Z$. Niech podprzestrzeń W_j przestrzeni $L_2(R)$ jest określona warunkiem:

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \quad (6)$$

gdzie symbol \oplus oznacza sumę prostą przestrzeni, tzn. dla każdego $v_{j+1} \in V_{j+1}$ istnieją $v_j \in V_j$ oraz $w_j \in W_j$ takie, że $v_{j+1} = v_j + w_j$.

Stwierdzając, że operator dylatacji J_s określony definicją 4 jest operatorem unitarnym [14] oraz zauważając, że $J_s(V_1) = V_{j+1}$, otrzymuje się:

$$V_{j+1} = J_j(V_1) = J_j(V_0 \oplus W_0) = J_j(V_0) \oplus J_j(W_0) = V_j \oplus J_j(W_0),$$

co daje:

$$W_j = J_j(W_0) \text{ dla wszystkich } j \in Z. \quad (7)$$

Z warunków (a) – (c) definicji 2 wynika, że otrzymujemy rozkład ortogonalny:

$$L_2(R) = \bigoplus_{j \in Z} W_j. \quad (8)$$

Należy więc znaleźć funkcję $\Psi \in W_0$ taką, że $\{\Psi(t - k)\}_{k \in Z}$ jest ortonormalną bazą w W_0 , gdyż, jak to wynika z (7) i (8), każda taka funkcja jest falką. Jeżeli falka powstaje z analizy wieloskalowej w opisany sposób, to mówi się, że jest ona związana z tą analizą

wieloskalową. Posługując się rozważaniami zawartymi w [14] można sformułować następujące twierdzenie, które daje wzór na falkę tylko w zależności od funkcji skalującej.

Twierdzenie 1

Niech $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ będzie analizą wieloskalową w $L_2(\mathbb{R})$ z funkcją skalującą $\Phi \in V_0$. Funkcja $\Psi \in W_0$ jest falką, gdy

$$\Psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a_n} (-1)^n \Phi(2x + n + 1), \quad (9)$$

gdzie $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x/2) \overline{\Phi(x-n)} dx$.

1.2.3. Falki a analiza wieloskalowa

Jakkolwiek praktycznie wykorzystywane falki są zawsze powiązane z pewną analizą wieloskalową i są konstruowane za jej pomocą, warto zauważyć, że istnieją falki nie związane z żadną analizą wieloskalową. W pracy S. Mallata [6] można znaleźć przykład falki odkrytej wcześniej przez J. L. Journe'a, która nie jest związana z żadną analizą wieloskalową. Także w [14] znajdują się przykłady falek unimodularnych wraz z dowodem, że niektóre z nich nie są związane z żadną analizą wieloskalową.

Następujący warunek konieczny i dostateczny na to, aby falka była związana z analizą wieloskalową, został znaleziony przez G. Gripenberga [4].

Twierdzenie 2

Falka Ψ z $L_2(\mathbb{R})$ jest powiązana z pewną analizą wieloskalową wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Psi}(2^p(\xi + 2\pi k))|^2 > 0 \quad \text{p.w.}, \quad (10)$$

gdzie $\hat{\Psi}(\xi)$ oznacza transformatę Fouriera falki Ψ . W tym przypadku zachodzi automatycznie

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Psi}(2^p(\xi + 2\pi k))|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{p.w.} \quad (11)$$

2. Dyskretna transformata falkowa

2.1. Transformata falkowa a transformata Fouriera

Z uwagi na fakt, że zgodnie z definicją 1 falka $\Psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ wyznacza układ $\{\Psi_{j,k} = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}}$, który jest ortonormalną bazą przestrzeni Hilberta $L_2(\mathbb{R})$, możliwa jest aproksymacja dowolnej funkcji f z tej przestrzeni:

$$f(x) = \sum_{j,k} f_{j,k} \Psi_{j,k}(x), \quad (12)$$

gdzie współczynniki $f_{j,k}$ są określone za pomocą iloczynu skalarnego $f_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle$. Współczynniki te nazywane są często współczynnikami falkowymi.

Można tu zauważyć pewne podobieństwo do transformaty Fouriera [13], gdyż układ funkcji $\{\exp(-i\omega t)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ jest również ortonormalny. Zmienne ω oraz t w przypadku transformaty Fouriera funkcji $f(t)$ określonej dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (13)$$

identyfikuje się na ogół z pojęciem czasu (t) oraz częstotliwości (ω). Jednak aby uzyskać informację o składowych częstotliwościach, należy całkować funkcję f na całej jej dziedzinie nawet gdy potrzebna jest wiedza o zachowaniu się funkcji tylko w pewnym wybranym okresie czasu. Natomiast transformata falkowa stanowi jedną z metod uzyskiwania lokalnych informacji o składowych częstotliwościowych, gdyż współczynniki falkowe $f_{j,k}$ dostarczają informacji o funkcji f w pobliżu punktu $2^{-j}k$ i częstotliwości proporcjonalnej do 2^j .

2.2. Implementacja dyskretnnej transformaty falkowej

2.2.1. Jednowymiarowa dyskretna transformata falkowa

Korzystając z definicji analizy wieloskalowej można stwierdzić, że funkcja skalująca $\Phi(t) \in V_0$ może być wyrażona za pomocą funkcji bazowych przestrzeni V_1 , gdyż $V_0 \subset V_1$:

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi_{1k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k 2^{1/2} \Phi(2x - k) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(2x - k). \quad (14)$$

Przy uwzględnieniu założenia, że układ $\{\Phi_{jk} = 2^{j/2} \Phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni V_j , współczynniki h_k można wyznaczyć za pomocą iloczynu skalarnego:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), \Phi_{1k}(x) \rangle &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \Phi_{1n}(x), \Phi_{1k}(x) \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \langle \Phi_{1n}(x), \Phi_{1k}(x) \rangle = \\ &= h_k \langle \Phi_{1k}(x), \Phi_{1k}(x) \rangle = h_k \|\Phi_{1k}(x)\|^2 = h_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Transformacja falkowa polega na przejściu od reprezentacji funkcji za pomocą współczynników $\{c_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ w wyrażeniu:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Phi_{jk}(x) \quad (16)$$

do reprezentacji za pomocą współczynników $\{c_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ oraz $\{d_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ w wyrażeniu:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} \Phi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \Psi_{j-1,k}(x). \quad (17)$$

Wzory transformacyjne przyjmują postać [8]:

$$c_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{j,n} \quad (18)$$

$$d_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n h_{2k+1-n} c_{j,n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} c_{j,n}. \quad (19)$$

Rekurencyjne powtarzanie powyższej transformacji doprowadzi w końcu do reprezentacji funkcji za pomocą wyrażenia:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{0,k} \Phi_{0k}(x) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \Psi_{jk}(x). \quad (20)$$

Przyjmując, że dysponuje się ciągiem wyjściowym $\{c_{M,0}, c_{M,1}, \dots, c_{M,N-1}\}$ o długości $N = 2^M$ w wyniku zastosowania powyższego algorytmu uzyskuje się nowy ciąg:

$$DWT\{c_{M,0}, c_{M,1}, \dots, c_{M,N-1}\} = \{c_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,0}, d_{1,1}, \dots, d_{M-1,0}, \dots, d_{M-1, \frac{N}{2}-1}\}. \quad (21)$$

Przedstawiony algorytm, zwany algorytmem piramidowym, został po raz pierwszy zaproponowany przez S. Mallata i przedstawiony w pracy [5].

Rekonstrukcja wyjściowego ciągu $\{c_{M,0}, c_{M,1}, \dots, c_{M,N-1}\}$ odbywa się również rekurencyjnie z wykorzystaniem wzoru:

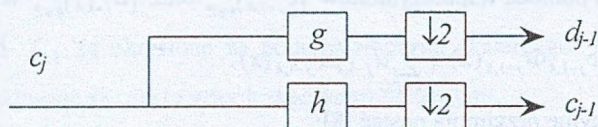
$$c_{j+1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n h_{2k+1-n} d_{j,n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} d_{j,n}. \quad (22)$$

2.2.2. Opis transformacji falkowej w języku cyfrowego przetwarzania sygnałów

Łatwo zauważyć, że wzory transformacyjne stanowią sploty ciągów liczbowych. Natomiast splot ciągów w dziedzinie cyfrowego przetwarzania sygnałów wyraża operację filtracji. Stąd istnieje alternatywny opis transformacji falkowej w języku cyfrowego przetwarzania sygnałów. Jest to opis konstruktywny, gdyż zastosowanie metod cyfrowego przetwarzania sygnałów umożliwi obliczanie występujących we wzorach transformacyjnych współczynników h_k oraz g_k , odpowiadających falkom o określonych własnościach. Jak to

zostało pokazane w [10], współczynniki h_k i g_k stanowią współczynniki odpowiedzi impulsowej filtrów cyfrowych spełniających tzw. warunki doskonałej rekonstrukcji sygnału.

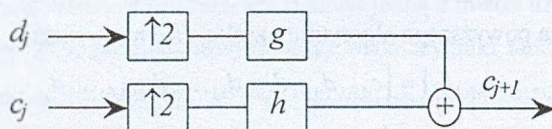
Rysunek 1 pokazuje dekompozycję dyskretnego sygnału c_j na dwa sygnały składowe: „wygładzony” sygnał c_{j-1} oraz współczynnik falkowy d_{j-1} , opisujący „detal”, z wykorzystaniem filtrów: dolnoprzepustowego h oraz górnoprzepustowego g . Aby zachować tę samą liczbę wartości do zakodowania po filtracji, kodowaniu poddaje się co drugą próbkę sygnałów, co symbolicznie zaznaczone jest na rysunku za pomocą decymatora $\downarrow 2$.



Rys. 1. Dekompozycja dyskretnego sygnału przy użyciu filtrów
Fig. 1. Decomposition of discrete signal by use filters

Po zastosowaniu filtrów do dekompozycji sygnału c_j , następnym krokiem algorytmu jest zastosowanie filtrów do dekompozycji sygnału c_{j-1} . Procedurę tę powtarza się aż do uzyskania sygnału c_0 .

Rekonstrukcja dyskretnego sygnału c_{j+1} na podstawie sygnałów składowych c_j oraz d_j może być zobrazowana za pomocą rys. 2.



Rys. 2. Rekonstrukcja dyskretnego sygnału przy użyciu filtrów
Fig. 2. Reconstruction of discrete signal by use filters

Symbol $\uparrow 2$ oznacza tak zwany ekspander i jest równoznaczny ze wstawieniem zera pomiędzy każde dwie próbki sygnału na jego wyjściu. Tak więc liczba próbek na wyjściu ekspandera jest dwa razy większa niż na jego wejściu. Natomiast po zastosowaniu filtrów f oraz g przetworzone sygnały dodaje się (symbol \oplus), aby otrzymać końcowy sygnał c_{j+1} .

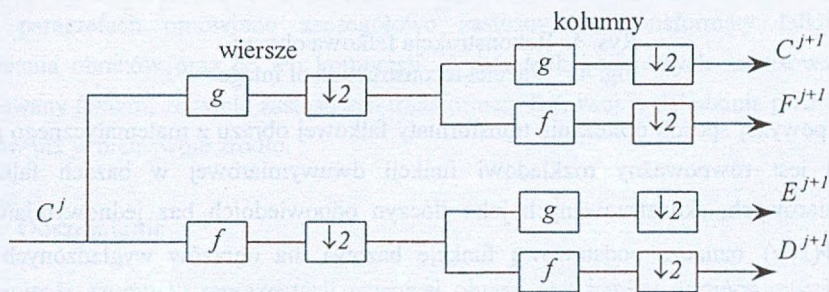
2.2.3. Dyskretna transformata falkowa obrazu

W implementacjach dwuwymiarowych transformat falkowych obraz reprezentowany jest najczęściej poprzez kwadratową macierz wymiaru $N \times N$ dla N będącego potęgą liczby 2. Macierz tę oznacza się C^0 . Po pierwszej transformacji otrzymuje się nową macierz o

wymiarach $N \times N$, składającą się z czterech bloków – podmacierzy kwadratowych o wymiarach $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$:

$$\begin{bmatrix} C^1 & F^1 \\ E^1 & D^1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Następna transformacja dotyczy tylko podmacierzy C^1 , która jest zastępowana czterema podmacierzami o wymiarach $\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}$. Procedura jest powtarzana tak długo ($\log_2 N$ razy), aż macierz C^j będzie macierzą wymiaru 1×1 . Dekompozycja macierzy C^j na cztery podmacierze realizowana jest w układzie filtrów jak na rys. 3.

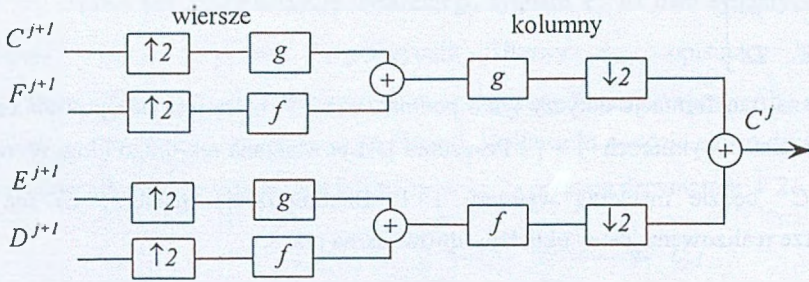


Rys. 3. Dekompozycja falkowa obrazu
Fig. 3. Wavelet decomposition of image

Sposób działania układu jest następujący. Na wejście układu wchodzi wierszami (jednocześnie na oba filtry) macierz C^j wymiaru $M \times M$, gdzie $M = 2^{-j} N$. Wiersze macierzy są splatane z odpowiednim filtrem i na wyjściu pierwszego decymatora powstaje macierz wymiaru $M \times \frac{M}{2}$. Następnie splatane są kolumny nowo otrzymanej macierzy z odpowiednim filtrem i na wyjściu drugiego decymatora powstaje macierz wymiaru $\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}$, która w zależności od kolejności użycia filtrów jest macierzą C^{j+1} , E^{j+1} , F^{j+1} lub D^{j+1} . Splot wiersza lub kolumny macierzy z filtrem realizowany jest analogicznie jak dla sygnału jednowymiarowego, w sposób opisany w punkcie 2.2.1.

Analogicznie realizowany jest algorytm rekonstrukcji dwuwymiarowego sygnału w układzie filtrów jak na rys. 4. Na cztery wejścia układu wchodzi wierszami macierze C^{j+1} , E^{j+1} , F^{j+1} i D^{j+1} o wymiarach $\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}$. Pomiędzy każde dwa sąsiednie elementy wiersza wstawiane jest zero i na wyjściu ekspandera pojawia się wiersz o długości M , który jest splatany z odpowiednim filtrem. W ten sposób na wyjściach pierwszych filtrów powstają cztery podmacierze o wymiarach $\frac{M}{2} \times M$. Na wejścia następnych ekspanderów wchodzi kolumnami sumy odpowiednich par macierzy, natomiast na ich wyjściach pojawiają się

kolumny o długości M (z co drugim elementem równym zero), które następnie są splatane z odpowiednim filtrem. Za ostatnim węzłem sumacyjnym powstaje macierz C^J .



Rys. 4. Rekonstrukcja falkowa obrazu
Fig. 4. Wavelet reconstruction of image

Przyjęty powyżej sposób obliczania transformaty falkowej obrazu z matematycznego punktu widzenia jest równoważny rozkładowi funkcji dwuwymiarowej w bazach falkowych dwuwymiarowych, skonstruowanych jako iloczyn odpowiednich baz jednowymiarowych. Niech $\Phi(x, y)$ oznacza podstawową funkcję bazową dla obrazów wygładzonych C^J i analogicznie $\Psi^E(x, y)$, $\Psi^F(x, y)$ i $\Psi^D(x, y)$ dla obrazów szczegółowych typu E^J , F^J oraz D^J zawierających informacje o konturach i krawędziach. Wówczas:

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y) &= \varphi(x)\varphi(y) \\
 \Psi^E(x, y) &= \psi(x)\varphi(y) \\
 \Psi^F(x, y) &= \varphi(x)\psi(y) \\
 \Psi^D(x, y) &= \psi(x)\psi(y),
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

co oznacza założenie separowalności funkcji bazowych dwuwymiarowych w kierunkach x i y .

3. Zastosowania falek w przetwarzaniu obrazów

Punkty osobliwe i nieregularności struktury sygnału często reprezentują najważniejszą informację zawartą w sygnałach, gdyż lokalne zmiany intensywności obrazów są związane na ogół z krawędziami obiektów. Z tego powodu detekcja lokalnych nieregularności jest ważna przy rozpoznawaniu obrazów. Przedstawiając obraz jako funkcję punktu na płaszczyźnie, można dokonać jego rozwinięcia względem dowolnej bazy, w szczególności względem bazy falkowej. Znając związek między regularnością sygnału a amplitudą jego transformaty

falkowej, można wykorzystać ten związek do wykrywania punktów osobliwych i nieregularnych struktur sygnałów.

Transformata Fouriera ma charakter globalny i dobrze reprezentuje ogólną regularność sygnałów, ale nie nadaje się do wyodrębnienia punktów osobliwych i znajdowania ich przestrzennego rozkładu. Natomiast wynikiem przekształcenia falkowego jest dekompozycja sygnału na składowe elementarne dobrze zlokalizowane w czasie i przestrzeni jak również względem częstotliwości. A zatem przekształcenie to umożliwi opisanie lokalnej regularności sygnałów i dzięki temu znajduje zastosowanie w dziedzinie przetwarzania obrazów.

W literaturze można znaleźć wiele zastosowań transformaty falkowej. W następnych dwóch paragrafach omówiono szczegółowo zastosowanie transformaty falkowej do odszumiania obrazów oraz do ich kompresji. Wybór tych konkretnych zastosowań został podyktowany faktem, że wiele zastosowań transformaty falkowej w dziedzinie przetwarzania sygnałów ma w nich swoje źródło.

3.1. Odszumianie

Tłumienie szumu w reprezentacji cyfrowej obrazu jest bardzo ważnym zagadnieniem przetwarzania obrazów i stanowi zwykle etap poprzedzający proces rozpoznawania obrazu. Wobec tego należy usunąć szum reprezentowany przez tło obrazu i wydobyć struktury obrazu, niosące istotną informację. Odszumianie polega na poddaniu obrazu transformacji falkowej, usunięciu „małych” współczynników transformaty falkowej, związanych z szumem, i zastosowaniu transformacji odwrotnej. Zasadniczą koncepcją tej metody jest binaryzacja współczynników transformaty falkowej. Może odbywać się to na przykład [8] za pomocą tzw. progu globalnego (universal threshold) przy zastosowaniu ostrej lub liberalnej selekcji. Próg globalny jest wyznaczany wzorem:

$$\lambda = s\sqrt{2 \log M}, \quad (25)$$

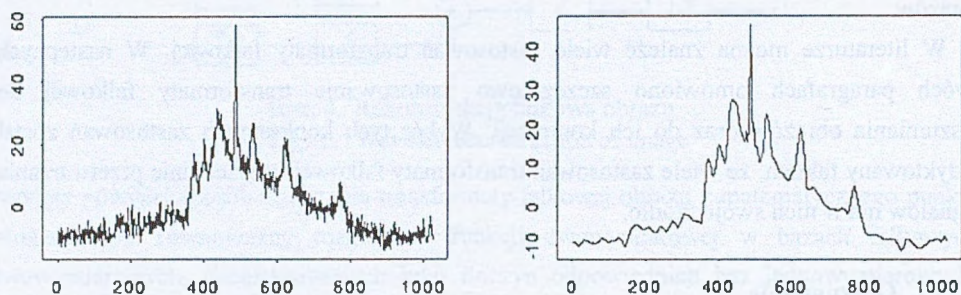
gdzie M jest liczbą danych punktów (lub równoważnie liczbą współczynników falkowych), a s jest estymatorem odchylenia standardowego współczynników falkowych. Natomiast ostra selekcja zastępuje wszystkie współczynniki falkowe mniejsze od progu zerami, w odróżnieniu od liberalnej selekcji, która wyznacza nowe współczynniki falkowe zastępując współczynniki d_{jk} według następującej formuły:

$$d_{jk}^{new} = \text{sgn}(d_{jk}) (|d_{jk}| - \lambda)_+. \quad (26)$$

Rysunek 5 ilustruje przykład odszumiania obrazu jednowymiarowego (pochodzi on z pracy [3]). Rysunek ten zawiera parę obrazów: jeden z nich jest zaszumionym obrazem sygnału NMR (nuclear magnetic resonance), czyli jądrowego rezonansu magnetycznego, a

drugi jest obrazem przetworzonym – po zastosowaniu transformaty falkowej, binaryzacji oraz transformaty odwrotnej. Jądrowy rezonans magnetyczny opisuje zjawisko absorpcji fal elektromagnetycznych o częstotliwości radiowej przez jądra atomowe substancji stałych, ciekłych lub gazowych, o momencie magnetycznym różnym od zera, pod wpływem stałego pola magnetycznego.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że odszumiony sygnał nie jest sygnałem wygładzonym poprzez odrzucenie „ostrych” struktur – wynik odszumiania wciąż zawiera istotne szczegóły sygnału.



Rys. 5. Ilustracja sygnału NMR – obraz oryginalny i po odszumieniu

Fig. 5. Illustrations of an NMR signal –the original signal and the denoised signal

3.2. Kompresja

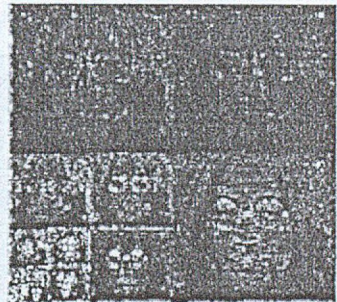
W drugiej połowie lat dziewięćdziesiątych XX w. można było zauważyć wzrost zainteresowania technikami kompresji obrazów statycznych wykorzystujących przekształcenia falkowe do dekompozycji obrazów oryginalnych. Świadczą o tym kolejne modyfikacje algorytmu EZW (Embedded Zerotree Wavelet), opartego na zagnieżdżonym kodowaniu falkowym z drzewem zer, autorstwa J. M. Shapiro [11], jak również coraz bardziej złożone metody kwantyzacji i kodowania współczynników falkowych, pozwalające blisko dwukrotnie zwiększyć skuteczność kompresji w stosunku do standardu kompresji obrazów JPEG (Joint Photographic Expert Group), opartego na dyskretnej transformacji kosinusowej DCT (Discrete Cosine Transform). Znalazło to wyraz w pracach nad nowym standardem kompresji JPEG 2000 [12], w którym falkowa dekompozycja obrazów odgrywa kluczową rolę.

Schemat kodowania w standardzie JPEG 2000 obejmuje trzy etapy: zastosowanie dyskretnej transformaty falkowej do wielorozdzielczej dekompozycji obrazu źródłowego, przestrzenno-częstotliwościową kwantyzację otrzymanych współczynników falkowych oraz entropijne kodowanie strumienia danych, nadające ostateczny kształt nowej reprezentacji kompresowanego zbioru danych. Warto przy tym podkreślić, że standard JPEG 2000 umożliwia realizację zarówno kompresji stratnej, jak i bezstratnej, przy czym etap

kwantyzacji ma miejsce jedynie w przypadku kompresji stratnej. Transformacja danych oryginalnych do nowej przestrzeni jako pierwszy etap schematu kompresji pozwala silnie zredukować lub nawet usunąć różnego typu nadmiarowości występujące w oryginalnej reprezentacji przetwarzanego zbioru danych. Transformacja ta sama w sobie nie wprowadza elementu kompresji, jednak ze względu na znaczącą redukcję korelacji pomiędzy wartościami pikseli w stosunku do obrazu oryginalnego obrazy po dekompozycji mogą być znacznie efektywniej kodowane niż obrazy oryginalne [9].

Podstawową koncepcją stratnej kompresji obrazów za pomocą transformaty falkowej jest kwantyzacja współczynników falkowych, co w najprostszym przypadku może oznaczać ignorowanie współczynników o wartościach mniejszych od ustalonego progu - nie są one zapamiętywane w obiekcie przechowującym współczynniki. Powoduje to utratę pewnej części informacji zawartej w obrazie, należy jednak przy odrzucaniu współczynników zadbać o to, aby wartość użytkowa tak przekształconego obrazu nie uległa znacznemu pogorszeniu. Jako przykład tego typu kompresji może posłużyć algorytm opisany w [8]. Niech N będzie długością wektora v , natomiast M będzie liczbą elementów tego wektora równych zero. Jeśli $N > 2M$, to wektor nie zostaje skompresowany. W przeciwnym zaś przypadku, tzn. co najmniej połowa elementów wektora jest zerami, wyodrębnione zostają niezerowe elementy wektora i są one umieszczane na liście zawierającej informacje o długości wektora oraz pozycjach i wartościach jego niezerowych elementów.

Na rysunku 6 przedstawiony jest przykład dwuwymiarowego obrazu oraz jego współczynników falkowych, uzyskanych po zastosowaniu algorytmu piramidowego. Obraz oryginalny ma wymiary 256×256 , zatem wykonano 8 kroków algorytmu. Jako filtrem posłużono się falką Daubechies $N = 8$.



Rys. 6. Obraz oryginalny oraz jego współczynniki falkowe
Fig. 6. Original image and its wavelet coefficients

Dla obrazu tego wykonano kompresję stratną opisaną uprzednio z zastosowaniem globalnej binaryzacji przy uwzględnieniu ostrej selekcji. Następnie dokonano rekonstrukcji przetworzonego obrazu. Wynik tej rekonstrukcji przedstawia rys. 7.

Zastosowanie tego typu kompresji stratnej spowodowało pewną utratę informacji, lecz można tu stwierdzić znaczący zysk, jeżeli chodzi o rozmiar przechowywanych obiektów. Obraz oryginalny przechowywany jako macierz był rozmiaru 526991, natomiast po kompresji przechowywany obiekt ma rozmiar 11971. Tak więc można stwierdzić, że nowy obiekt jest około 44 razy mniejszy od obiektu wyjściowego.



Rys. 7. Rekonstrukcja globalnie binaryzowanego obrazu Lennona
Fig. 7. Reconstructed universally-thresholded Lennon image

Oczywiście, można poprawiać jakość przetworzonego obrazu stosując innego rodzaju falki bądź też inaczej ustawiając próg binaryzacji. Innym przykładem kompresji falkowej obrazu może być rys. 8, przedstawiający dwa obrazy odcisku palca. Lewy obraz przedstawia oryginalny odcisk palca, natomiast prawy powstał na podstawie rekonstrukcji obrazu skompresowanego w stosunku 26:1 za pomocą transformaty falkowej. Rysunek ten powstał w oparciu o ustalony w 1993 r. w Stanach Zjednoczonych przez FBI (Federal Bureau of Investigation), w sekcji o nazwie Criminal Justice Information Services Division oraz w instytucie the National Institute of Standards and Technology, Los Alamos National Laboratory [2] standard dyskretyzacji i kompresji obrazów odcisków palców.



Rys. 8. Obrazy odcisku palca: oryginalny (lewy) oraz zrekonstruowany (prawy)
Fig. 8. Images of fingerprint: the original (left) and the reconstructed (right)

LITERATURA

1. Białasiewicz J. T.: Falki i aproksymacje. PWN, Warszawa 2000.
2. Bradley J., Brislawn C., Hopper T.: The FBI Wavelets/Scalar Quantization Standard for Gray-scale Fingerprint Image Compression. Tech Report LA-UR-93-1659, Los Alamos Nat'l Lab, Los Alamos, N. M. 1993.
3. Graps A.: An Introduction to Wavelets. IEEE Computational Science and Engineering, 1995 Vol. 2, No 2, ss. 50-61.
4. Gripenberg G.: A necessary and sufficient condition for existence of a father wavelet. Stud. Math., 1995, Vol. 114, No 3, ss. 207-226.
5. Mallat S.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Inteligence, 1989, Vol. 11, No 7, ss. 674-693.
6. Mallat S.: Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L_2(R)$. Trans. Am. Math. Soc., 1989, Vol. 315, No 1, ss. 69-87.
7. Musielak J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. PWN, Warszawa 1976.
8. Nason G. P., Silverman B. W.: The Discrete Wavelet Transform in S. Journal of Computational and Graphical Statistics, 1994, Vol. 3, ss. 163-191.
9. Przelaskowski A.: Falkowe metody kompresji danych obrazowych. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2002.
10. Rakowski W.: Metoda falkowa. Multimedia – algorytmy i standardy kompresji (pod red. W. Skarbka). Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1998, ss. 207-256.
11. Shapiro J. M.: Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients. IEEE Trans. Signal Proces., 1993, Vol. 41, No 12, ss. 3445-3462.
12. Skordas A. N., Christopoulos C. A., Ebrahimi T.: JPEG2000: The upcoming still image compression standard. Pattern Recognition Letters, Vol. 22, ss. 1337-1345.
13. Strang G.: Wavelet Transforms versus Fourier Transforms. Bulletin of The American Mathematical Society, Vol. 28, No 2, ss. 288-305.
14. Wojtaszczyk P.: Teoria falek. PWN, Warszawa 2000.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Władysław Skarbek

Wpłynęło do Redakcji 30 stycznia 2003 r.

Abstract

This paper presents the basic information about the wavelets theory. Definitions of wavelet (Definicja 1) and multiresolution analysis (Definicja 4) were given. The construction of wavelet based on the multiresolution analysis was presented in Twierdzenie 1. The necessary and sufficient condition for existence of multiresolution analysis based wavelet was given in Twierdzenie 2. The existence of wavelets not based on any multiresolution analysis was also mentioned.

The paper contains the short comparison of the Discrete Wavelet Transform and the Fourier Transform. The algorithm of calculating the Discrete Wavelet Transform in single-dimensional as well as two-dimensional cases was presented. This algorithm was also described using linear filtering convention (Fig. 1 ÷ 4).

The paper contains also the examples of applications of Discrete Wavelet Transform in the area of image processing. The first example shows how the wavelets may be used in the problem of recovering a true signal from noisy data (Fig. 5). The second example presents the usage of wavelets for compression of image data (Fig. 6 and Fig. 7). The JPEG 2000 Image Coding Standard and the FBI Wavelets/Scalar Quantization Standard for Gray-scale Fingerprint Image Compression were also mentioned and Fig. 8 shows the original and the reconstructed images of fingerprint.

Adres

Alina MOMOT: Politechnika Śląska, Instytut Informatyki, ul. Akademicka 16,
44-101 Gliwice, Polska, alamomot@polsl.gliwice.pl.