STUDIA INFORMATICA 2003
Volume 24 Number 4 (56)

Jerzy RESPONDEK
Politechnika Śląska, Instytut Informatyki

PROBLEMY NUMERYCZNE ZWIĄZANE Z BADANIEM STEROWALNOŚCI UKŁADU PARABOLICZNEGO W OBSZARZE PROSTOKĄTNYM

Streszczenie. Artykuł przedstawia zastosowanie algorytmów rozkładu liczb rzeczywistych na kombinację liniową kwadratów liczb naturalnych w badaniach sterowalności pewnej klasy układów nieskończenie wymiarowych. Sformułowano i udowodniono twierdzenie implikujące niemożność zastosowania standardowej metody, w obliczeniach symbolicznych, do obliczeń numerycznych. Następnie sformułowano algorytm badający jego ewentualną niesterowalność. Na koniec przedstawiono przykładowy wynik działania przedstawionego algorytmu.

Słowa kluczowe: sterowalność, układ dynamiczny, teoria liczb, algorytm numeryczny

THE NUMERICAL PROBLEMS ASSOCIATED WITH THE INVESTIGATIONS OF THE CONTROLLABILITY OF A PARABOLIC SYSTEM IN THE RECTANGUAL AREA

Summary. The article presents the applications of the algorithms of the decomposition of the real numbers to the linear combination of the narural numbers squares' for the investigations of the controllability of a class of infinite dimensional systems. Formulated and proved the theorem stating the imposibility of using the standard, in the symbolic calculations, method in the numerical computations. Next formulated th the algorithm for examining of the possible uncontrollability of that system. Finally presented the example result of execution of the mentioned algorithm.

Keywords: controllability, dynamical system, number's theory, numerical algorithm

1. Wstęp

Artykuł przedstawia algorytm numerycznego badania sterowalności pewnego nieskończenie wymiarowego układu dynamicznego w oparciu o przedstawione w pracy [13] algorytmy rozkładu liczb rzeczywistych na kombinacje liniowe kwadratów liczb naturalnych. Na wstępie przedstawiono postać i założenia odnośnie do badanego układu. Następnie przypomniano warunek konieczny i wystarczający jego sterowalności. Kolejnym krokiem jest sformułowanie i udowodnienie twierdzenia mówiącego o tym, iż elementy macierzy sterowalności dla rozpatrywanego układu dążą do zera przy wzroście parametrów i oraz j. Zatem ze względu na skończoną reprezentację liczb rzeczywistych w postaci zmiennoprzecinkowej wyklucza to zastosowanie tego warunku w numerycznym podejściu do badania sterowalności. Zamiast tego sformułowano algorytm pozwalający na ewentualne stwierdzenie niesterowalności na podstawie algorytmów przedstawionych w pracy [13], służących do rozkładu liczb rzeczywistych na kombinację liniową kwadratów liczb naturalnych. Na koniec przedstawiono przykład zastosowania tego algorytmu dla konkretnego obszaru określoności równania różniczkowego cząstkowego.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest układ dynamiczny o parametrach rozłożonych opisany następującym równaniem stanu:

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z_2^2}+\sum_{i=1}^{p} b^i(z)u_i(t), \tag{1}$$

gdzie obszar określoności D równania (1) jest prostokątem:

$$D=\{z=(z_1,z_2)\in R^2 : z_1\in[0,a],\ z_2\in[0,b]\} \tag{2}$$

Funkcje $b_i(z)$ mają postać:

$$b_i(z)=f_1(z_1)f_2(z_2),\ i=1,2,...,p \tag{3}$$

Zmienna czasowa:

$$0\le t<\infty \tag{4}$$

Zakładamy zerowe warunki brzegowe typu Dirichleta:

$$x(z,t)=0\big|_{z\in\Gamma}, \tag{5}$$

gdzie Γ - brzeg obszaru D. Ponadto sterowania mają postać:

$$u_i(t)\in R,\ i=1,2,...,p \tag{6}$$

3. Analiza problemu sterowalności

Dane równanie (1) jest liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego. Transformujemy dane równanie do postaci abstrakcyjnego równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad t \geq 0, \tag{7}$$

gdzie:

$$x(t) \in X = L^2(D), \qquad u \in R^p \tag{8}$$

Transformacja ta wymaga odpowiedniego doboru następujących operatorów:

- operatora A jako operatora różniczkowego drugiego rzędu:

$$Ax(z) = \frac{\partial^2 x(z)}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 x(z)}{\partial z_2^2}, \; x(z) \in D(A) \tag{9}$$

$$D(A) = \left\{ x(z) \in L^2(D) : Ax(z) \in L^2(D), x(z,t) = 0 \big|_{z \in \Gamma} \right\} \tag{10}$$

- operatora B w postaci:

$$B = \left\lfloor b^1(z) \; b^2(z) \; ... \; b^k(z) \; ... \; b^p(z) \right\rfloor, \; b_k(z) \in L^2(D) \tag{11}$$

$$B : R^p \to L^2(D) \tag{12}$$

Korzystając z rezultatów przedstawionych w monografii [2] otrzymuje się wartości własne operatora A:

$$\lambda_{ij} = -\pi^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \quad i, j = 1,2,3,... \tag{13}$$

Podobnie funkcje własne operatora A:

$$\phi_{ij}(z_1, z_2) = C \sin \frac{\pi i z_1}{a} \sin \frac{\pi j z_2}{b} \quad i, j = 1,2,3,..., \tag{14}$$

gdzie:

$$C = \frac{2}{\sqrt{ab}} \tag{15}$$

Nieskończenie wymiarowy układ dynamiczny (1) jest równoważny następującemu nieskończonemu ciągowi układów skończenie wymiarowych:

$$\dot{x}_{ij}(t) = A_{ij} x_{ij}(t) + B_{ij} u(t) \qquad i, \; j = 1,2,3,..., \tag{16}$$

gdzie A_{ij} i B_{ij} są macierzami o następującej postaci:

$$A_{ij} = diag[\lambda_{ij}, ..., \lambda_{ij}] \;\; \dim A_{ij} = m_{ij} \times m_{ij} \tag{17}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} <b^1,\phi_{i1}>_X & \dots & <b^2,\phi_{i1}>_X & \dots & <b^p,\phi_{i1}>_X \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <b^1,\phi_{ik}>_X & \dots & <b^2,\phi_{ik}>_X & \dots & <b^p,\phi_{ik}>_X \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <b^1,\phi_{im_i}>_X & \dots & <b^2,\phi_{im_i}>_X & \dots & <b^p,\phi_{im_i}>_X \end{bmatrix}, \tag{18}$$

gdzie:

λ_{ij} oznacza ij-tą wartość własną operatora A,

ϕ_{ij} jest funkcją własną operatora A, odpowiadającą jego ij-tej wartości własnej,

m_{ij} jest krotnością ij-tej wartości własnej.

Wektor $x_{ij}(t)$ jest dany wzorem:

$$x_{ij}(t) = \left[c_{i1}(t) \quad ,..., \quad c_{ik}(t) \quad ,..., \quad c_{im_i}(t)\right]^T, \tag{19}$$

gdzie c_{ik} jest i-tym współczynnikiem reprezentacji spektralnej Fourier'a elementu x w przestrzeni stanu X, względem bazy ortonormalnej utworzonej z funkcji własnych ϕ_{ij}.

4. Sterowalność liniowych, stacjonarnych układów dynamicznych

Twierdzenie 1 [6]

Dany jest stacjonarny układ dynamiczny opisany układem równań :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ t \geq 0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \ t \geq 0 \end{cases}, \tag{20}$$

gdzie A,B,C,D to stałe macierze o wymiarach odpowiednio n×n, n×m, p×n, p×m.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym globalnej sterowalności bez ograniczeń powyższego układu jest :

$$rz\left[B \mid AB \mid A^2 B \mid ... \mid A^{n-1} B\right] = n \tag{21}$$

Jak wykazano w pracy [8], warunek ten dla układu w postaci (16) przyjmuje postać:

$$rz[B_{ij}] = m_{ij} \quad i, j = 1,2,3,... \tag{22}$$

5. Numeryczne badanie sterowalności

5.1. Wprowadzenie

Punktem wyjścia do numerycznego badania sterowalności jest warunek postaci (22). Oczywiście numerycznie wykonalne jest sprawdzenie tylko skończonej ilości warunków.

Mimo to nie można od razu wykluczyć numerycznego podejścia w badaniu ciągu warunków (22). Gdyby każdy z elementów $\left[B_{ij}\right]_{l_1 l_2}$ macierzy B_{ij} był zbieżny do pewnej liczby $\left[B_{ij}\right]_{l_1 l_2}^{0} \neq 0$, wystarczyłoby, po udowodnieniu odpowiednich dla danej postaci funkcji własnych nierówności, zbadanie skończonej liczby warunków. Nierówności te powinny dać oszacowanie wielkości otoczenia liczby $\left[B_{ij}\right]_{l_1 l_2}^{0}$, w jakim znajdowałyby się kolejne wyrazy ciągów $\left[B_{ij}\right]_{l_1 l_2}$, w zależności od parametrów *i* oraz *j*. Gdyby wszyskie punkty tego otoczenia były wystarczająco odległe od zera, wtedy do zbadania warunku (22) wystarczyłoby sprawdzenie skończonej liczby warunków. Niestety, jak za chwilę wykażę w twierdzeniu 2 dla rozpatrywanego operatora A wszystke elementy dla macierzy sterowalności B_{ij} są zbieżne do zera przy wzroście parametrów *i* oraz *j* do nieskończoności. Dodatkowo przy zbieżności do zera problem w obliczeniach stanowi skończona reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych, co wyjaśnimy w następnym punkcie.

5.2. Twierdzenie 2

Dany jest są ciąg:

$$I_n = \int_0^a f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)dx, \tag{23}$$

gdzie:

a - liczba rzeczywista dodatnia,

$f:\langle 0,a\rangle \to R$ - funkcja ciągła,

x - zmienna robocza.

5.2.1. Teza

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0 \tag{24}$$

5.2.2. Dowód

Rozbijmy przedział całkowania na sumę podprzedziałów:

$$\langle 0,a\rangle = \left\langle 0,\frac{2a}{n}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2a}{n},\frac{4a}{n}\right\rangle \cup \left\langle \frac{4a}{n},\frac{6a}{n}\right\rangle \cup \ldots \cup \left\langle \frac{2([n/2]-1)a}{n},\frac{2[n/2]a}{n}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2[n/2]a}{n},a\right\rangle \tag{25}$$

Ponadto przyjmijmy oznaczenia:

$$C_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} \int_{\frac{2(k-1)a}{n}}^{\frac{2ka}{n}} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx \tag{26}$$

$$R_n = \int_{\frac{2[n/2]a}{n}}^{a} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx \tag{27}$$

Z użyciem powyższych oznaczeń wyjściowa całka jest równa $I_n = C_n + R_n$. Całkę (27) na podstawie własności całek oznaczonych można oszacować następująco:

$$|R_n| = \left|\int_{\frac{2[n/2]a}{n}}^{a} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx\right| \le \int_{\frac{2[n/2]a}{n}}^{a} |f(x)|\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)\right|dx \le \int_{\frac{2[n/2]a}{n}}^{a} |f(x)|\,dx \le$$

$$\le\left(a-\frac{2[n/2]a}{n}\right)\sup_{x\in\langle 0,a\rangle}|f(x)| \le \frac{2a}{n}\cdot\sup_{x\in\langle 0,a\rangle}|f(x)| \tag{28}$$

Ponieważ funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest ograniczona, więc $R_n \to 0$.

Pozostało do wykazania, że $C_n \to 0$. Każdy składnik sumy (26) to całka na przedziale o jednakowej długości $\frac{2a}{n}$, którego długość maleje do zera ze wzrostem *n*. Na podstawie twierdzenia Cantora [3] dana funkcja *f* jest jednostajnie ciągła w przedziale <*0,a*>.

Z definicji jednostajnej ciągłości wynika:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N}\ \forall_{n>N}\ |x-y|\le\frac{2a}{n} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{29}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$m_{n,k} = \inf_{x\in\left\langle\frac{2(k-1)a}{n},\frac{2ka}{n}\right\rangle} f(x), \quad k=1,2,\ldots,[n/2] \tag{30}$$

$$M_{n,k} = \sup_{x\in\left\langle\frac{2(k-1)a}{n},\frac{2ka}{n}\right\rangle} f(x), \quad k=1,2,\ldots,[n/2] \tag{31}$$

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga swe kresy, czyli $m_{n,k}=f(x)$, $M_{n,k}=f(y)$ dla pewnych punktów takich, że:

$$x,y\in\left\langle\frac{2(k-1)a}{n},\frac{2ka}{n}\right\rangle \tag{32}$$

Z (29) można napisać:

$$\forall_{n>N}\ -\varepsilon < M_{n,k}-m_{n,k} < \varepsilon \quad k=1,2,\ldots,[n/2] \tag{33}$$

Każdy składnik sumy (26) można oszacować następująco:

$$\int\limits_{\frac{2(k-1)a}{n}}^{\frac{2ka}{n}} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx = \int\limits_{\frac{2(k-1)a}{n}}^{\frac{(2k-1)a}{n}} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx + \int\limits_{\frac{(2k-1)a}{n}}^{\frac{2ka}{n}} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx \le$$

$$\le M_{n,k}\cdot \int\limits_{\frac{2(k-1)a}{n}}^{\frac{(2k-1)a}{n}} \sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx + m_{n,k}\cdot \int\limits_{\frac{(2k-1)a}{n}}^{\frac{2ka}{n}} \sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx = \frac{2a}{n\pi}\cdot M_{n,k} - \frac{2a}{n\pi}\cdot m_{n,k} < \frac{2a}{n\pi}\varepsilon \quad (34)$$

dla:

$$n > N\,,\ k = 1,2,...,[n/2] \quad (35)$$

Podobnie można dowieść nierówności:

$$\int\limits_{\frac{2(k-1)a}{n}}^{\frac{2ka}{n}} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx > -\frac{2a}{n\pi}\varepsilon \text{ dla } n > N\,,\ k = 1,2,...,[n/2]\,, \quad (36)$$

więc:

$$C_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} \int\limits_{\frac{2(k-1)a}{n}}^{\frac{2ka}{n}} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)dx < [n/2]\cdot\frac{2a}{n\pi}\cdot\varepsilon \le \frac{a}{\pi}\varepsilon \quad (37)$$

oraz:

$$C_n > -\frac{a}{\pi}\varepsilon \text{ dla } n > N \quad (38)$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie N, że dla wszystkich $n > N$ zachodzi: $|C_n| < \frac{a}{\pi}\varepsilon$, czyli $C_n \to 0$.

C.N.D

Przypomnijmy postać funkcji własnych operatora A:

$$\phi_{ij}(z_1, z_2) = C\sin\frac{\pi i z_1}{a}\sin\frac{\pi j z_2}{b} \quad i, j = 1,2,3,... \quad (39)$$

Do obliczenia elementów macierzy (18) będzie konieczne wyznaczenie ciągu całek o następującej postaci:

$$I_i = \int\limits_0^a f(x)\sin\left(\frac{\pi ix}{a}\right)dx \quad i = 1,2,3,..., \quad (40)$$

który na podstawie twierdzenia 2 jest zbieżny do zera przy parametrze i dążącym do nieskończoności. Stanowi to problem przy jego obliczaniu. Oznaczmy jako ε parametr charakteryzujący dokładność obliczeniową maszyny. Do obliczeń może być wykorzystany typ *double*. Liczby tego typu są zapamiętywane przy podstawie 2 i zajmują 64 bity, z czego 53 jest przeznaczonych na mantysę [21]. Stąd parametr ε charakteryzujący dokładność obliczeń wynosi:

$$\varepsilon = 2^{-t+1} = 2^{-52}, \tag{41}$$

gdzie t oznacza liczbę bitów przyjętych do reprezentowania mantysy. Każdy element macierzy (18) wyraża się wzorem:

$$b_{kl} = C\int_0^a f_1(z_1)\sin\left(\frac{\pi i z_1}{a}\right)dz_1 \cdot \int_0^b f_2(z_2)\sin\left(\frac{\pi j z_2}{b}\right)dz_2, \tag{42}$$

a jego granica na mocy własności granicy iloczynu [3] :

$$\lim_{i,j\to\infty} b_{kl} = C\cdot \lim_{i,j\to\infty} \int_0^a f_1(z_1)\sin\left(\frac{\pi i z_1}{a}\right)dz_1 \cdot \int_0^b f_2(z_2)\sin\left(\frac{\pi j z_2}{b}\right)dz_2 =$$

$$= C\cdot \lim_{i\to\infty} \int_0^a f_1(z_1)\sin\left(\frac{\pi i z_1}{a}\right)dz_1 \cdot \lim_{j\to\infty} \int_0^b f_2(z_2)\sin\left(\frac{\pi j z_2}{b}\right)dz_2, \tag{43}$$

czyli z definicji zbieżności ciągu zawsze można będzie znaleźć takie indeksy i,j, że uzyskany element macierzy b_{kl} będzie mniejszy od dokładności obliczeniowej komputera ε, co oczywiście wyklucza jego użycie w tym przypadku. Natomiast jest możliwa konstrukcja algorytmu stwierdzającego ewentualną niesterowalność. Ze wzoru (22) wynika, że warunkiem koniecznym sterowalności układu (1) jest, aby krotność m_{ij} wartości własnych λ_{ij} nie była większa, niż liczba sterowań p:

$$\underset{i,j=1,2,3,\ldots}{\forall} m_{ij} \le p \tag{44}$$

Do sprawdzenia tego warunku wykorzystamy algorytm 1.

6. Algorytmy numerycznego badania krotności wartości własnych

6.1. Algorytm 1

1) Pobierz : m, n, N, p.

2) Wykonaj algorytm 2 przedstawiony w pracy [13] dla parametrów m, n, N.

3) Znajdź największą krotność z krotności uzyskanych w wyniku wykonania algorytmu 2 i przypisz ją do zmiennej *maxm*.

4) Jeżeli *maxm* > p-układ niesterowalny, w przeciwnym przypadku zagadnienie nierozstrzygnięte.

5) Koniec.

Jako że krok 3 algorytmu 1 jest algorytmem klasy liniowej, złożoność algorytmu 3 jest identyczna co złożoność algorytmu 2 z pracy [13].

Wadą algorytmu 1 jest konieczność ustalenia z góry maksymalnej wartości parametrów i oraz j, wśród których będą poszukiwane wielokrotne wartości własne. Ograniczenie to oznaczono jako *N*. Kolejne wywołania algorytmu 1 przy większym *N* powodują, iż oprócz nowych rozwiązań poszukiwane będą już znalezione przy poprzednim *N*, co jest wysoce nieefektywne.

Jedynym rozwiązaniem jest modyfikacja algorytmów: 1 i 1 z pracy [13]. Znalezienie rozwiązań z przedziału *(N; 2N >* wymaga przy opracowaniu algorytmu zastąpienia nierówności (29),(30) z pracy [13] następującymi nierównościami:

$$\begin{cases} s-\dfrac{mk}{s}>N \\ \dfrac{1}{2}\left(s+\dfrac{mk}{s}\right)\le 2N \end{cases} \tag{45}$$

Rozwiązanie tego układu nierówności względem *s* jest następujące:

$$\frac{N+\sqrt{N^2+4mk}}{2}<s\le 2N+\sqrt{4N^2-mk} \tag{46}$$

Podobnie można udowodnić warunek dla *d*:

$$\frac{N+\sqrt{N^2+4nk}}{2}<d\le 2N+\sqrt{4N^2-nk} \tag{47}$$

Uzyskane warunki pozwalają na sformułowanie zmodyfikowanego algorytmu 2 z pracy [13]:

6.2. Algorytm 2

1) Przyjmij kmax := min(N*N/m : N*N/n).
2) Dla k całkowitego ze zbioru 1..kmax powtarzaj kroki 3-6.
3) Przyjmij:
   smin := (N+sqrt(N*N+4*k*m)+1)/2, smax := 2*N+sqrt(4*N*N-k*m)
   dmin := (N+sqrt(N*N+4*k*n)+1)/2, dmax := 2*N+sqrt(4*N*N-k*n).
4) Dla s całkowitego ze zbioru smin..smax powtarzaj kroki 5-6.
5) Dla d całkowitego ze zbioru dmin..dmax powtarzaj krok 6.
6) Jeżeli s|k*m oraz d|k*n oraz 2|(s+k*m/s) oraz 2|(d+k*n/d), to wyznacz:
   i1 := (s+k*m/s)/2
   j1 := (d-k*n/d)/2
   i2 := (s-k*m/s)/2
   j2 := (d+k*n/d)/2
   S := (i1*i1)/m + (j1*j1)/n
i dopisz piątkę (i1,j1,i2,j2,S) do zbioru rozwiązań.
7) Koniec.

Tak zmodyfikowany algorytm pozwala już na sformułowanie algorytmu numerycznego badania krotności wartości własnych z jego użyciem.

6.3. Algorytm 3

1) Pobierz : m, n, p, N_{max}.
2) Przypisz N:=1.
3) Wykonaj algorytm 2 z pracy [13] ze zmodyfikowanym algorytmem 1 dla parametrów m, n, N.
4) Uzyskany zbiór rozwiązań dopisz do uzyskanego w wyniku poprzednich iteracji, zachowując uporządkowanie przeznaczonej do tego celu struktury danych.
5) Znajdź największą krotność z krotności uzyskanych w wyniku wykonania kroku (4) i przypisz ją do zmiennej maxm.
6) Jeżeli maxm > p, układ niesterowalny,
w przeciwnym przypadku, jeżeli $N>N_{max}$, zagadnienie jest nierozstrzygnięte i przejdź do 9.
7) Przypisz N:=2*N.
8) Przejdź do 3.
9) Koniec.

7. Przykład działania algorytmu 3

Dany jest układ dynamiczny o parametrach rozłożonych opisany następującym równaniem stanu:

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z_2^2}+\sum_{i=1}^{3} b^i(z)u_i(t), \tag{48}$$

gdzie $z=[z_1 \;\; z_2]$.

Obszar określoności równania D jest prostokątem:

$$D=(z_1,z_2)=[0,1]\times\left[0,\sqrt{2}\right] \tag{49}$$

$$0\le t<\infty \tag{50}$$

$$b_i(z)=f_1(z_1)f_2(z_2),\; i=1,2,3 \tag{51}$$

Zakładany zerowe warunki brzegowe typu Dirichleta:

$$x(z,t)=0\big|_{z\in\Gamma}, \tag{52}$$

gdzie Γ - brzeg obszaru D.

Należy wykryć jego niesterowalność za pomocą algorytmu 2.

7.1. Wynik działania algorytmu 3

W rozpatrywanym przykładzie a=1 oraz b=sqrt(2). Na tej podstawie przyjmujemy m=1 i n=2 i wykonujemy algorytm 3.

W szóstej iteracji algorytmu zostaje znaleziona wartość własna λ_{ij} operatora A o krotności 4. Powoduje to, iż nie może być spełniony warunek (44), gdyż liczba sterowań w rozważanym układzie wynosi 3. Uzyskana poczwórna wartość własna odpowiada następującemu zbiorowi par parametrów (i,j):

P={ (8,13), (6,15), (2,17), (12,3)} i jej wartość wynosi:

$$\lambda_{ij}\Big|_{(i,j)\in P} = -\pi^2\left(i_k^2 + \frac{j_k^2}{2}\right) = -\frac{297}{2}\pi^2 \quad k = 1,2,3,4 \tag{53}$$

Zatem na mocy twierdzenia 1 układ dynamiczny (1) jest niesterowalny.

8. Wnioski końcowe

Niniejszy artykuł podejmuje problem zastosowania metod numerycznych w badaniach sterowalności nieskończenie wymiarowych liniowych układów dynamicznych typu parabolicznego, określonych w prostokącie z zerowymi warunkami brzegowymi typu Dirichleta. W toku badań poważnym utrudnieniem przy numerycznym badaniu sterowalności rozważanego układu dynamicznego okazała się postać funkcji własnych jego operatora różniczkowego. Otóż jak wykazano w twierdzeniu 2, elementy macierzy sterowalności (18) badanego układu dla otrzymanych funkcji własnych dążą do zera przy wzroście indeksów i oraz j do nieskończoności. Ze względu na skończoną reprezentację liczb rzeczywistych w postaci typów zmiennoprzecinkowych w komputerze [21] stanowi to oczywiście poważny problem. Z tego powodu nie przedstawiono ogólnego algorytmu rozstrzygającego ewentualną sterowalność badanego układu dla konkretnych wymuszeń. Natomiast na podstawie warunku koniecznego sterowalności (44) udało się sformułować algorytm orzekający ewentualną niesterowalność układu. Należy jednak pamiętać o tym, iż przedstawiony algorytm ze względu na to, że badany układ jest nieskończenie wymiarowy, a algorytm z konieczności musi być skończony, w przypadku braku stwierdzenia niesterowalności układu (1) dla danych wymuszeń w skończonym czasie nie rozstrzyga problemu, tzn. badany układ *de facto* nadal może być (nie-)sterowalny.

Wymieniona w spisie literatury pozycja [20] stanowi link do strony internetowej ang. Microsoft Software Developer Network, który jest olbrzymią bazą szeroko rozumianej wiedzy programistycznej. Natomiast pozycja [21] jest linkiem do strony internetowej ang.

Institute of Electrical and Electronics Engineers, który zajmuje się, między innymi, standaryzacją różnych wielkości. Na stronie tej znajduje się wprowadzona przez tę organizację definicja typu zmiennoprzecinkowego *double*.

LITERATURA

1. Aho A. V., Hopcroft J. E., Ullman J. D.: Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych. PWN, Warszawa 1983.
2. Butkowskij A. G.: Charakteristiki sistiem s raspriedieliennymi parametrami. Sprawocznoje posobie, „Nauka", Moskwa 1979.
3. Fichtencholtz M.: Kurs differiencialnowo i integralnowo iscislenia. Moskwa 1979, Nauka, Gławnaja Redakcja fizyko-matematiczeskoj literatury.
4. Kaczorek T.: Teoria sterowania. PWN, Warszawa 1977.
5. Kaczorek T.: Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT, Warszawa 1998.
6. Klamka J.: Controllability of dynamical systems. Kluwer, Dordrecht, 1991.
7. Kudrewicz J.: Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektroników. PWN, Warszawa 1976.
8. Mitkowski W.: Stabilizacja systemów dynanicznych. WNT, Warszawa 1991.
9. Mostowski A., M. Stark M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1972.
10. Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1975.
11. Respondek J.: Controllability of dynamical systems with constrained controls. ZN Pol. Śl, seria Automatyka z.138, Gliwice 2003.
12. Respondek J.: Controllability of dynamical systems with damping term and constrained controls. ZN Pol. Śl, seria Automatyka z.138, Gliwice 2003.
13. Respondek J.: Znajdowanie par liczb całkowitych generujących równe sumy kwadratów w kombinacji liniowej. ZN Pol. Śl. Studia Informatica Vol 24, No 4(56), Gliwice 2003.
14. Sierpiński W.: Arytmetyka teoretyczna. PWN, Warszawa 1968.
15. Sneddon N.: Równania różniczkowe cząstkowe. PWN, Warszawa 1962.
16. Tanabe H.: Equations of evolution. Pitman, London, 1979.
17. Wilkinson J. H.: Błędy zaokrągleń w procesach algebraicznych. PWN, Warszawa 1967.
18. Wirth N.: Algorytmy + struktury danych = programy. WNT, Warszawa 1989.
19. Wróblewski J.: O równych sumach dwóch kwadratów. Delta 2/2002 str. 17.
20. msdn.microsoft.com.
21. www.ieee.com.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Wpłynęło do Redakcji 2 kwietnia 2003 r.

Abstract

The article presents the applications of the algorithm 2 from the paper of the decomposition of the real numbers to the linear combination of the narural numbers squares' for the investigations of the controllability of a class of infinite dimensional systems with parabolic type state equations (1) defined in the two dimensional area. In the beggining presented the form and the assumptions on the considered system and next formulated and proved the theorem 2 stating the imposibility of using, the standard in the symbolic calculations, method in the numerical computations. Next it is shown how to use the neccesary condition nnn for the controllability of the considered system in the formulating of the algorithm for examining of the possible uncontrollability of that system. The next step is the improvement of the time complexity of the formulated algorithm. Finally in the example presented the result of the execution, of the mentioned earlier algorithm, applied to particular dimensions of the considered dynamical system's (1) definition area (2).

Adres

Jerzy RESPONDEK: Politechnika Śląska, Instytut Informatyki, ul. Akademicka 16,
44-101 Gliwice, Polska