Вальдемар ХОЛУБОВСКИ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУПП БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1}$$

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

GLIWICE 2017

MONOGRAFIA

ВАЛЬДЕМАР ХОЛУБОВСКИ

АЛГЕВРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУПП БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
GLIWICE 2017

Рецензенты

Орест Артемович, доктор физико-математичсских наук, профессор
Николай Вавилов, доктор физико-математических наук, профессор

Редакционный совет

Главный редактор - Анджей Бухач, д. т. н., профессор
Редактор отдела - Дамиан Слота, д. т. н.
Секретарь редакции - Рома Лось, магистр

Издано с согласия
Ректора Политехники Шлёнской

Проект обложки
Томаш Ламорски

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
w Gliwicach

S. 118777

ISBN 978-83-7880-475-8

©Copyright by
Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
Gliwice 2017

Произведение нельзя воспроизводить или распространять с помощью электронных механических копирующих и других технических средств в том нельзя его размещать и распространять как в сети интернет так и в локальных сетях без письменного рарешения владельца авторских прав

J 509/17

ОГЛАВЛЕНИЕ

SPIS TREŚCI

ВВЕДЕНИЕ

Бесконечные матрицы встречаются в разных разделах математики. Систематическое изучение началось в теории суммирования расходящихся последовательностей и рядов, в квантовой механике и теории решения бесконечных систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

В теории рядов рассматриваются преобразования последовательностей типа $(z_n) \to (z'_n) = \phi((z_n))$, где $z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$. Преобразование ϕ задается при помощи бесконечной матрицы $a = (a_{ij})$. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы преоразование ϕ переводило любую сходящуюся последовательность в сходящуюся найдены Кожимой.

Теория Гейзенберга—Дирака в квантовой механике использует решения двух линейных уравнений в бесконечных матрицах:

$$AX - XA = I \qquad AX - XD = 0$$

(первое уравнение называется уравнением квантования). Для нахождения решений используется теория спектров операторов в гильбертовых пространствах.

Вурное развитие теории линейных пространств бесконечной размерности наступило в начале XX века. Основания были заложены главным образом исследованиями Ивара Фредгольма и Вито Вольтерры. Они рассматривали теорию линейных уравнений с бесконечным числом уравнений и неизвестных с использованием представления в виде предела линейных уравнений с конечным числом уравенений и неизвестных, когда число уравнений и неизвестных становится бесконечным. Это привело к развитию теории интегральных уравнений. С другой стороны, работы Давида Гильберта, Джона фон Неймана, Эрхарда Шмидта и Фригеса Риса по теории интегральных уравнений послужили толчком к развитию теории линейных пространств бесконечной размерности. Это и привело к созданию теории банаховых и гильбертовых пространств.

Алгебраические свойства бесконечных матриц и бесконечномерных линейных или классических групп исследуются во многих статьях и монографиях. Это делается с разных точек зрения, среди которых мы отметим теорию ассоциативных колец и модулей, алгебраическую K-теорию, теорию алгебр Ли и алгебраических групп, теорию бесконечных групп, функциональный анализ (кольца операторов, спектральный анализ), элементарный анализ (теория функций, последовательности и ряды), теорию представлений, теорию моделей, бесконечную комбинаторику и теорию вероятностей.

Бесконечные матрицы мы можем складывать как обычные матрицы. Специфика бесконечных матриц полностью выявляется при попытке умножать их. А именно, умножение бесконечных матриц не всегда определено. В анализе, где используются комплекснозначные и вещественнозначные бесконечные матрицы эта ситуация преодолевают наложением на матрицы условий типа сходимости последовательностей коэффициентов в строках и столбцах. В алгебре рассматриваются матрицы с коэффициентами из произвольного ассоциативного кольца R с единицей, тем самым накладываются другие условия конечиости, типа конечно строчности или конечно столбцовости. Кроме того, умножение может быть определено, но бывает неассоциативным. В третьих, обратимость бесконечных матриц ведет себя странно, существуют например бесконечные матрицы имеющие бесконечное число обратных.

Бесконечные матрицы можем складывать как обычные матрицы. Специфика бесконечных матриц полностью выявляется при попытке умножать их. А именно, умножение бесконечных матриц не всегда определено. В анализе, где используются комплекснозначные и вещественнозначные бесконечные матрицы эту ситуацию преодолевается наложением на матрицы условий типа сходимости последовательностей коэффициентов в строках и столбцах. В алгебре рассматриваются матрицы с коэффициентами из произвольного ассоциативного кольца R с единицей, тем самым накладываются другие условия конечности, типа конечно строчности или конечно столбцовости. Кроме того умножение может быть определено, но бывает неассоциативным. Во третьих, обратимость бесконечных матриц ведет себя странно, существуют например бесконечные матрицы имеющие бесконечное число обратных.

Алгебраический подход к изучении бесконечных матриц начался в 40-вых годах XX-того века с работ Р. Бэра, Н. Джекобсона, Дж. Маки, И. Амитцура и других. Сначала они изучали кольцо конечнострочных бесконечных матриц $\mathrm{M}_r(\infty, R)$ над кольцом R (кольцо эндоморфизмов левого свободного модуля) и кольцо $\mathrm{M}_{rc}(\infty, R)$ конечнострочных и конечностолбцовых бесконечных матриц (кольцо непрерывных эндоморфизмов или кольцо эндоморфизмов with adjoint), которое появилось в исследовании счетномериых алгебр и другиих колец со свойствами конечности. Итоговая работа Н. Джекобсона о неприводимых модулях показала важность плотных подколец кольца $\mathrm{M}_r(\infty, R)$, т. е. колец содержащих кольцо $\mathrm{M}(R)$ – состоящее из матриц имеющих только конечное число ненулевых элементов. Такие кольца и называются кольцами бесконечных матриц. Для многих математиков кольца бесконечных матриц служат только примерами патологий в кольцах. В монографии [41] бесконечные матрицы появляются главным образом в качестве контрпримеров. На первый взгляд бесконечные матрицы не имеют никакой обозреваемой структуры, возможно потому, что не удовлетворяют никаким условиям конечности (например они никогда не являются односторонне нетеровскими). На самом деле в работах многих математиков выявлена их богатая структура. Например, два унитальные кольца R и S Морита эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}(R) \simeq \mathrm{M}(S) \Leftrightarrow \mathrm{M}_{bc}(\infty, R) \simeq \mathrm{M}_{bc}(\infty, S) \Leftrightarrow \mathrm{M}_{rc}(\infty, R) \simeq \mathrm{M}_{rc}(\infty, S) \Leftrightarrow \mathrm{M}_r(\infty, R) \simeq \mathrm{M}_r(\infty, S)$ (здесь $\mathrm{M}_{bc}(\infty, R)$ обозначает кольцо всех матриц, у которых все ненулевые элементы только в конечном числе столбцов). Кольца $\mathrm{M}_r(\infty, R)$ и $\mathrm{M}_{rc}(\infty, S)$ никогда неизоморфны, существует кольца R, S такие, что $R \simeq \mathrm{M}_r(\infty, R)$ и $S \simeq \mathrm{M}_{rc}(\infty, S)$. Для групп Пикара имеем изоморфизмы $Pic(R) \simeq Pic(\mathrm{M}(R) \simeq Pic(\mathrm{M}_r(\infty, R))$ [38], [35], [36], [37], [92], [39].

Исследования колец эндоморфизмов естественным образом возбудили интерес и к группам автоморфизов бесконечномерных модулей. Они интенсивно начались изучатся в работах Капланского [116], [117], Кадисона [115], Маки [129] и Розенберга [153] 1950-х годов. В громадном количестве работ рассматривались различные группы бесконечных матриц. Два крайних условия конечности накладываемые на бесконечные матрицы, они и наиболее широко обсуждались в литературе, это:

$\mathrm{GL}(R)$ — стабильная полная линейная группа, которая является индуктивным пределом групп $\mathrm{GL}(n, R)$ относительно естесвенных вложений;

$\mathrm{GL}_c(\Omega, R)$ — группа автоморфизмов правого модуля R^Ω (соответственно $\mathrm{GL}_r(\Omega, R)$ для левого модуля ${}^\Omega R$), где Ω – бесконечное индексное множество.

$\mathrm{GL}(R)$ это не аналог стабильного кольца $M(R)$, которое не имеет единицы, а его расширения посредством добавления скалярных матриц. Элементами стабильной группы являются матрицы, которые формально бесконечны, но в действительности лишь в конечном числе мест отличаются от единичной матрицы. Эта группа устроена, в принципе, как конечномерные полные линейные группы $\mathrm{GL}(n, R)$, и даже проще. Она нашла широкое применение в алгебраической K-теории (достаточно посмотреть любую книжку по основам алгебраической K-теории [93], [133], [3]). Именно эта группа является модельной для построения K-теории колец, однако, практически никакой специфики бесконечных матриц в ней не наблюдается.

Более интересным случаем, полностью выявляющим специфику бесконечных матриц, есть группа $\mathrm{GL}_c(\Omega, R)$ (соответственно $\mathrm{GL}_r(\Omega, R)$), в матрицах она представляется такими конечностолбцовыми (соответсвенно конечнострочными) матрицами, обратные к которым тоже являются конечностолбцовыми (соответсвенно конечнострочными) матрицами. Надо отметить, что для бесконечных матриц условие конечности для обратной матрицы a^{-1} совершенно не вытекает из соответсвующего условия на саму матрицу a, как показывает следующий пример:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Матрица a является конечнострочной, но обратная к ней не является конечнострочной. С другой стороны матрица a имеет конечнострочною правыю обратную к ней, именно:

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}.$$

Группа $\mathrm{GL}_c(\Omega, R)$ является формальным аналогом групп $\mathrm{GL}(n, R)$, но фактически она устороена бесконечно сложнее. Следует отметить, что в случае бесконечного Ω, на самом деле, практически все результаты не зависят от мощности множества Ω. Это значит, что уже случай группы $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$ индексированной натуральными числами, является модельным для исследования структуры и свойств бесконечномерных групп. В дальнейшем, эту группу будем обозначать просто $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$.

Среди условий конечности, накладываемых на бесконечные матрицы отметим ещё следующие, встречавшиеся в литературе:

$\mathrm{GL}_{rc}(\mathbb{N}, R)$ — группа конечно столбцовых и конечно строковых матриц, она является просто пересечением групп $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$ и $\mathrm{GL}_r(\mathbb{N}, R)$, самое интересное, что группы $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$ и $\mathrm{GL}_r(\mathbb{N}, R)$ максимальны и не содержатся в какой то общей надгруппе;

$\mathrm{GL}_b(\mathbb{N}, R)$ — группа, состоящая из матриц a конечной ширины, то есть таких, для которых существует такое m, что все элементы матриц a и a^{-1} вне диагональной полосы ширины m нулевые;

$\mathrm{GL}_{bc}(\mathbb{N}, R)$ — финитарная группа, состоящая из всех матриц a, для которых все ненулевые элементы матрицы $a - e$ находятся в конечном числе строк (здесь e – единичная матрица).

Группа $\mathrm{GL}_{bc}(\mathbb{N}, R)$ и её подгруппы интенсивно изучались в работах по теории локально конечных групп, в случае когда $R = K$ – конечное или локально конечное поле [94].

Группа $\mathrm{GL}_b(\mathbb{N}, R)$ связана с алгебрами Ли рассматриваными Вердие, её подгруппы состоящие из периодических матриц имеют отношение к алгебрам Каца-Муди [114] и к группам конечных синхронных автоматов [17].

Исследование групп бесконечных матриц тесно связано с исследованием (конечномерных) линейных групп. Различные вопросы, связанные со структурой линейных групп, изучались уже К. Жорданом, Л. Диксоном, Б. ван дер Варденом, Г. Вейлем, Ж. Дьедонне и их многочисленными последователями в огромном количестве работ. Ко второй половине XX века сложилось несколько крупных направлений исследования линейных групп. Укажем те, которые имеют особенное отношение к бесконечным матрицам.

Традиционно, самый большой интерес вызывают нормальные подгруппы. Центральный результат в этой области получен Х. Бассом, описавшим строение нормальных делителей стабильной группы $\mathrm{GL}(R)$ [3], откуда получается описание на стабильном уровне строения нормальных делителей полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$ над кольцами. Для нестабильной ситуации аналоги результата Басса для $\mathrm{GL}(n, R)$ были позднее получены в работах А.А. Суслина, Дж. Уилсона, А.З. Голубчика и некоторых других авторов. С другой стороны работы Р. Бэра и Н. Джекобсона рассматривающие кольца эндоморфизмов бесконечномерных модулей (отметим здесь описание Бэром двусторонних идеалов) и работы Р. Бэра и С. Улама описывающие нормальное строение группы подстановок бесконечного множества возбудили интерес к нормальному строению $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$. В работах А. Розенберга [153], Г. Максвела [135], Ю. Хаузен [99], Э. Робертсона [147], [148], Д. Аррела [44], [45], [46] описывались нормальные подгруппы или подгруппы нормализуемые элементарными матрицами в группе $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$ для различных классов колец. Оказалось, что, так как в результате Басса, они попадают в интервалы свзанные с конгруэнц подгруппами соответсвующим двусторонним идеалам. И. Фаруки дал пример бесконечного множества несчетных цепей в решетке нормальных подгрупп группы $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ обобщая определение конгруэнцподгруппы [83]. Р. Бернс и И. Фаруки описали максимальные нормальные подгруппы в группе целочисленных матриц $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$, они естественным образом индуцированы гомоморфизмами $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($p-$ простое) [60].

Ряд авторов рассматривал подгруппы, определяемые в теоретико-групповых терминах: абелевы,разрешимые, нильпотентные, силовские и т.д.; основные достижения в этой области принадлежат в конечномерном случае Дж. Диксону, Б. Верфрицу, Д.А. Супруненко, В.П. Платонову, А.Е. Залесскому и другим алгебраистам минской школы. Для группы $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$ аналогичные исследования проведены Б.И. Плоткиным [29], М.Р. Седнёвой [32], И.Д. Иванютой [19], Л.А. Курдаченко, И. Субботиным [122] и другими.

Предметом постоянного интереса является описание линейных групп с помощью образующих и определяющих соотношений — особое внимание к этому вопросу было стимулировано работами 60-х годов Р. Стейнберга и Дж. Милнора по стабильной группе Стейнберга. В работах П. Вермеша и его учеников: Айреша, К. Пастора, Й. Денеша исследовалось порождение стрингами разных групп бесконечных матриц, так как и разложение в комплексное произведение подгрупп. В частности они показали, что группа конечнострочных и конечностолбцовых матриц имеет ширину два относительно стрингов (диагональных матриц с конечными блоками на главной диагонали) над полем комплексных чисел [175]. В последнее время В. Тольстых решил проблему Бергшмана, показывая, что существует натуральное k такое, что полная линейная группа конечно столбцовых матриц над телом имеет конечную ширину не больше k для произвольного множества образующих [33].

С теоретикомодельной точки зрения группа $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$ и её подгруппы исследовались в работах П. Неймана, Д. Макферсона, Д. Эванса, С. Томаса, Дж. Бергмана, М. Дросте, Р. Гебеля, В. Толстыха и других. Они рассматривали в группе $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, K)$ в случае, когда K — поле, подгруппы малого (счетного) индекса [82] и максимальные подгруппы [130], направление тесно связанное с исследованием максимальных подгрупп конечных простых групп. Выяснилось, что некоторые типы максимальных подгрупп в конечномерном случае являются такими и бесконечном случае. Но с другой стороны появляются новые типа максимальных подгрупп естественные для бесконечного случая, как стабилизаторы максимальных идеалов или фильтров, почти стабилизаторы подмножеств той же мощности, что их дополнения. Отметим тоже, что группа $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, K)$ не является суммой счетной возрастающей последовательности своих собственных подгрупп, это вытекает с того, что она удовлетворяет свойству кофинальности.

После завершения классификации конечных простых групп внимание математиков привлек вопрос описания счетных локально конечных простых групп. Эти вопросы рассматривались в работах Хирша, Кловса, О. Кегеля, Верфрица, Р. Хартли, А. Залесского, У. Мейерфранкенфельда, Ф. Лайнена, О. Пульизи, Б. Лашингера и других. Получено описание счетных локально конечных подгрупп в группе $\mathrm{GL}_{bc}(\infty, K)$ над конечным полем K. Оказалось, что они являются обобщениями простых конечных групп классических серий [94].

Еще один важный аспект в исследовании линейных групп связан с изучением решетки $\mathrm{Lat}(G_0, G)$ подгрупп группы G, содержащих некоторую выделенную подгруппу G_0, — такую задачу обычно называют *описанием промежуточных подгрупп*. Интерес к этой задаче тесно соприкасается с проектом классификации максимальных подгрупп конечных простых групп, в течение последних десятилетий находящемся в центре внимания ведущих специалистов — Г. Зейца, М. Либека, Я. Саксла, А. Коэна, Д. Тестерман и многих других. Особенно бурно этот раздел теории конечных групп развивается после появления ставшей уже классической работы М. Ашбахера, где было доказано, что каждая максимальная подгруппа конечной линейной группы либо принадлежит одному из восми описанных классов, либо является почти простой группой в некотором абсолютно неприводимом представлении. Для линейных групп над конечным полем, полностью эта проблема была решена П. Клейдманом и М. Либеком. Для бесконечных полей, а также для разных типов колец, вопросы, связанные с описанием решетки промежуточных подгрупп в контексте классов Ашбахера, рассматривались во многих сотнях работ, авторами которых являются Ж. Титс, А. Борель, Д. Дьокович, В.П. Платонов, К. Судзуки, Ли Шанчжи, Н.С. Романовский, Р.А. Шмидт, А.В. Степанов, Ли Фуан и многие другие. Следует отметить проблему описания надгрупп расщепимого максимального тора. Один из основных результатов представляемой работы относится к этому направлению изучения линейных групп.

Для групп Шевалле над алгебраически замкнутым полем K описание промежуточных подгрупп рассматриваемого типа с использованием методов алгебраической геометрии было получено А.Борелем и Ж.Титсом: если G_0 — расщепимый максимальный тор группы $G = \mathrm{G}(\Phi, K)$, то для каждой подгруппы H решетки $\mathrm{Lat}(G, G_0)$ существует такое единственное замкнутое подмножество $S \subseteq \Phi$, что выполняются включения

$$\mathrm{G}(S) \leq H \leq \mathrm{N}(S),$$

где под $\mathrm{G}(S)$ понимается подгруппа, порожденная тором G_0 и всеми корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$ при $\alpha \in S$ и $\xi \in K$, а под $\mathrm{N}(S)$ — нормализатор $\mathrm{G}(S)$ в группе G. Такая специфическая классификация весьма обычна при описании промежуточных подгрупп — удобно называть ее стандартной, говоря при этом, что подгруппы $\mathrm{G}(S)$ служат ее базисом.

При переносе теоремы Бореля–Титса на другие поля и кольца в работах разных авторов возник и далее стал общеупотребительным подход, связанный с рассмотрением особых матриц из идеалов и соответствующих им подгрупп — сетей идеалов и сетевых подгрупп, как они стали называться в работах З.И. Боревича и его учеников ленинградской-петербургской школы. Как частные случаи работы большинства упомянутых ниже авторов включают в себя алгебраически замкнутые и конечные поля, но техника доказательства в них совершенно отличается от методов алгебраической геометрии и конечных групп. Отметим, что И.Р. Шафаревич изучал бесконечномерные линейные группы методами алгебраической геометрии [34]. З.И. Боревич доказал, что если K — произвольное поле, содержащее не менее 7 элементов, то решетка надгрупп диагональной группы $\mathrm{D}(n, K)$ в $\mathrm{GL}(n, K)$ допускает стандартное описание, базисом которого служат D-сетевые подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$ [4]. В дальнейшем З.И. Боревич и Н.А. Вавилов доказали, что решетка $\mathrm{Lat}(\mathrm{D}(n, R), \mathrm{GL}(n, R))$ описывается стандартно и для большинства полулокальных колец R (не обязательно коммутативных) [6].

В представляемой монографии мы обобщаем сразу несколько из упомянутых здесь результатов. Следует сказать, что техника, развитая для этих вопросов, позволяет получить соответствующие результаты и для других классических групп бесконечных матриц.

Таким образом, вопросы, рассматриваемые в нашей монографии, тесно связаны с общим развитием структурной теории бесконечномерных линейных групп. Это и определяет актуальность темы монографии.

Основной целью работы является исследование структуры подгрупп бесконечных матриц над произвольным ассоциативным кольцом. В рамках этой задачи требуется разработать технику работы с бесконечными матрицами. В этом же контексте следует построить аналог теории сетевых подгрупп, выработать правильные определения и методы.

В работе используются аналоги традиционных методов теории линейных групп над кольцами, включая метод исследования подгрупп линейных групп при помощи сетей идеалов, примененные в случае бесконечных матриц, выработаны новые понятия для работы с бесконечными матрицами (понятие роста), усовершенствованы методы работы с понятиями раннее использованными в исследовании бесконечных матриц (стринги). Применяются также общие теоретико-групповые и теоретико-кольцевые методы.

В монографии получены следующие новые научные результаты:

- введено в рассмотрение новое понятие роста натуральнозначных функций, позволяющее классифицировать подгруппы бесконечных матриц и других счетномерных алгебраических структур, описано свойства решетки ростов;
- обобщены на случай произвольного ассоциативного кольца результаты о порождении стрингами важных классов групп бесконечных матриц, вычислена ширина относительно стрингов некоторых подгрупп группы бесконечных матриц;
- описаны с использованием бесконечных аналогов сетей и сетевых подгрупп промежуточные подгруппы группы конечностолбцовых бесконечных матриц (содержащие клеточно-диагональные матрицы), треугольных матриц и Группы Маклейна (содержащие диагональные матрицы), описаны параболические подгруппы группы Вершика—Керова;
- построено новое представление свободной группы бесконечными унитреугольными матрицами над кольцом характеристики нуль и $p > 2$, упрощающее доказательства классических теорем о свободных группах;
- доказано, что в группе бесконечных унитреугольных матриц над конечным полем почти все k-порожденнные подгруппы являются свободными группами ранга k;

- доказано, что в полугруппе бесконечных треугольных матриц над конечным полем почти все k-порожденнные подполугруппы являются свободными полугруппами ранга k;

- описаны новые подгруппы группы автоморфизмов свободной группы счетного ранга и относительно свободных групп, определено естественные для них множества порождающих;

- охарактеризованы свойства двух классов подгрупп группы автоморфизмов корневого графа счетной валентности.

Монография носит теоретический характер. Введенные в ней понятия, развитые методы и полученные результаты применимы при исследовании структуры групп бесконечных матриц над различными классами колец. Материал, изложенный в монографии, может быть использован при чтении специальных курсов по линейным группам.

Результаты, полученные в представляемой работе, докладывались на международной алгебраической конференции, посвященной памяти З.И.Боревича (Санкт-Петербург 2002), на международной конференции по теории групп "Groups St. Andrews"(Сант Эндрюс, Великобритания, 2001 и Оксфорд 2005), на международных конференциях "Groups and Group Rings"(Ustron 2003, Bedlewo 2005), на конференции по геометрической теории групп (Хайфа 2000), на алгебраических конференциях в Украине (Ужгород 2001, Киев 2001, Львов 2003), на конференции посвященной памяти Д.А. Граве (Киев 2002). Результаты работы докладывались на алгебраических семинарах университетов Вирцбурга (2001), Эрланген (2001), Афин (2002), Барселоны (2003), Варшавы (2002б 2004б 2006), Вроцлавия (2004), а также на петербургском городском алгебраическом семинаре им. Д.К. Фаддеева.

Практически все результаты, полученные в монографии, опубликованы в работах [12]–[14], [91], [100]–[107].

Монография состоит из введения, четырех глав (содержащих в общей сложности 19 параграфов) и списка литературы, насчитывающего 180 наименований. Общий объем работы 133 страницы текста.

Приведем основные определения и полученные результаты в том порядке, в каком они расположены в представляемой работе.

В первой главе мы подробно описываем основные объекты исследования. Она посвящена определению группы бесконечных конечностолбцовых матриц. Приведены основные результаты о ее подгруппах. Введено понятие роста натуральнозначных функций, описано его свойства и применено для построения новых семейств подгрупп. Исследована ширина подгрупп относительно семейства стрингов.

В § 1 мы напоминаем определение кольца бесконечных матриц и подробно его обсуждаем. Мы даем примеры бесконечных матриц, которые обратимы и имеют много обратных, и в то же время являющимися делителями нуля. Кроме того мы приводим примеры верхних треугольных матриц, обратные к которым являются нижние треугольные и которые имеют необратимые элементы на диагонали либо даже нули.

Группа бесконечных матриц описывается в § 2, приведены определения известных ее подгрупп. Мы доказываем, что группа $\mathrm{GL}(R)$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{GL}_{rc}(\mathbb{N}, R)$ (предложение 2).

В § 3 мы напоминаем определение и основные свойства стабильной элементарной группы (порожденной элементарными трансвекциями) и относительной стабильной элементарной группы. Мы вводим понятие $SL-$ трансвекции (которая отличается от единичной матрицы только в одной строке вне диагонали) и обобщенной трансвекции (блочно-диагональной матрицы. у которой все блоки суть элементарные трансвекции). Эти обобщения элементарной трансвекции более естественны в случае бесконечных матриц. Для обобщенных регулярных трансвекций мы находим коммутационные формулы.

Мы исследуем строение и нормальные подгруппы группы $UT_{bc}(\infty, R)$ состоящей из всех унитреугольных матриц, у которых все ненулевые элементы над главной диагональю находятся в конечном множестве строк.

В § 4 вводится понятие роста натуральнозначных функций и описываются основные его свойства. В следующем § 5 понятие роста применяется для описания большого класса подгрупп группы бесконечных матриц. Понятие роста играет ключевую роль в теории групп. Для фиксированного множества образующих S группы G (симметричного и не содержащего 1) мы определяем длину элемента g как расстояние от g до 1 в графе Кэли группы G по отношению к S. Пусть $f(n)$ — количество элементов группы G в шаре радиуса n с центром в 1. Функция f неубывающая и может быть распространена на все неотрицательные вещественные числа. На множестве всех таких неубывающих функций можно определить некоторое отношение эквивалентности, классы которого называются ростами на G. Рост не зависит от выбора S и f, и, таким образом, является инвариантом самой группы G.

Для конечно порожденной бесконечной группы G выполняется следующая трихотомия: G имеет либо полиномиальный рост, либо промежуточный рост, либо экспоненциальный рост. По теореме М. Громова [89] класс групп полиномиального роста — это в точности класс всех виртуально нильпотентных групп. Класс групп экспоненциального роста содержит, например, все неэлементарные гиперболические группы [87]. Альтернатива Ж. Титса [164] утверждает, что среди линейных групп нет групп промежуточного роста. Однако, Р. Григорчук [15], [16] открыл примеры групп промежуточного роста, таким образом, решив знаменитую проблему Дж. Милнора [137]. В настоящее время имеется развитая теория таких групп.

Для алгебр имеется аналог понятия группового роста, с примерно такой же конструкцией (под *алгеброй* мы будем понимать ассоциативную алгебру с единицей над полем). Пусть A — конечно порожденная алгебра над полем $\mathbb{F}$ с множеством образующих $a_1, \ldots, a_m$. Положим $V^0 = \mathbb{F}$ и для $n \geq 1$ обозначим через V^n подпространство, порожденное одночленами степени n в образующих $a_1, \ldots, a_m$. Тогда $A = \cup_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n := \mathbb{F} + V + V^2 + \ldots + V^n$. Функцию $d_V(n) = \dim_{\mathbb{F}}(A_n)$ можно рассматривать как функцию из Φ – множества всех возрастающих положительнозначных функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Для $f, g \in \Phi$ положим $f \leq^* g$ если и только если существуют $c, m \in \mathbb{N}$ такие, что $f(n) \leq c \cdot g(nm)$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$, и $f \sim g$ если и только если $f \leq^* g$ и $g \leq^* f$. Класс эквивалентности $[f] \in \Phi/\sim$ функции $f \in \Phi$ называется ростом f. Порядок $\leq^*$ индуцирует частичный порядок $\leq$ на $\Phi/\sim$. Рост $[d_V(n)]$ является инвариантом алгебры A.

Обычно явно найти рост алгебры довольно трудно. Кроме того, рост не приспособлен для рассмотрения подалгебр, гомоморфных образов и расширений Оре. Таким образом, интереснее рассматривать асимптотическое поведение возрастающих функций. В действительности, самым полезным для практических целей понятием размерности является размерность Гельфанда—Кириллова (называемая также GK-размерностью), которая определяется следующим образом [120]

$$GK\dim(A) = \sup_V \overline{\lim} \log_n d_V(n),$$

где супремум берется по всем конечномерным подпространствам V алгебры A. GK-размерность может равняться 0, 1, любому вещественному числу из интревала $[2, \infty)$ или ∞.

В [96], [97], [144] Дж. Ханна и К.С. О'Мира вводят и изучают новое понятие роста алгебр. Это понятие не использует рост алгебр в терминах образующих, но основано на подходящих представлениях бесконечных матриц. По этому поводу стоит отметить, что конечные матрицы играют совершенно выдающуюся роль в теории представлений групп и алгебр. В то же время бесконечные матрицы практически не используются, так как для них нет очевидных аналогов таких инструментов, как определитель, след или ранг. Из результата К. Гудирла, П. Менала и Х. Монкази [88] следует, что каждую счетно-мерную алгебру A над полем F можно вложить в алгебру $A_{rc}(\infty, F)$, строчно и столбцово конечных матриц над F. В дальнейшем мы зафиксируем такое вложение и отождествим A с ее образом в этом вложении. Все ненулевые матричные элементы матриц из A расположены вблизи главной диагонали. Теперь можно спросить, насколько близко к главной диагонали можно собрать эти элементы? Ханна и О'Мира ввели количественную меру этого, кривую роста, которая ограничивает ширину полосы элемента алгебры.

Мы говорим, что $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $f(n) = n + h(n)$, является кривой роста для $a = (a_{ij}) \in A$, $i, j \in \mathbb{N}$, если $a_{nk} = 0 = a_{kn}$ для всех $k > f(n)$. Рост элемента a не превосходит $h(n)$, или, короче, a – элемент роста $O(h(n))$, если найдется такое $c > 0$, что $c \cdot (n + h(n))$ является кривой роста для a. Алгебра A имеет рост $O(h(n))$, если каждый элемент $a \in A$ имеет рост $O(h(n))$. Рост порядка $O(n)$ называется линейным. Основной результат [97] можно сформулировать следующим образом: каждую счетно-мерную алгебру A над полем F можно вложить в $A_{rc}(\infty, F)$ как подалгебру линейного роста. Это позволяет определить размерность в полосе (или ленточную размерность) счетно-мерной алгебры как

$$\inf\{r \in \mathbb{R}, R \geq 0 \mid A \text{ вкладывается в } A_{rc}(\infty, F) \text{ с ростом } O(n^r)\}.$$

В [144] доказано, что над произвольным полем F размерности в полосе конечно порожденных алгебр в точности заполняют единичный интервал $[0, 1]$. Это показывает, что размерность в полосе ведет себя более регулярно, чем GK-размерность. Размерность в полосе свободной алгебры с двумя образующими равна 0, в то время как ее GK-размерность равна ∞. Таким образом, размерность в полосе этой алгебры принимает наименьшее возможное значение, в то время как GK-размерность — наибольшее возможное значение. Это показывает, что размерность в полосе может приводить к совершенно другому взгляду на вещи, в особенности для бесконечной GK-размерности. Некоторые размерности в полосе выражают интересные чисто кольцевые свойства алгебр (см. [97],[11], [31], [120] по поводу деталей).

К сожалению, в общем случае это понятие размерности в полосе не очень полезно, так как множество

$$B(r) = \{a \in A_{rc}(\infty, F) \mid a \text{ имеет рост } O(n^r)\}$$

является подалгеброй в $A_{rc}(\infty, F)$ только если $r \in [0, 1]$. Ханна и О'Мира сформулировали задачу нахождения подходящего обобщения этого понятия для несчетномерных алгебр.

В параграфах 3 и 4 мы решаем эту задачу. А именно, мы обобщаем понятие размерности в полосе и роста групп. Это обобщение основано на идее, аналогичной той, которая использовалась в работе [21] при изучении групп перестановок. Мы рассматриваем неубывающие функции из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ в $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Классы этих функций относительно подходящего отношения эквивалентности называются ростами. Мы определяем две естественные операции на множестве Ω^* ростов. По отношению к этим операциям Ω^* образует решетку с интересными алгебраическими свойствами. Именно

Теорема 1. *Множество ростов Ω^* с операциями $\omega_1 \vee \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2$ образует решетку, обладающую следующими свойствами.*

a) *В решетке Ω^* существует наименьший элемент ω_0 и наибольший элемент ω_∞.*

b) *Для любого роста ω такого, что $\omega < \omega_\infty$ существует такая строго возрастающая последовательность ростов $\omega = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots$, что каждый рост ω_{i+1} экспоненциально больше ω_i, $i = 0, 1, \ldots$*

c) *Решетка Ω^* плотная, т.е. для любых $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*$, существует такой рост $\omega_3 \in \Omega^*$ что $\omega_1 < \omega_3 < \omega_2$.*

d) *В решетке Ω^* не существует ни атомов, ни коатомов.*

e) *Для всех ω, $\omega_0 < \omega < \omega_\infty$, существует несчетное семейство попарно несравнимых ростов, которые не сравнимы с ω (несчетные антицепи).*

f) *Решетка Ω^* дистрибутивная (и, таким образом, модулярная).*

g) *Решетка Ω^* полная.*

С каждой бесконечной матрицей a можно связать нижнюю и верхнюю граничные функции $f(n)$ и $g(n)$. В некотором смысле функции f и g дают границы для ширины полосы вдоль главной диагонали, содержащей все ненулевые элементы матрицы a. Иными словами, все ненулевые элементы зажаты между двумя кривыми, определенными функциями f, g.

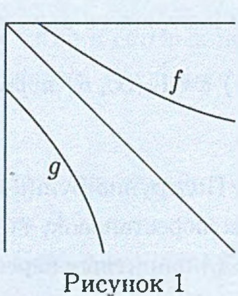


Рисунок 1

Эти границы естественным образом согласованы со сложением и умножением матриц. Это позволяет формулировать наши результаты на языке универсальной

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

алгебры (см. [62]), так чтобы совместно охватить полугруппы, группы, кольца, алгебры и алгебры Ли.

В терминах ростов, связанными с данными нижней и верхней границами мы определяем четыре подмножества универсальной алгебры $X_c(\infty, R)$ конечностобцовых матриц. Эти подмножества являются универсальными подалгебрами (теорема 2).

Кроме того, мы определяем две решетки подалгебр, изоморфных решетке Ω^* (теорема 3). Мы докажем, что для каждого подмножества Y множества $X_c(\infty, R)$ существуют наименьшие росты ω_1, ω_2 такие, что Y соддержится в $X(\omega_1, \omega_2)$ — подалгебре, определенной этими ростами (теорема 4). Это наблюдение является основой для определения роста в полосе (или просто роста). Мы установляем основные свойства роста.

В § 6 исследуется понятие стринга и порождаемость стрингами разных подгрупп группы бесконечных матриц. Мы доказываем результаты о ширине групп подстановок $\mathrm{Sym}(\omega) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N} \cap \mathrm{GL}(\omega)$ и верхнетреугольных матриц $\mathrm{UT}(\omega) = \mathrm{UT}_r(\infty, R) \cap \mathrm{GL}(\omega)$ относительно соответсвевующих стрингов. Мы говорим, что ширина группы G относительно порождающего множества S равна k, если каждый элемент из G является произведением не больше чем k элементов из S и существует такой элемент, который не является произведением меньшего числа элементов из S.

Матрица $a \in \mathrm{GL}_c(\infty, R)$ называется *стринг-матрицей* или *стрингом*, если существует бесконечная последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел такая, что при естественном диагональном вложении этого произведения в $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ имеем включение $a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{GL}(n_i, R)$. Бусиной называем стринг, у которого только один неединичный блок на диагонали.

Иными словами, a является блочно-диагональной матрицей с блоками размерностей $n_1, n_2, \ldots$ по диагонали. Символом $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$ обозначим семейство всевозможных конечных произведений стрингов. Очевидно, что группа $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$ содержится в $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$. Главным результатом настоящего параграфа является

Теорема 5. *Группы* $\mathrm{Sym}(\omega)$, $\mathrm{UT}(\omega)$ *и* $\mathrm{GL}_b(\infty, R)$ *порождаются стрингами. Ширина групп* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *и* $\mathrm{UT}(\omega)$ *равна* 2.

Пусть $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \cap G(\widehat{\omega})$. Подгруппа $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}_0)$ называется группой финитных перестановок (подгруппой всех перестановок, которые сдвигают лишь конечное число элементов). Группа $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}_0)$ финитных перестановок нормальна в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ (предложение 13).

Инволюция $a \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ называется *элементарной*, если все 2-циклы в a имеют вид $(i, i+1)$. Группа $\mathrm{Sym}(\omega_0)$ порождается элементарными инволюциями (предложение 14).

Мы доказываем, что в случае поля группа $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, K)$ имеет ширину не больше 6 (предложение 17). Нам неизвестно, порождается ли группа $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ стрингами для произвольного кольца R. Но, группа порожденная стрингами всегда нормальна в $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ (предложение 18).

Кроме того, для любого коммутативного кольца R группа $\mathrm{E}(R)$ нормальна в $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$ (предложение 19).

Бесконечное произведение $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ элементарных трансвекций t_i называем обобщенной трансвекцией, если существует последовательность $\{n_i\}$ ($n_i > 1$) натуральных чисел такая, что для каждой трансвекции $t_i = t_{k_i,l_i}(\alpha)$ выполняется условие $n_1 + \ldots + n_{i-1} < k_i < l_i \leq n_1 + \ldots + n_i$.

Иными словами, $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{UT}(n_i, R) < \mathrm{UT}(\infty, R)$, и все t_i содержатся в соответствующих блоках $\mathrm{UT}(n_i, R)$ по главной диагонали.

Матрица $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ называется n-квазидиагональной, если $a_{ij} = 0$ для всех i, j таких, что $j - i > n$, и $a_{i,i+n} \neq 0$ для хотя бы одного индекса i. Мы говорим, что a квазидиагональна (или обобщенно якобиева или конечной ширины или ленточная), если a n-квазидиагональна для некоторого n. Все матрицы a из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ такие, что a и a^{-1} квазидиагональны, образуют подгруппу $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$.

Группа $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ порождается 1-квазидиагональными обобщенными трансвекциями (предложение 21).

Во второй главе понятия сети идеалов и сетевой подгруппы обобщаются на случай бесконечных матриц. Это позваляет применить эту технику к исследованию подгрупп группы конечностолбцовых бесконечных матриц, группы бесконечных верхних треугольных матриц, группы Маклейна, группы Вершика-Керова. Описывается тоже структура некоторых подгрупп содержащих только стринги.

В § 7 мы даем определение сетей и сетевых подгрупп в случае бесконечных матриц. Приводим основные их свойства. Исследуются прямые пределы сетей и сетевых подгрупп.

Пусть R произвольное ассциативное кольцо с единицей. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\quad i, j \in \mathbb{N}$, двусторонних идеалов кольца R, называется сетью идеалов в R, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subset \sigma_{ij}$ при всех значениях $i, j, r \in \mathbb{N}$. Сеть σ мы называем D-сетью, если $\sigma_{ii} = R$ при всех значениях i.

Для сетей σ и τ мы вводим отношение частичного порядка полагая $\sigma \leq \tau$ если $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ при всех значениях i, j. Легко видеть, что все сети в R относительно введенного частичного порядка образуют полную решетку с наименьшим элементом —

нулевой сетью (все идеалы нулевые) и наибольшей сетью — единичной сетью (все идеалы равны R).

Пусть $\mathrm{M}(\sigma)$ обозначает множество всех матриц $a \in \mathrm{M}_c(\infty, R)$, таких что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех значениях i, j. Если σ удовлетворяет $(\star)$, то $\mathrm{M}(\sigma)$ является кольцом, а множество $e + \mathrm{M}(\sigma) = \{e + a : a \in \mathrm{M}(\sigma)\}$ является мультипликативной системой. Ясно, что в случае D-сети σ множество $e + \mathrm{M}(\sigma)$ совпадает с $\mathrm{M}(\sigma)$.

Максимальная подгруппа группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ содержащаяся в $e+\mathrm{M}(\sigma)$ называется сетевой подгруппой соответствующей сети σ и обозначается $\mathrm{G}(\sigma)$. Если σ является D-сетью, то $\mathrm{G}(\sigma)$ называется также D-сетевой подгруппой.

Примерами сетевых подгрупп являются: группа верхних (или нижних) обратимых треугольных матриц, группа клеточно-диагональных обратимых матриц с фиксированными размерами клеток в частности группа диагональных матриц. В частности, единичная подгруппа и полная линейная подгруппа конечно столбцовых матриц — сетевые. Соответвующие им сети — это нулевая сеть (все идеалы нулевые) и единичная сеть (все идеалы совпадают с R).

Подгруппа $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, содержащимися в $\mathrm{G}(\sigma)$ называется элементарной сетевой подгруппой, соответсвующей сети σ, и обозначается через $E(\sigma)$. Для сети σ через $\mathrm{N}(\sigma)$ мы обозначаем нормализатор подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$.

В случае стабильной группы $\Gamma = \mathrm{GL}(R)$ определяем сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma)$ как пересечение $\mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{GL}(R)$, а символом $N_\Gamma(\sigma)$ обозначаем нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}(R)$. Мы доказываем

Предложение 24. *Пусть R — полулокальное кольцо, поля вычетов которого отличны от $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$ и $\mathrm{M}(2, \mathbb{F}_2)$. Тогда для любой подгруппы H стабильной линейной группы $\Gamma = \mathrm{GL}(R)$ содержащей все диагоналные матрицы существует единственная D-сеть идеалов σ такая, что $\Gamma(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}_\Gamma(\sigma)$.*

В § 8 дается описание подгрупп группы бесконечных конечностолбцовых матриц содержащих группу клеточно-диагональных матриц.

Пусть R комутативное кольцо с 1, R^* — группа обратимых элементов кольца R. Пусть ν — отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ такое, что все классы эквивалентности $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ конечны. Наименьший из порядков $|I_1|, \ldots, |I_n|, \ldots$ этих классов будем обозначать через h_ν. Если i и j эквивалентны относительно ν, то пишем $i \sim j$.

С эквивалентностью ν на $\mathbb{N}$ свяжем D-сеть $[\nu]$, определив ее условиями: $[\nu]_{ij}$ — единичный идеал R, если $i \sim j$, и $[\nu]_{ij}$ — нулевой идеал в противном случае. Соответствующую D-сетевую подгруппу $\mathrm{G}([\nu])$ обозначаем также через $\mathrm{D}(\nu)$. Группу $\mathrm{D}(\nu)$ будем называть группой клеточно-диагональных матриц заданного типа ν.

Элементарную сетевую подгруппу $E([\nu])$, соответствующую D-сети $[\nu]$ называем элементарной клеточно-диагональной группой типа ν и обозначаем также через $E(\nu)$.

Для произвольной D-сети σ определим на $\mathbb{N}$ эквивалентность ν_σ, считая индексы i и j эквивалентными относительно ν_σ тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = R$. Ясно, что $[\nu_\sigma] \leq \sigma$, так что $D(\nu_\sigma) \leq G(\sigma)$ и $E(\nu_\sigma) \leq E(\sigma)$. Очевидно также, что $D(\nu_\sigma)$ (соответственно $E(\nu_\sigma)$) — это наибольшая клеточно-диагональная группа, содержащаяся в $G(\sigma)$ (наибольшая элементарная клеточно-диагональная группа, содержащаяся в $E(\sigma)$). Для D-сети σ полагаем $h(\sigma) = h(\nu_\sigma)$.

Пусть H подгруппа группы $G = \mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ содержащая группу $E(\nu)$ элементарных клеточно-диагональных матриц типа ν, где $h(\nu) \geq 2$. С подгруппой H мы свяжем однозначно определенную D-сеть идеалов σ. Для упорядоченной пары различных индексов i и j через σ_{ij} обозначим совокупность тех элементов из $\alpha \in R$, для которых $t_{ij}(\alpha) \in H$. Положим дополнительно $\sigma_{ii} = R$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Построенная D-сеть идеалов σ называется D-сетью, ассоциированной с подгруппой H. Мы доказываем следующую

Теорема 6. *Пусть R произвольное коммутативное кольцо с единицей, $G = \mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ — полная линейная группа бесконечных конечно столбцовых матриц над R, ν — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}$, в котором все классы эквивалентности конечные и для которого $h(\nu) \geq 3$. Пусть $E(\nu)$ — элементарная клеточно-диагональная подгруппа типа ν, H — подгруппа в G, содержащая группу $E(\nu)$. Тогда существует и притом единственная D-сеть $\sigma \geq [\nu]$, такая, что*

$$\mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}(\sigma).$$

Сеть σ, для которой имеем последние включения является D-сетью ассоциированной с подгруппой H.

В § 9 дается описание подгрупп группы бесконечных верхних треугольных матриц $\mathrm{T}(\infty, R)$ содержащих (или нормализуемыех) стабильной группой диагональных матриц $\mathrm{D}(R)$, при некоторых ограничениях на ассоциативное кольцо R. Результаты настоящего параграфа опубликованы в [100].

Пусть R ассоциативное кольцо с единицей 1, R^* группа обратимых элементов кольца R. Группа $\mathrm{T}(\infty, R)$ состоит из всех бесконечных верхних треугольных матриц над кольцом R, у которых все диагональльные элементы обратимы, $\mathrm{D}(\infty, R)$

подгруппа всех ее диагональных матриц. Тогда стабильная группа $\mathrm{D}(R)$ состоит из всех диагональных матриц, у которых только конечное число элементов на диагонали не равно 1.

В этом параграфе мы рассматриваем только *верхние сети* σ для которых σ_{ij} тривиально для всех $i > j$. Если кроме того $\sigma_{ii} = R$ для всех $i \in \mathbb{N}$ мы называем σ *верхней* $D-$*сетью.*

Пусть $\mathrm{M}(\sigma)$ множество всех треугольных матриц a таких, что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$. Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ обозначает сетевую подгруппу, а $\mathrm{E}(\sigma)$ элементарную сетевую подгруппу группы $\mathrm{G}(\sigma)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\zeta)$, где $\zeta \in \sigma_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$.

Главным результатом параграфа является следующая

Теорема 7. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1 такое, что существует элемент $\theta \in R^*$ для которого $\theta - 1 \in R^*$ и R аддитивно порождается элементами R^*. Пусть H подгруппа группы $\mathrm{T}(\infty, R)$ содержащая $\mathrm{D}(R)$. Тогда существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца R такая, что*

$$\mathrm{D}(R) \cdot \mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{G}(\sigma).$$

Если кроме того подгруппа H содержится в стабильной треугольной группе $T(R)$, то $H = \mathrm{G}(\sigma)$.

При некоторых дополнительных условиях коммутативности мы можем доказать больше, именно

Теорема 8. *Если при предположениях Теоремы элемент θ принадлежит центру R^* и H является подгруппой группы $\mathrm{T}(\infty, R)$ нормализуемой подгруппой $\mathrm{D}(R)$, то существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ идеалов R такая, что $\mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{G}(\sigma)$.*

Очевидно, что θ принадлежит центру R^* если например R^* или R коммутативны.

В § 10 мы исследуем структуру нормальных подгрупп группы Маклейна с использованием сетей идеалов и сетевых подгрупп. Мы определим большую подрешетку Λ решетки нормальных подгрупп группы Маклейна при некоторых ограничениях на ассоциативное кольцо R. Эта подрешетка состоит из сетевых подгрупп соответсвующих нормальным сетям. В случае когда $R-$ поле, $|R| > 2$, при небольших ограничениях на множество идексов, Λ изоморфна решетке монотонных функций и не зависит от основного поля.

Пусть I — бесконечное линейно упорядоченное множество индексов и $\mathrm{T}_f(I,R)$ — группа всех $I\times I$ обратимых верхних треугольных матриц, только в конечном числе коэффициентов отличающихся от единичной матрицы. Обозначим через $\mathrm{D}_f(I,R)$ и $\mathrm{UT}_f(I,R)$ соответственно ее диагональную и унитреугольную подгруппы.

Группа $\mathrm{UT}_f(I,R)$ называется (обобщенной) группой Маклейна. Группы Маклейна служат как примеры в общей теории групп показывающие ограничения для многих результатов.

Пусть σ — сеть идеалов. Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ — сетевая подгруппа. Сеть σ называется *нормальной сетью* если для всех $i<r<j$, $i,j,r\in I$, мы имеем $\sigma_{ir}\subseteq\sigma_{ij}$ и $\sigma_{rj}\subseteq\sigma_{ij}$. Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ — сетевая подгруппа.

Главным результатом параграфа является

Теорема 10. *Пусть R ассоциативное кольцо с единицей 1, которое аддитивно порождается обратимыми элементами и такое, что 1 является суммой двух обратимых элементов. Пусть H подгруппа группы $\mathrm{UT}_f(I,R)$. Группа H является нормальной подгруппой группы $\mathrm{T}_f(I,R)$ тогда и только тогда, когда $H=\mathrm{G}(\sigma)$ для некоторой нормальной сети σ.*

Мы описываем нормальные подгруппы при помощи монотонных функций.

Пусть $R=K$ поле (или простое кольцо) такое, что $|K|>2$. Обозначим через $MF(I)$ множество всех функций $f: I\to I\cup\{\infty\}$ которые монотонные, т. е. для которых из $x<y$ следует, что $f(x)\le f(y)$. Для $\mathrm{G}(\sigma)$ ($\sigma-$ нормальная сеть) мы определим f_σ следующим образом: $f_\sigma(i)=$ минимальное j такое, что $\sigma_{ij}\neq 0$ и ∞ в остальных случаях. Если σ нормальная сеть, то $f_\sigma\in MF(I)$.

Множество $MF(I)$ является решеткой относительно операций

$$(f_\sigma\wedge f_\tau)(i)=\max\{f_\sigma(i),f_\tau(i)\},$$
$$(f_\sigma\vee f_\tau)(i)=\min\{f_\sigma(i),f_\tau(i)\}.$$

Мы имеем

Теорема 11. *Если K поле, $|K|>2$, и I удовлетворяет условию $(\star\star)$, то соответсвие $\mathrm{G}(\sigma)\mapsto f_\sigma$ определяет решеточный изоморфизм между решеткой $\Lambda=\{\mathrm{G}(\sigma)\in \mathrm{UT}_f(I,K):\sigma-$ нормальная сеть $\}$ и решеткой $MF(I)$.*

Отметим, что результаты и методы этого параграфа можно использовать до описания подгрупп группы $\mathrm{T}_f(I,R)$ содержащих $\mathrm{D}_f(I,R)$.

Теорема 12. *Пусть R ассоциативное кольцо с 1, которое аддитивно порождается обратимыми элементами и такое, что 1 является суммой двух обратимых* *элементов. Пусть H подгруппа группы $\mathrm{T}_f(I, R)$ содержащая $\mathrm{D}_f(I, R)$. Тогда существует единственная верхняя D-сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца R такая, что $H = \mathrm{G}(\sigma)$.*

§ 11 посвящен группе Вершика-Керова. Здесь показываем, что все параболические подгруппы группы Вершика-Керова $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ (т. е. подгруппы содержащие $T(\infty, R)$ — группу бесконечных верхнетреугольных матриц) являются сетевыми подгруппами для широкого класса полулокальных колец R.

Группа $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ определяется как подгруппа группы $\mathrm{GL_c}(\infty, R)$ состоящая из всех матриц имеющих конечное число ненулевых элементов ниже диагонали (ясно, что $T(\infty, R) < \mathrm{GL_{VK}}(R) < \mathrm{GL_c}(\infty, R)$). Она рассматривалась Вершиком и Керовым в случае конечного поля K в работе [10]. Она имеет применения в теории представлений. $\mathrm{GL_{VK}}(K)$ является бесконечномерной, локально компактной, вполне несвязной, аменабелной в топологическом смысле и унимодулярной группой. Стабильная полная линейная группа $\mathrm{GL}(K)$ является ее плотной подгруппой, фактор-группа $\mathrm{GL_{VK}}(K)$ по центру является топологически простой группой.

Мы получили чисто алгебраическое описание параболических подгрупп группы $\mathrm{GL_{VK}}(R)$. Главным результатом является

Теорема 14. *Пусть R полулокальное кольцо, в котором 1 является суммой двух обратимых элементов. Если H параболическая подгруппа группы $\mathrm{GL_{VK}}(R)$, то существует единственная T-сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов в R, такая, что $H = \mathrm{G}(\sigma)$.*

Используя эту теорему мы можем доказать стандартные свойства (смотри [54] §2) параболических подгрупп в $\mathrm{GL_{VK}}(R)$

Теорема 15. *Если R полулокальное кольцо, в котором 1 является суммой двух обратимых элементов, то:*

(i) *Если P_1, P_2 две параболические подгруппы в $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ и $gP_1g^{-1} \subset P_2$ для некоторого $g \in \mathrm{GL_{VK}}(R)$, то $g \in P_2$ и $P_1 \subset P_2$.*

(ii) *Любые две разные параболические подгруппы группы $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ не сопряжены.*

(iii) *Любая параболическая подгруппа самонормализуема.*

Пусть $\mathrm{Sym_{fin}}(\mathbb{N})$ обозначает регулярное матричное представление группы перестановок натуральных чисел с конечным иосителем. Мы имеем

Теорема 16. *Для любого поля K*

$$\mathrm{GL_{VK}}(K) = \mathrm{T}(\infty, K) \cdot \mathrm{Sym_{fin}}(\mathbb{N}) \cdot \mathrm{T}(\infty, K).$$

В § 12 мы определим два типа групп бесконечных матриц состоящее только из стрингов.

Пусть $x \in \mathrm{GL}(n, R)$. Обозначим через $\mathrm{D}(x)$ бесконечную блочно-диагональную матрицу $\operatorname{diag}(x, x, x, \ldots)$.

Мы положим

$$\mathrm{GL}^*(R) = \{\mathrm{D}(x) : x \in \mathrm{GL}(n, R), n \in \mathbb{N}\}.$$

Ясно, что $\mathrm{GL}^*(R)$ является группой.

Группа $\mathrm{GL}^*(R)$ имеет другое представление как прямый предел конечномерных групп. Пусть m, n натуральные числа таке, что m делит n $(m|n)$. Пусть ϕ_m^n естественное вложение группы $\mathrm{GL}(m, R)$ в группу $\mathrm{GL}(n, R)$ заданное равенством

$$\phi_m^n(x) = \operatorname{diag}(x, x, \ldots, x).$$

Это так называемые строго диагональные вложения. Ясно, что для любых натуральных k, m, n таких, что $m|n$ и $n|k$ мы имеем $\phi_m^k = \phi_n^k \circ \phi_m^n$. Сумма групп $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно этих вложений совпадает с прямым пределом $\lim(\mathrm{GL}(n, R), \phi_m^n)$ и равна $\mathrm{GL}^*(R)$. Отметим, что $\mathrm{GL}^*(R)$ отличается от стабильной линейной группы $\mathrm{GL}(R)$, которая является прямым пределом при вложениях $\psi_m^n(x) = \operatorname{diag}(x, 1, \ldots, 1)$.

Пусть Σ множество бесконечных последовательностей $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ натуральных чисел, таких, что $n_i \geq 2$ и $n_i | n_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Если $\xi = (n_1, n_2, \ldots)$, то ξ-гомогенной полной линейной группой называем прямый предел индуктивной системы $(\mathrm{GL}(n, R), \phi_m^n)$ где n, m пробегают только значения из последовательности ξ. Этот прямый предел будем обозначать $\mathrm{GL}(\xi, R)$ или $\mathrm{GL}(\xi)$. С каждой последовательностью ξ можем связать супернатуральное число $s(\xi)$ следующим образом: $s(\xi) = 2^{s_1} \cdot 3^{s_2} \cdot \ldots$, где s_i равно наибольшей степени числа p_i делящей все n_j или $s_i = \infty$ если такое число не существует. Оказывается, что прямые пределы однозначно определены числами $s(\xi)$. Разным супернатуралным числам отвечают неизоморфные пределы. Это легко следует из рассуждений работы [121].

Все ξ-моногенные группы в $\mathrm{GL}^*(R)$ составляют решетку изоморфную решетке супернатуральных чисел.

Решетка ξ-моногенных групп полная, дистрибутивная, имеет наименьший и наибольший элемент.

Мы описываем нормальные подгруппы и подгруппы содержащие диагональные матрицы в группе $\mathrm{GL}^*(R)$ и группе $\mathrm{GL}(\xi)$ используя соответсвующие элементарные группы и конгруэнцподгруппы.

III глава посвящена свободным подгруппам бесконечных унитреугольных групп. Известно, что конечномерные унитреугольные группы нильпотентны, а стабильная унитреугольная группа локально нильпотентна, тем самым они не содержат свободной подгруппы. Оказывается, что уже группа унитреугольных матриц содержит свободные подгруппы и их много, в точно определенном смысле.

В § 13 построено представление свободной группы ранга 2 бесконечными унитреугольными матрицами над кольцом целых чисел и кольцом вычетов по модулю p ($p > 2$). Это представление простое, а доказательства элементарны.

Во многих работах рассматривается ситуация, когда $\mathrm{gp}(a, b)$, подгруппа группы G порожденная элементами a, b, является свободной группой ранга 2. Обычно, G является группой конечномерных матриц [30], [81], перестановок счетного множества [76] или преобразований эвклидова пространства [167].

Простой пример (с простым доказательством) двух элементарных трансвекций $T_{12}(2)$, $T_{21}(2)$ порождающих свободную подгруппу был приведен Сановым [30]. Если A и B порождают свободную подгруппу в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, то используя диагональное вложение вида $\mathrm{diag}\,(A, I_1, I_1, \ldots)$ или $\mathrm{diag}\,(A, A, A, \ldots)$ мы получим изоморфные копии свободных групп в группе бесконечномерных матриц (I_n обозначает $n \times n$ единичную матрицу). Наши примеры свободных групп ранга 2 являются подгруппами группы $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$, группы всех верхних бесконечных унитреугольных матриц над $\mathbb{Z}$ и не могут быть получены с использованием диагональных вложений. Все группы $\mathrm{UT}(k, \mathbb{Z})$ ($k \in \mathbb{N}$) являются нильпотентными и не содержат свободной нециклической подгруппы. Таким образом, наши примеры являются самыми простейшими для унитреугольной группы. Отметим, что группа $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ является пронильпотентной как обратный предел групп $\mathrm{UT}(k, \mathbb{Z})$.

На самом деле, мы покажем больше. Бесконечная верхняя унитреугольная матрица $A = (a_{ij})$ называется $m-$*квазидиагональной* если $a_{ij} = 0$ для $j > i + m$ и $a_{k,k+m} \neq 0$ для некоторого k. Матрица A называется *квазидиагональной* если она $m-$квазидиагональной для некоторого m. Символом $\mathrm{UT}_b(\infty, \mathbb{Z})$ обозначим подгруппу группы $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ состоящую из всех матриц A таких, что A и A^{-1} являются квазидиагональными. Символом $A_{[s]}$ обозначим подматрицу матрицы A, которую получаем выбрасыванием первых s строк и первых s столбцов матрицы A. Положим $\mathrm{res}(A) = \{A, A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots\}$. Множество $\mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, \mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z}) : |\mathrm{res}(A)| < \infty$ and $|\mathrm{res}(A^{-1})| < \infty\}$ является подгруппой.

Пусть $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $a = \mathrm{diag}\,(a_2, a_2, a_2, \ldots)$, $b = \mathrm{diag}\,(1, a_2, a_2, \ldots)$.

Теорема 17. *Группа* $\mathrm{gp}(a,b)$ *является свободной группой ранга* 2 *в группе* $\mathrm{UT}_b(\infty,\mathbb{Z})\cap\mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty,\mathbb{Z})$.

Приведем теперь пример свободной подгруппы в модулярном случае. Пусть $\varphi_p : \mathrm{UT}(\infty,\mathbb{Z}) \to \mathrm{UT}(\infty,p)$ канонический гомоморфизм по модулю p унитреугольной группы (p - простое число). Из Теоремы 17 следует

Теорема 18. *Если* $\mathrm{gp}(a,b)$ *группа из Теоремы 17, то* $\mathrm{gp}(\varphi_p(a),\varphi_p(b))$ *является свободным произведением* $C_p * C_p$ *двух циклических групп порядка* p.

Следствие 7. *Для любого простого* $p>2$, *группа* $\mathrm{UT}_b(\infty,p)\cap\mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty,p)$ *содержит свободную подгруппу ранга* 2.

Отметим, что свободные подгруппы группы $\mathrm{UT}(\infty,q)$ были построены на языке конечных автоматов в работе Алешина [2] для $q=2$ (доказательство там неполное), в работе Бруннера и Сидки [55] для $q=2^n$ ($n\geq 2$) и в работе Олийныка [25] для $q=2,3$. Работа Олийныка и Сущанского [27] содержит первый пример двух бесконечных матриц, которые порождают свободную подгруппу в $\mathrm{UT}_b(\infty,2)\cap\mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty,2)$.

Наше представление свободной группы имеет техническое преимущество в отношении к представлениям свободной группы поворотами трехмерного пространства (Хаусдорф) [167], формальными рядами (Магнус) [132] или квадратными матрицами степени 2 (Санов) [30]. Используя это представление в § 14 даются совсем простые доказательства аппроксимируемости свободных групп нильпотентными группами (теорема 20 — Магнус) и конечными p-группами (теорема 21 — Ивасава).

Напомним, что группа G аппроксимируется группами со свойством P, если для каждого элемента $g\in G$, $g\neq 1$, существует нормальная подгруппа N_g группы G, не содержащая g и такая, что факторгруппа G/N_g обладает свойством P. Иначе говоря, G аппроксимируется группами со свойством P, если все нормальные подгруппы, чьи факторгруппы обладают свойством P пересекаются по единице.

Мы даем тоже простое доказательство того факта, что коммутант 2–порожденной свободной группы является счетно порожденной свободной группой (теорема 19 — Леви).

В § 15 доказывается, что почти все k-порожденные подгруппы группы бесконечных унитреугольных матриц над конечным полем являются свободными группами ранга k.

Пусть $G=\mathrm{UT}(\infty,p^s)$ группа всех бесконечных (индексированных множеством $\mathbb{N}$) верхних унитреугольных матриц над конечным полем порядка p^s (p - простое число). Множество N_m всех матриц a из G таких, что первые m столбцов a такие, как у единичной матрицы e, составляет нормальную подгруппу группы G. Ясно, что $|G : N_m| < \infty$ и G является проконечной группой как обратный предел групп $G/N_m \simeq \mathrm{UT}(m, p^s)$ [171], [146]. Проконечная топология индуцирует метрику $d(x, y)$, относительно которой группа G является полным метрическим пространством. То же самое верно и для группы $G^k = G \times \ldots \times G$ если рассматривать произведение метрик $d(x, y)$. Если $x \in G^k$, то символом $\langle x \rangle$ обозначим подгруппу группы G порожденную всеми координатами элемента x. Положим

$$F = \{x \in G^k \mid \langle x \rangle \text{ является свободной группой ранга } k\}.$$

Подмножество метрического пространства называется нигде не плотным, если его дополнение содержит открытое, плотное подмножество. Сумма счетного семейства нигде не плотных множеств называется множеством первой категории (в смысле Вэра). Теорема Вэра утверждает, что в полном метрическом пространстве дополнение множества первой категории является плотным множеством. Это значит, что в таком пространстве множества первой категории маленькие, например все пространство не может быть представлено в виде суммы счетного семейства множеств первой категории.

В работе [81] Эпстейн показал, что почти все $k-$порожденные подгруппы связной, неразрешимой, конечномерной группы Ли являются свободными группами ранга k, здесь выражение почти все интерпретируется используя натуральную меру Хаара на группе. В работе [76] Диксон показал, что почти все $k-$порожденные подгруппы в группе подстановок счетного множества являются свободными группами ранга k в натуральной топологии определенной на группе подстановок. Ватачаржи получила аналогичные результаты в [53] для обратных пределов сплетений нетривиальных групп. Мы доказываем

Теорема 22. *Почти все $k-$порожденные подгруппы в группе $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ являются свободными группами ранга k, в том смысле, что множество $G^k \setminus F$ является множеством первой категории в G^k.*

Эта теорема показывает принципиальное отличие строения бесконечномерной унитреугольной группы $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$. Отметим, что конечномерная унитреугольная группа $\mathrm{UT}(m, p^s)$ конечна, а стабильная унитреугольная группа $\mathrm{UT}_\omega(p^s)$, как прямый предел конечных групп $\mathrm{UT}(m, p^s)$ при натуральных вложениях, локально конечная, тем самым они не содержат никаких свободных нециклических подгрупп.

Группа $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит тоже много интересных несвободных подгрупп, например Нотингеймскую группу. Известно, что любая счетно порожденная про-p-группа вложима в $\mathcal{N}$ [64], и тем самым в $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$. В частности, любая конечно порожденная резидуально конечная p-группа вложима в $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$.

Используя результат Гарсайда и Найта мы усиливаем наш результат доказывая, что почти все счетно порожденные подгруппы группы $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ являются свободными подгруппами счетного ранга и группа $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит недискретную свободную подгруппу ранга два (следствие 8).

Наше доказательство Теоремы 22, в отличии от доказательств в работах [53], [76]-[86], использует конкретные примеры свободных подгрупп. Оно вытекает из существования в G конкретной счетной подгруппы, в которой много (обилие) свободных подгрупп. Именно

Теорема 23. *Группа $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит счетную подгруппу H такую, что пересечение H^k с любым открытым шаром в G^k содержит свободную подгруппу ранга k, заданную конкретными порождающими.*

В § 16 доказываются аналогичные результаты для случая полугруппы бесконечных треугольных матриц.

Многие вопросы о существовании свободных подполугрупп в разных структурах пока не решены (все рассматриваемые нами свободные полугруппы некоммутативные). Макар-Лиманов спросил в [134] когда мультипликативная группа тела содержит свободную подполугруппу. Клейн поставил такой вопрос для области целостности [119] (смотри также [65] для частичного ответа и ссылок). Если данная полугруппа S имеет свободную подполугруппу, то S не удовлетворяет никакому полугрупповому тождеству. Вопрос, верно ли обратно, пока открыт. В работе [142] Окнински и Сальва получили положительный ответ в случае линейной полугруппы над конечно порожденным полем.

Ввиду этих результатов, интересно исследовать свойства множества свободных подполугрупп данной полугруппы. Олийнык показал в [26], что почти все конечно порожденные подполугруппы полугруппы автоматных преобразований являются свободными. Мы покажем сейчас, что в точно определенном смысле, почти все $k-$порожденные подполугруппы мультипликативной полугруппы бесконечных верхнетреугольных матриц над конечным полем F являются свободными полугруппами ранга k. Этот результат интересен, так как конечномерные полугруппы верхних треугольных матриц над конечным полем конечны, а их прямый предел при естественных вложениях локально конечен. Это значит, что они не содержат свободных подполугрупп.

Главным результатом является

Теорема 24. *Почти все k-порожденные подполугруппы полугруппы $S = \mathcal{T}(\infty, p^r)$ являются свободными полугруппами ранга k, иначе говоря множество $S^k \setminus F$ является множеством первой категории в S^k.*

В IV главе мы применяем аналоги понятий введенных в предыдущих разделах к исследованию других "счетномерных"алгебраических структур, а именно группы автоморфизмов свободной группы счетного ранга, группы автоморфизмов корневого дерева счетной валентности, ассоциативной алгебры и алгебры Ли бесконечных матриц.

В § 17 рассматриваются подгруппы автоморфизмов свободной группы счетного ранга. Группа автоморфизмов свободной группы конечного ранга была исследована во многих работах. Я. Нильсен в [141] получил ее представление используя элементарные автоморфизмы называемые теперь автоморфизмами Нильсена. Его метод инициировал систематические исследования в этой области. Красивый обзор полученных результатов можно найти в [132] и [126].

По сравнении с конечным случаем группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ свободной группы счетного ранга исследована слабо. Проблема классификации ее подгрупп очень трудная. Известны только некоторые ее естественные подгруппы и изолированные результаты. Группа $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ очень большая, так как она содержит как подгруппу группу $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ всех подстановок натуральных чисел. С другой стороны известно [77], что $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$, мы получаем еще одну большую подгруппу.

Интересные свойства $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ связаны со свойствами самой свободной группы F_∞ со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots$. Например F_∞ обладает свойством кофинального базиса (*basis cofinality property*) [126], т. е. для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_\infty$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $r \in \mathbb{N}$ и $\beta \in Aut(\langle x_1, \ldots, x_r \rangle)$ такие, что $r \geq n$ и $\beta(x_i) = \alpha(x_i)$ для $i = 1, \ldots, n$ (здесь $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ обозначает подгруппу порожденную $x_1, \ldots, x_r$). Группа F_∞ имеет тоже свойство малого индекса *the small index property*, т. е. для любой подгруппы Λ индекса меньшего чем $2^{\aleph_0}$ в группе $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ существует конечное подмножество Y группы F_∞ такое, что поточечный стабилизатор множества Y в $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ содержится в Λ (обратное утверждение очевидно). Из этого результата следует, что $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ не является суммой (возрастающей последовательности) счетного множества собственных подгрупп [56].

Решетка подгрупп группы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ тоже исследована слабо. Известны естественные подгруппы содержащие внутренние, финитарные, ограниченные, триангулярные, подстановочные и диагональные автоморфизмы. Но даже для подгруппы ограниченных автоморфизмов не известна никакая подходящая система порождающих. Д. Солитар выдвинул гипотезу [69], что эта группа порождается бесконечными элементарными одновременными (симультанными) автоморфизмами Нильсена, но эта гипотеза пока не доказана. Отметим, что в бесконечном случае обычные автоморфизмы Нильсена порождают только подгруппу $Aut_{fin}F_\infty$ содержащую только те автоморфизмы, которые действуют нетривиально только на конечном числе образующих [126].

В этом параграфе мы строим новые подгруппы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ и описываем некоторые их свойства. Стандартное понятие ограниченности автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_\infty$ состоит в существовании верхней грани n на длину всех редуцированных слов вида $\alpha(x_i)$ и $\alpha^{-1}(x_i)$. Мы рассматриваем ограниченность с совсем другой точки зрения. Мы требуем только, чтобы каждый свободный порождающий x_j появляющийся в $\alpha(x_i)$ находился вблизи x_i, в смысле, что $|i-j|$ не очень большое. Отметим, что сумма экспонент порождающей x_j в $\alpha(x_i)$ может быть произвольной. Это очень различается от понятия ограниченности введенного в [69]. Мы вводим понятие стринга, которое реализует наше понятие ограниченности. Стринги являются аналогами бесконечных блочно-диагональных матриц с конечными блоками на главной диагонали. Специальный вид стрингов в группе верхнетреугольных автоморфизмов исследовался в [69]. Множество всех конечных произведений стрингов $\mathcal{H}$ является группой, называемой группой стрингов. Она играет важную роль в дальнейшем. Мы доказываем, что $\mathcal{H}$ содержит группу порожденную подстановочными и верхнетреугольными автоморфизмами и изучаем некоторые параболические подгруппы $\mathcal{H}$. Мы описываем тоже большую решетку подгрупп $\mathcal{H}$ связанных с ростами. Главный результат параграфа говорит, что $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ порождается (по модулю IA—автоморфизмов) стрингами и нижнетреугольными матрицами. В последней части параграфа получаются аналоги этих результатов для некоторых других многообразий.

Наши результаты верны и для свободной группы несчетного ранга. При этом надо предположить, что семейство свободных порождающих вполне упорядочено. Это неудивительно, так как даже известная теорема Нильсена-Шрайера (подгруппа свободной группы свободна) требует такого упорядочения порождающих в случае бесконечного ранга (смотри [66], с. 89).

По аналогии с матричным случаем мы вводим понятие стринга.

Пусть α автоморфизм F_∞ следующего типа:

(1) существует разбиение $\{X_j | j \in \mathbb{N}\}$ множества порождающих $\{x_1, x_2, \ldots\}$ такое, что $X_1 = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ и для всех $j > 1$ мы имеем

$X_j = \{x_{n_j+1}, \ldots, x_{n_{j+1}}\}$ где $n_1 < n_2 < \ldots$ является строго возрастающей последовательностью натуральных чисел;

(2) для любого k такого, что $n_j + 1 \leq k \leq n_{j+1}$ мы имеем $\alpha(x_k) \in \langle x_{n_j+1}, \ldots, x_{n_{j+1}} \rangle$.

Автоморфизм удовлетворяющий условиям (1) и (2) называем стрингом.

Множество $\mathcal{H}$ всех конечных произведений стрингов является подгруппой группы $\operatorname{Aut} F_\infty$ (предложение 39). Группа стрингов содержит подгруппу порожденную всеми верхними треугольными и подстановочными автоморфизмами (предложение 40). Мы доказываем, что подгруппа верхних треугольных автоморфизмов содержит свободную подгруппу (предложение 38).

Существует несчетное семейство попарно несравнимых параболических подгрупп в $\mathcal{H}$ (предложение 41). Для любого роста ω определяется подгруппа $\mathcal{H}(\omega)$ и доказывается, что множество таких подгрупп изоморфно решетке ростов из параграфа 4 (предложение 42).

Главным результатом параграфа является

Теорема 25. *Любой автоморфизм из* $\operatorname{Aut} F_\infty$ *является сложением некоторого* IA*-автоморфизма и автоморфизма из подгруппы порожденной нижними треугольными и конечно столбцовыми автоморфизмами, т. е.* $\operatorname{Aut} F_\infty = \langle \mathcal{T}^-, \mathcal{K} \rangle \cdot \mathcal{A}$.

Мы доказываем тоже, что группа $\operatorname{Aut} F_\infty$ содержит два счетные семейства подгрупп: одну состоящую из максимальных нормальных подгрупп и вторую, содержащую нормальные несравнимые подгруппы (предложение 45).

В заключительной части мы переносим некоторые результаты на относительно свободные группы (предложение 347).

В § 18 исследуются автоморфизмы корневого дерева счетной валентности. Класс групп автоморфизмов корневых деревьев в последнее время привлек внимание многих математиков. Этот класс содержит важные примеры групп, например, некоторые не локально конечные, периодические группы, являющиеся контрпримерами к неограниченной проблеме Бернсайда [1] и примеры групп промежуточного роста, контрпримеры к проблеме Милнора [15].

Все эти примеры являются примерами групп автоморфизмов локално конечных деревьев. С другой стороны, их естественное обобщение, группа автоморфизмов корневого дерева счетной валентности, исследована слабо [163], [138]. В данном параграфе мы исследуем подгруппы этой группы. Описываем два семейства подгрупп выделенные ростами (классами натуральнозначных функций над $\mathbb{N}$). Приводим основные свойства этих подгрупп.

Сначала в группе всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ дерева счетной валентности $\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ вводим семейство автоморфизмов конечного типа связанные с ростами. Мы говорим, что функция f является $fin-$ограничением для автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$, если $\tau_{\emptyset}(n) = \tau_{\emptyset}^{-1}(n) = n$ для всех $n > f(1)$, и $\tau_{i_1,\dots,i_k}(n) = \tau_{i_1,\dots,i_k}^{-1}(n) = n$ для всех $n > f(k+1)$. Если носитель подстановки $\tau_{i_1,\dots,i_k}$ бесконечен, говорим, что подстановка $\tau_{i_1,\dots,i_k}$ ограничена через $f(k+1) = \infty$.

Для любого роста ω множество всех $\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$, таких, что все поерестановки τ_x $fin-$ограничены некоторыми функциями $f, f(n)+n \in \omega$ является группой обозначаемой через $G_{fin}(\omega)$. Легко видеть, что $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})} = G_{fin}(\omega_\infty)$ и имеем равенство

$$\cup_{d=2}^{\infty} \mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(d)} = G_{fin}(\omega_0).$$

Решетка подгрупп $\{G_{fin}(\omega)\}_{\omega\in\Omega^*}$ изоморфна решетке ростов Ω^* (предложение 49). Для любого роста ω группа $G_{fin}(\omega)$ сферически транзитивно действует на сферах (уровнях) деревья (предложение 50). Мы показываем тоже, что для наименьшего роста ω_0, группа $G_{fin}(\omega_0)$ порождается элементарными инволюциями (предложение 51).

Другое семейство называем автоморфизмами бесконечного типа. Мы говорим, что подстановка $\pi \in \mathbb{N}$ ограничена функцией $f \in \Omega_\infty$, если для всех чисел n мы имеем $\pi(n), \pi^{-1}(n) \le f(n)$. Это определение ограниченности подстановки существенно отличается от $fin-$ограниченности. Ограниченная подстановка может иметь бесконечный носитель.

Мы говорим, что функция $f \in \Omega^*$ ограничивает автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ если $\tau_{\emptyset}(n), \tau_{\emptyset}^{-1}(n) \le f(n)$ для всех натуральных чисел n и

$$\tau_{i_1,\dots,i_k}(n), \tau_{i_1,\dots,i_k}^{-1}(n) \le f(n)$$

для всех натуральных чисел n.

Для любого роста ω определяем подгруппу группы $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ следующим образом

$$G(\omega) = \{\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})} : \tau \text{ ограничена некоторой } f \in \omega\}$$

Очевидно, что $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})} = G(\omega_\infty)$. Мы показываем, что решетка подгрупп $\{G(\omega)\}_{\omega\in\Omega^*}$ изоморфна решетке ростов Ω^* (предложение 52). Для любого роста ω группа $G(\omega)$ имеет тривиальный центр и любой её автоморфизм является внутренним (предложение 54). Кроме того, группа $G(\omega_0)$ порождается всеми элементами τ такими, что τ_x является элементарной инволюцией для всех x из первого уровня дерева (предложение 53).

В § 19, заключающем эту главу, описываются некоторые ассоциативные алгебры и алгебры Ли бесконечных матриц связанные с ростами и приведены результаты о порождении стрингами. Доказывается, что алгебра строго верхних (нули ниже и на главной диагонали) конечнострочных бесконечных треугольных матриц порождается стрингами (предложение 55), а ее подалгебра квазидиагональных матриц порождается нильпотентными элементами (предложение 56). Описываем результаты Ханнах и Омиры о ленточной размерности на языке введенного нами роста.

В заключительной части описываем многочисленные примеры алгебр с помощью роста и даем набросок возможных обобщений.

ГЛАВА I

Группы бесконечных матриц

Эта глава посвящена определению группы бесконечных конечностолбцовых матриц. Приведены основные результаты о ее подгруппах. Введено понятие роста натуральнозначных функций, описаны его основные свойства. Это новое понятие роста применено для построения новых семейств подгрупп группы бесконечных конечностолбцовых матриц. Исследовано ширину некоторых ее подгрупп относительно семейства стрингов.

В § 1 мы напоминаем определение кольца бесконечных матриц и подробно его обсуждаем. Группа бесконечных матриц описывается в § 2, приведены определения ее известных подгрупп. Элементарные подгруппы вводятся в § 3. В § 4 вводится понятие роста натуральнозначных функций и описываются основные его свойства. В следующем § 5 понятие роста применяется дла описания большого класса подгрупп группы бесконечных конечностолбцовых матриц. В § 6 исследуется понятие стринга и порождаемость стрингами разных подгрупп группы бесконечных конечностолбцовых матриц.

§ 1. Кольцо бесконечных матриц

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей 1, I, J — два непустых множества. Функцию $a : I \times J \to R$ называем $I \times J$ матрицей над кольцом R. Пусть a — $I \times J$-матрица над R. Для любой пары $(i, j) \in I \times J$ обозначим $a((i, j)) = a_{ij} \in R$. Элементы a_{ij} называются коэффициентами, матричными элементами или просто элементами матрицы a. Пишем $a = (a_{ij})_{I \times J}$ или просто $a = (a_{ij})$, если множества I, J ясны из контекста. Если $I' \subset I$, $J' \subset J$ два непустые подмножества, то сужение фукции a до множества $I' \times J'$ называем подматрицей матрицы a и обозначаем $(a_{ij})_{I' \times J'}$.

Пусть $i \in I$, $j \in J$. Тогда матрицы $(a_{ij})_{\{i\} \times J}$ и $(a_{ij})_{I \times \{j\}}$ называем соответсвенно i-ой строкой матрицы и j-ым столбцом матрицы. Матрица $a = (a_{ij})$ называется конечнострочной (конечностолбцовой) если все ее строки (столбцы) содержат только конечное число ненулевых элементов.

Множество всех $I \times J$–матриц над кольцом R обозначаем $\mathrm{M}(I \times J, R)$, а подмножества конечно строчных и конечно столбцовых матриц $\mathrm{M}_r(I \times J, R)$ и $\mathrm{M}_c(I \times J, R)$ соответсвенно. Если $I = J$, то пишем просто $\mathrm{M}(I, R)$, $\mathrm{M}_r(I, R)$ и $\mathrm{M}_c(I, R)$, и называем их элементы I–квадратными или $I \times I$–квадратными матрицами. Главной диагональю I–квадратной матрицы a называется индексированное множество $(a_{ii})_{i \in I}$. Матрицы, у которых $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$ называем диагональными.

Ясно, что $\mathrm{M}(I \times J, R)$ обладает естественной групповой структурой, это абелева группа с поточечным сложением. Именно, если $a = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$ суть элементы $\mathrm{M}(I \times J, R)$, то поточечное сложение определено равенством $(a_{ij}) + (a_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Нейтральным элементом этой группы является нулевая матрица $0 = (0_{ij})$, а противной (противоположной) к a матрице является матрица $-a = (-a_{ij})$.

Пусть I, J, L — непустые множества, и пусть $a = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(I \times J, R)$, $b = (b_{ij}) \in \mathrm{M}(J \times L, R)$. Для любых $i \in I$, $l \in L$ мы рассматриваем формальный ряд $\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jl}$. Если a является конечнострочной или b является конечностолбцовой, то этот ряд имеет только конечное число ненулевых элементов, а значит имеет единственную сумму $c_{il} \in R$, и тогда $I \times L$ матрица

$$ab = \Big(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jl}\Big)_{I \times L}$$

называется произведением матриц a и b (в этом порядке). Заметим, что если a и b конечнострочные (конечностолбцовые) матрицы, то ab тоже конечнострочная (конечностолбцовая) матрица.

Пусть e_I будет $I \times I$–матрицей над R, определенной равенством $e_I = (\delta_{ij})$, где символ δ_{ij} обозначает дельта функцию Кронекера. Матрица e_I является конечнострочной и конечностолбцовой, и называется единичной матрицей. Она является нейтральным элементом умножения квадратных матриц. Отметим, что для общего элемента матрицы e_I никогда не используется запись e_{ij}, так как это обозначение используется в совершенно другом смысле, Именно, стандартной матричной единицей e_{ij} называется матрица, у которой в позиции (ij) стоит 1, а все остальные матричные элементы равны 0. Легко видеть, что каждая финитная матрица (у которой только конечное число ненулевых коэффициентов) представляется однозначно как линейная комбинация стандартных матричных единиц, причем коэффициенты этой линейной комбинации являются в точности матричными элементами данной матрицы. Это представление особенно удобно для вычислений, так как оно учитывает только те позиции, которые фактически имеют значение. В дальнейшем, мы будем писать вместо матрицы e_I просто e в случае бесконечного множества I, или e_n, если I конечное множество мощности n.

Предложение 1. Множества $\mathrm{M}_r(I, R)$ и $\mathrm{M}_c(I, R)$ с матричным сложением и умножением являются ассоциативными кольцами с единицей e_I.

Символом $\mathrm{M}_{rc}(I, R)$ обозначаем пересечение $\mathrm{M}_r(I, R) \cap M_c(I, R)$, это полкольцо конечнострочных и конечностолбцовых матриц.

В случае когда I– конечное множество мощности n, все матрицы конечнострочные и конечностолбцовые и мы пишем просто $\mathrm{M}(n, R)$ для множества всех $n \times n$ матриц, по предыдущему предложению $\mathrm{M}(n, R)$ является кольцом.

В случае коммутативного кольца получаем, соответственно алгебру консчнострочных и конечностолбцовых матриц RFA (I, R) и CFA (I, R).

На языке модулей: $\mathrm{M}_c(I, R)$ — кольцо эндоморфизмов правого модуля R^I (соответственно $\mathrm{M}_r(I, R)$ для левого модуля ${}^I R$), где I – бесконечное индексное множество.

Если I линейно упорядоченное множество, то матрицу $a = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(I, R)$ называем верхней (нижней) треугольной в случае когда из $i > j$ $(i < j)$ следует $a_{ij} = 0$. Ясно, что диагональная матрица является одновременно и верхней и нижней треугольной.

Легко видеть, что множество BM (I, R) всех верхних треугольных матриц из $\mathrm{M}_c(I, R)$ является подкольцом кольца $\mathrm{M}_c(I, R)$, а множество RBM (I, R) всех верхних треугольных матриц из $\mathrm{M}_r(I, R)$ является подкольцом в $\mathrm{M}_{rc}(I, R)$.

Если I– конечное множество, свойства кольца $\mathrm{M}_c(I, R)$ не зависят от линейного упорядочения множества I. Но уже в счетном случае I можно упорядочить многими существенно различными способами, поэтому надо осторожно переносить все определения введенные для $\mathrm{M}(n, R)$. В нашей работе мы будем в основном рассматривать случай, когда $I = \mathbb{N}$ множество натуральных чисел и использовать обозначения вида $\mathrm{M}_c(\infty, R) = \mathrm{M}_c(\mathbb{N}, R)$. Наш выбор связан с тем, что практически все результаты для бесконечных матриц обычно не зависят от мощности множества индексов. Более того случай $I = \mathbb{N}$ является предельным, в том смысле, что для него уже выявляются полностью все особенности и парадоксальные явления для бесконечных матриц.

Сделаем сейчас несколько замечаний показывающих особенности поведения бесконечных матриц.

Известно, что алгебра матриц $\mathrm{M}(n, K)$ над полем K имеет универсальное свойство, что любая ассоциативная алгебра A размерности n над K вложима в $\mathrm{M}(n, K)$, и любая полугруппа (с единицей) или группа порядка n изоморфная соответсвующей мультипликативной полугруппе или группе матриц из $\mathrm{M}(n, K)$ с элементами равными 1 или 0. Это легко вытекает из свойства регулярного представления. Таким же образом можно доказать, что любая ассоциативная алгебра счетной размерности имеет точное представление в алгебре CFA (∞, K). Аналогичный результат верен и для счетных полугрупп и групп и их вложения в $\mathrm{M}_c(\infty, K)$.

В то же время, существуют аналоги этих результатов для неассоциативных алгебр и группоидов. Но для этого нужно рассматривать множество $\mathrm{M}(\infty, K)$ и другие рассуждения, так как для точности регулярного представления ассоциативность необходима. В работе [73] построено точное представление любой конечномерной или счетномерной неассоциативной алгебры в $\mathrm{M}(\infty, K)$ и точное представление любого конечного или счетного группоида в $\mathrm{M}(\infty, K)$. Отметим, что аналогичные результаты верны и без ограничений на мощность (группоида или базиса алгебры при подходящем выборе множества индексов I).

Множество $\mathrm{M}(\infty, R)$ всех бесконечных матриц индексированных натуральными числами является частичным неассоциативным кольцом относительно матричного сложения и умножения. Это значит, что произведение двух матриц не всегда определено. С другой стороны, даже если оба произведения $(xy)z$ и $x(yz)$ существуют, они не обязательно равны, как показывает следующий пример [73]:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что в этом случае $(xy)z \neq x(yz)$. Таким образом, умножение матриц из $\mathrm{M}(\infty, R)$ не является даже слабо ассоциативным. Интересно, что произведение $x \cdot z$ не определено.

Главные парадоксальные свойства бесконечных матриц связаны с обратимостью матриц. Известно, что для кольца конечномерных матриц $\mathrm{M}(n, K)$ над полем, из односторонней обратимости вытекает двусторонняя обратимость. Для бесконечных матриц простой пример показывает, что это не так. Для матриц

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad b = a^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

из кольца $\mathrm{M}_c(\infty, R)$ имеем $a \cdot b = e$, но в произведении $b \cdot a$ первый столбец нулевой. Более того, даже над конечным кольцом матрица a имеет счетное число правых обратных в кольце $\mathrm{M}_{rc}(\infty, R)$ и несчетное множество в кольце $\mathrm{M}_c(\infty, R)$. Они имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Это легко видно на языке эндоморфизмов линейных пространств. Если V линейное пространство над полем K, со счетным базисом $x_1, x_2, x_3, \dots$, то для линейных отображений $\alpha : x_i \to x_{i+1}$ $\beta : x_1 \to 0, x_{i+1} \to x_i$ для $i > 1$, мы имеем $\beta \circ \alpha = id_V$ и $\alpha \circ \beta$ имеет нетривиальное ядро.

С другой стороны, в кольце $\mathrm{M}_c(\infty, R)$ имеем $a(ba - e) = (ab)a - a = 0$ и матрица a является правым делителем нуля.

Отметим, что $(ba)^2 = ba$ т. е. ba является нетривиальным идемпотентом. Джекобсон доказал следующий факт [110], [111]. Положим $a^0 = e = b^0$ и $e_{(ij)} = b^{i-1}a^{j-1} - b^i a^j$. Тогда $e_{(ij)}e_{(rs)} = \delta_{jr}e_{(is)}$ и $e_{(ii)}$ являются ортогональными идемпотентами. Это значит, что кольцо R содержит стабильное кольцо бесконечных матриц (состоящее из матриц, у которых только конечное число ненулевых коэффициентов) как подкольцо.

Отметим тоже следующий интересный факт. Любая матрица из $\mathrm{T}(\infty, \mathbb{Z})$ имеет квадратный корень в $\mathrm{T}(\infty, \mathbb{Z})$ [108]. Для конечных матриц это неверно так как, например матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не имеет квадратного корня в $T(2, \mathbb{Z})$ (смотри также [84], [85], [98].

В конечномерном случае матриц над полем K мы определяем полную линейную группу как множество

$$\mathrm{GL}(n, K) = \{A \in \mathrm{M}(n, K) : A \text{ – обратима } \}$$

В случае бесконечных матриц, пример матрицы

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

показывает, что $f \in \mathrm{M}_{rc}(\infty, K)$ и $f^{-1} \in \mathrm{M}_r(\infty, K)$. Это значит, что f необратима в $\mathrm{M}_c(\infty, K)$ хотя имеет обратную в $\mathrm{M}_r(\infty, K)$.

Сейчас приведем самый интересный пример [178]. Пусть $c = a + a^t$,

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда c обратима и c является делителем нуля. В самом деле,

$$c \cdot d = d \cdot c = e,$$

и

$$c \cdot (d + \beta g) = (d + \beta g) \cdot c = e,$$

$$c \cdot g = g \cdot c = O.$$

Заметим, что c, d, g — симметрические матрицы, а c конечностолбцовая и конечнострочная матрица.

Тем самым поведение бесконечных матриц принципиально отличается от конечного случая:

1) умножение неассоциативно,

2) матрица может иметь бесконечно много правых (левых) обратных,

3) матрица может иметь бесконечно много обратных,

4) обратимая матрица может быть делителем нуля.

Сейчас мы приведем интересные примеры парадоксальных свойств обратимости конечномерных треугольных матриц с коэффициентами из колец бесконечных матриц.

В стандартных текстах по линейной алгебре доказывается, что в конечномерном случае матрица обратная к верхней треугольной сама верхняя треугольная и обе матрицы имеют обратимые элементы на диагонали.

Пусть R ассоциативное кольцо с единицей 1. Мы говорим, что R *конечное по Дедекинду*, если из $xy = 1$ следует $yx = 1$ для всех x, y из R. Примерами конечных по Дедекинду колец являются конечные кольца, коммутативные кольца, $End_K(K^n)$ — кольцо эндоморфизмов линейного пространства K^n над полем K. Если R коммутативно, то кольцо матриц $\mathrm{M}(n, R)$ тоже конечно по Дедекинду [109]. Это вытекает из теории определителей. В [47] можна найти разные элементарные доказательства этих фактов. Если R конечно по Дедекинду, то кольцо многочленов $R[t]$ и кольцо формальных степенных рядов $R[[t]]$ тоже конечны по Дедекинду [109].

Если R не является конечным по Дедекинду (существуют x и y такие, что $xy = 1$ и $yx \neq 1$), то $R[t]$, $R[[t]]$ и $\mathrm{M}(n, R)$ также такие, например:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Кроме того:

$$\begin{pmatrix} y & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1-yx & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1-yx & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Последний пример из [161] показывает, что надо тщательно подходить к правильному определению треугольной группы. На самом деле, матрица обратная к верхней треугольной может быть нижней треугольной и даже иметь нули на диагонали.

Стандартным примером в учебниках кольца, которое не является конечным по Дедекинду есть кольцо конечно строчных и конечно столбцовых матриц $\mathrm{M}_{rc}(\infty, R)$ [112].

Вернемся к нашему примеру бесконечных матриц таких, что $aa^t = e$ и $a^t a \neq e$.

Положим $A = \begin{pmatrix} a^t & w \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ w & a^t \end{pmatrix}$, где $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что $AB = BA = I$, где $I = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ единичная матрица в кольце $\mathrm{M}(2, \mathrm{M}_{rc}(\infty, R))$. Таким образом A и B обратимы, A верхняя треугольная, в то время как B нижняя треугольная. Диагональные коэффициенты обеих матриц необратимые элементы кольца. Этот пример взят из работы автора [103].

Чтобы получить такой пример с нулями на диагонали надо увеличить размер матриц.

Пусть u и v две бесконечные матрицы определенные условиями: $u_{i,2i-1} = 1$ и $v_{i,2i} = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $u_{i,j} = 0$, $v_{i,j} = 0$ в остальных случаях.

Положим

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} u^t & v^t \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $yx = e$ и $xy = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. Матрицы x и y определяют изоморфизм колец R^2 и R [51], [70], [71].

Положим теперь

$$C = \begin{pmatrix} u^t & v^t & 0 \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & u^t & v^t \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $CD = DC = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

§ 2. Группы бесконечных матриц

Результаты этого параграфа заимствованы из [107]. Мультипликативная группа кольца матриц $\mathrm{M}_c(\infty, R)$ обозначается символом $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ и называется полной линейной группой конечностолбцовых матриц. Аналогично определяется полная линейная группа $\mathrm{GL}_r(\infty, R)$ конечнострочных матриц. Их пересечение $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ — группа конечнострочных и конечностолбцовых матриц, самое интересное, что группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ и $\mathrm{GL}_r(\infty, R)$ максимальны в множестве $\mathrm{M}(\infty, R)$ и не содержатся в какой-то общей надгруппе.

Определим теперь некоторые важнейшие подгруппы группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$. Среди условий конечности, накладываемых на бесконечные матрицы, отметим ещё следующие часто встречаемые в литературе:

$\mathrm{GL}(R)$ — стабильная полная линейная группа, которая является индуктивным пределом групп $\mathrm{GL}(n, R)$ относительно естесвенных вложений, состоит из всех матриц отличающихся от единичной матрицы только в конечном числе элементов (такие обратимые матрицы будем называть финитными);

$\mathrm{GL}_b(\infty, R)$ — группа, состоящая из матриц a конечной ширины, то есть таких, для которых существует такое m, что все элементы матриц a и a^{-1} вне диагональной полосы ширины m нулевые;

$\mathrm{GL}_{bc}(\infty, R)$ — финитарная группа, состоящая из всех матриц a, для которых все ненулевые элементы матрицы $a - e$ находятся в конечном числе строк.

Группа диагональных матриц $\mathrm{D}(\infty, R)$ состоит из всех матриц из $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$, у которых все недиагональные элементы являются нулями. Очевидно, что все диагональные элементы матрицы из $\mathrm{D}(\infty, R)$, суть обратимые элементы кольца R. Её подгруппа $\mathrm{D}(R) = \mathrm{D}(\infty, R) \cap \mathrm{GL}(R)$, финитных диагональных матриц состоит из матриц, у которых только конечное число диагональных элементов отлично от 1.

Группа матриц перестановок $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ состоит из всех матриц, в каждой строке и каждом столбце которых ровно один ненулевой элемент, который равен 1. Группа мономиальных матриц $\mathrm{N}(\infty, R)$ состоит из всех матриц, в каждой строке и каждом столбце которых ровно один ненулевой элемент (который в этом случае обратим).

Все обратимые верхние треугольные матрицы, обратные к которым тоже верхние треугольные, образуют подгруппу $\mathrm{T}(\infty, R)$, называемую группой верхних треугольных матриц. Аналогично определяется группа нижних треугольных матриц $\mathrm{T}^{-}(\infty, R)$. Примеры из параграфа 1 показывают, что условие на обратную матрицу в этом определении является совершенно необходимым.

Верхняя треугольная матрица называется верхней унитреугольной, если все ее диагональные элементы равны 1. Оказывается, что обратная матрица к верхней унитреугольной матрице из $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ тоже верхняя унитреугольная. Таким образом множество всех верхних унитреугольных матриц образует подгруппу $\mathrm{UT}(\infty, R)$ в группе $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$.

Ясно, что $\mathrm{D}(\infty, R)$ нормальна в $\mathrm{N}(\infty, R)$ и факторгруппа $\mathrm{N}(\infty, R)/\,\mathrm{D}(\infty, R)$ изоморфна $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Группа $\mathrm{T}(\infty, R)$ является полупрямым произведением нормальной подгруппы $\mathrm{UT}(\infty, R)$ и дополнительной подгруппы $\mathrm{D}(\infty, R)$.

Предложение 2. Группа $\mathrm{GL}(R)$ нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}_{rc}(\mathbb{N}, R)$.

Доказательство: Любой элемент группы $\mathrm{GL}(R)$ имеет вид $h = \left(\begin{array}{c|c} \check{h} & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$, где $\check{h} \in \mathrm{GL}(n, R)$ для некоторого натурального n. Пусть $g \in \mathrm{GL}_{rc}(\mathbb{N}, R)$ и $g^{-1} = (g'_{ij})$. Пусть

$$n_1 = \min\{i : g'_{kj} = 0 \text{ для всех } k > i, 1 \le j \le n\}$$

$$n_2 = \min\{j : g_{ik} = 0 \text{ для всех } k > j, 1 \le i \le n\}.$$

Положим $m = \max\{n_1, n_2, n\}$. Ясно, что мы можем представить элемент h в следующем блочном виде $\left(\begin{array}{c|c} \widehat{h} & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$, где $\widehat{h} \in \mathrm{GL}(m, R)$. Действительно, все ненулевые коэффициенты матрицы $\widehat{h} - e_m$ лежат в верхнем левом углу размера $n \times n$. Представим g, g^{-1} в таком же самом блочном виде. Тогда:

$$g^{-1}hg = \left(\begin{array}{c|c} g'_1 & g'_2 \\ \hline g'_3 & g'_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \widehat{h} & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} g_1 & g_2 \\ \hline g_3 & g_4 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \star & g'_1(\widehat{h} - e_m)g_2 \\ \hline g'_3(\widehat{h} - e_m)g_2 & e + g'_3(\widehat{h} - e_m)g_2 \end{array}\right)$$

Из наших предположений вытекает, что $g'_3(\widehat{h} - e_m) = 0$ и $(\widehat{h} - e_m)g_2 = 0$. Отсюда заключаем, что $g^{-1}hg \in \mathrm{GL}(R)$.□

Предложение 3. Любая матрица из $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ является произведением обратной к конечностолбцовой и конечнострочной матрицы и верхней унитреугольной матрицы.

Отметим, что наше предложение не означает, что представление любой обратимой матрицы в виде произведения обратной к конечностолбцовой и конечнострочной матрицы и унитреугольной матрицы однозначно. Это не так ввиду равенства $\mathrm{UT}_r(\infty, R) = \mathrm{GL}_{rc}(\infty, R) \cap \mathrm{UT}(\infty, R)$.

Доказательство: Пусть $g \in \mathrm{GL}_c(\infty, R)$. Пусть g_{m1} будет последним ненулевым элементом первого столбца. Так как первый столбец матрицы g унимодулярен, существуют $r_1, \ldots, r_m \in R$ такие, что $r_1 g_{11} + \ldots + r_m g_{m1} = 1$. Умножая матрицу g слева на соответствующую матрицу мы добавляем до $m+1$– ой строки первую строку умноженную на r_1, вторую умноженную на r_2, ..., m–тую умноженную на r_m. В первом столбце на $m+1$-том месте получим 1. Теперь мы вычитаем $m+1$-тую строку умноженную на g_{11} от первой строки, вычитаем $m+1$-тую строку умноженную на g_{21} от второй строки, и так далее. Потом заменяем первую и $m+1$-тую строку умножением слева на матрицу подстановки. Ясно, что все эти операции можно получить умножением слева на финитную (конечную) матрицу с блоком размера $(m+1) \times (m+1)$ в левом верхнем углу. Пусть $g_{k,2}$ будет последним ненулувым элементом второго столбца. После вычертания первой строки второй столбец унимодулярен. Это значит, что можем сделать коэффициент в месте $(k+1, 2)$ равным 1, прибавляя строки с номерами $2, 3, \ldots, k$ умноженные на соответствующие элементы кольца. Используя эту 1 делаем нули во втором столбце в строках с номерами $2, 3, \ldots, k$. Заменяем местами вторую и $k+1$-ую строку.

Таким образом, существует финитная матрица a_1 такая, что произведение $a_1 \cdot g$ имеет первый столбец такой, как у единичной матрицы e. Существует финитная матрица a_2 такая, что второй столбец матрицы $a_2(a_1 g)$ имеет 1 на главной диагонали и нули ниже её. Мы продолжаем эту процедуру. На каждом шаге имеем равенство $a_n(a_{n-1}(\ldots(a_1 g)\ldots)) = (a_n \cdot \ldots \cdot a_1)g$. Таким образом получаем

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i \cdot g = u,$$

где u верхняя унитреугольная матрица. Матрица $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$ конечнострочная. Кроме того она конечностолбцовая, так как $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = u \cdot g^{-1} \in \mathrm{GL}_c(\infty, R)$ и она обратима. $\square$

§ 3. Элементарные группы

Особое место в теории конечномерных линейных групп занимают самые простые элементы, так называемые элементарные трансвекции. В случае бесконечных матриц они не играют такой роли, более естественными оказываются некоторые их обобщения.

Напомним, что элементарной трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$ называется матрица $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, где $\alpha \in R$, $i, j \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathrm{E}(R)$ подгруппу $\mathrm{GL}(R)$ порожденную всеми элементарными трансвекциями. Группу $\mathrm{E}(R)$ называем стабильной элементарной группой. Для двустороннего идеала A кольца R, через $\mathrm{E}(R, A)$ обозначим нормальное замыкание группы $\mathrm{E}(A)$ в группе $\mathrm{E}(R)$. Очевидно, что

$$\mathrm{E}(R, A) = \langle t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A, i, j, \in \mathbb{N}\rangle^{\mathrm{E}(R)}.$$

Эта группа называется относительной стабильной элементарной группой. Ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(R/A)$ обозначим $\mathrm{GL}(R, A)$ и называем главной конгруэнцподгруппой.

Следующий результат Васса [3], [93] описывает нормальное строение стабильной полной линейной группы $\mathrm{GL}(R)$:

Если R ассоциативное кольцо с 1, H — подгруппа нормализуемая группой $\mathrm{E}(R)$, то существует двусторонний идеал A кольца R такой, что

$$\mathrm{E}(R, A) \leq H \leq \mathrm{GL}(R, A).$$

Этот идеал однозначно определяется из равенств:

$$\mathrm{E}(R, A) = [H, \mathrm{E}(R)] = [H, GL(R)].$$

Из леммы Уайтхеда и коммутационных формул вытекают следующие равенства:

$$\mathrm{E}(R, A) = [\mathrm{E}(R), \mathrm{E}(R, A)] = [\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R, A)].$$

Определение 1. Матрицу, отличающуюся от единичной матрицы только в одной строке вне диагонали называем SL-трансвекцией. Группа $\mathrm{E}(\infty, R)$ порожденная всеми SL-трансвекциями называется элементарной группой.

Группа $\mathrm{E}(\infty, R)$ играет основную роль в работах по бесконечномерным группам. Очевидно, что $\mathrm{E}(R) \leq \mathrm{E}(\infty, R) \leq \mathrm{GL}_{bc}(\infty, R)$. Подгруппы H такие, что $\mathrm{E}(R) \leq H \leq \mathrm{E}(\infty, R)$ называются $SL-$группами. В работе [123] показано, что каждая $SL-$группа порождается $SL-$трансвекциями, а все подгруппы $\mathrm{E}(\infty, R)$ нормализуемые группой $\mathrm{E}(R)$, так как в случае конечномерных групп, включены в интервалы определенные конгруэнцгруппами соответствующими идеалам кольца R.

Символом $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ обозначим группу всех матриц из $\mathrm{UT}(\infty, R)$, у которых все ненулевые элементы над главной диагональю находятся в конечном множестве строк. Ясно, что $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ не является $SL-$группой. Аналогично предыдущему предложению доказывается следующее утверждение [12].

Предложение 4. Группа $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ является нормальным делителем унитреугольной группы $\mathrm{UT}(\infty, R)$.

Доказательство. Соотношение $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R) \lhd \mathrm{UT}(\infty, R)$ следует из равенства

$$v^{-1}wv = \left(\begin{array}{c|c} v_1' & v_2 \\ \hline 0 & v_4' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} w_1 & w_2 \\ \hline 0 & e \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \\ \hline 0 & v_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & e \end{array}\right),$$

где матрицы $v \in \mathrm{UT}(\infty, R)$, $w \in \mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ разбиты на соответствующие блоки.□

Отметим, что $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R) \cap \mathrm{UT}_r(\infty, R) = \mathrm{UT}(R)$, но обе эти группы устроены совсем по другому. Имеем

Предложение 5. Группа $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ порождается элементарными трансвекциями и сопряженными с ними элементами. Класс сопряженности произвольного нетривиального элемента из $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ содержит нетривиальную элементарную трансвекцию.

Доказательство. Любая матрица a из $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ записывается в виде $a = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots a_1$, где матрица a_k от единичной отличается только k-той строкой, которая такая же, как у матрицы a. Пусть

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда $a_1 = (t_{12}(1 - a_{12}))^{-1} \cdot b_1^{-1} \cdot t_{12}(1) \cdot b_1$. Аналогично можно представить матрицы $a_2, a_3, \ldots, a_n$, откуда следует первая часть теоремы. Матрицу $a \in \mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ можно представить в виде

$$a = \left(\begin{array}{c|c} b & c \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$$

так, чтобы $b \neq e_n$. Положим

$$h = \left(\begin{array}{c|c} e_n & u \\ \hline 0 & e \end{array}\right), k = \left(\begin{array}{c|c} v & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$$

и пусть $a_1 = aha^{-1}h^{-1}$, $a_2 = a_1ka_1^{-1}k^{-1}$. Тогда

$$a_2 = \left(\begin{array}{c|c} e_n & w \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$$

и $w = u(e_n - b)(v - e_n)$. Легко видеть, что матрицы u и v можно подобрать так, чтобы у матрицы w был только один ненулевой элемент. Для этого достаточно выбрать матрицы u, v только с одним ненулевым элементом.□

Как следствие получаем следующее

Предложение 6. Если H – нормальная подгруппа группы $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$, содержащая $\mathrm{UT}(R)$, то $H = \mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$.

Это значит, что нетривиальные нормальные подгруппы группы $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ не содержат целиком подгруппы $\mathrm{UT}(R)$. Видно, что это описания совершенно отличается от описания нормальных подгрупп $\mathrm{E}(\infty, R)$ из [123].

Весконечное произведение $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \mathrm{GL}(\infty, R)$ элементарных трансвекций t_i называется обобщенной трансвекцией, если существует последовательность $\{n_i\}$ ($n_i > 1$) натуральных чисел такая, что для каждой трансвекции $t_i = t_{k_i,l_i}(\alpha)$ выполняются условия $n_1 + \ldots + n_{i-1} < k_i \leq n_1 + \ldots + n_i$, $n_1 + \ldots + n_{i-1} < l_i \leq n_1 + \ldots + n_i$.

Иными словами, $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{GL}(n_i, R) < \mathrm{GL}_c(\infty, R)$, и все t_i содержатся в соответствующих блоках $\mathrm{GL}(n_i, R)$ по главной диагонали.

Ясно, что подгруппа группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ порожденная обобщенными трансвекциями дает нам новый пример элементарной группы. На самом деле их можно определить бесконечно много, как это покажем в параграфе 12. Сейчас мы приведем коммутационные формулы для частного случая обобщенных трансвекций, так называемых регулярных обобщенных трансвекций.

Пусть n, m фиксированные натуральные числа, и пусть $lcm(n, m) = an = bm$. Мы положим

$$I_i^n = \{i, i+n, \ldots, i+(a-1)n\},\ I_j^n = \{j, j+n, \ldots, j+(a-1)n\}$$
$$I_r^m = \{r, r+m, \ldots, r+(b-1)m\},\ I_s^m = \{s, s+m, \ldots, s+(b-1)m\}$$

Мы рассматриваем две обобщенные трансвекции вида

$$\begin{array}{l} t_{ij}^n(\alpha) = e + \alpha e_{ij} + \alpha e_{i+n,j+n} + \alpha e_{i+2n,j+2n} + \ldots, \\ t_{rs}^m(\beta) = e + \beta e_{rs} + \beta e_{r+m,s+m} + \beta e_{r+2m,s+2m} + \ldots \end{array}.$$

Будем называть их регулярными обобщенными трансвекциями.

Рассмотрим коммутатор $[t_{i,j}^n(\alpha), t_{r,s}^m(\beta)] = t_{i,j}^n(\alpha) \cdot t_{r,s}^m(\beta) \cdot (t_{i,j}^n(\alpha))^{-1} \cdot (t_{r,s}^m(\beta))^{-1}$

Мы имеем

$$\begin{aligned} [t_{i,j}^n(\alpha), t_{r,s}^m(\beta)] \;&=\; (e + \alpha e_{ij} + \alpha e_{i+n,j+n} + \ldots)(e + \beta e_{rs} + \beta e_{r+m,s+m} + \ldots) \\ &\quad (e - \alpha e_{ij} - \alpha e_{i+n,j+n} - \ldots)(e - \beta e_{rs} - \beta e_{r+m,s+m} - \ldots) \\ &= (e + \alpha e_{*,*} + \beta e_{*,*} + \alpha\beta e_{*,*})(e - \alpha e_{*,*} - \beta e_{*,*} + \alpha\beta e_{*,*}) \\ &= e + \alpha\beta e_{*,*} - \beta\alpha e_{*,*} + \beta\alpha\beta e_{*,*} - \alpha\beta\alpha e_{*,*} + \alpha\beta\alpha\beta e_{*,*} \end{aligned}$$

Ясно, что при вычислении этого коммутатора достаточно рассматривать только $lcm(n, m) \times lcm(n, m)$ матрицы. Мы построим две $lcm(n, m) \times lcm(n, m)$ матрицы A, B следующим образом (определяя их коэффициенты в местах (k, l)):

$(A)_{kl} = 1$ если $(k,l) \in \{(i,j), (i+n, j+n), (i+2n, j+2n), \dots\}$ и 0 в противном случае,

$(B)_{kl} = 1$ если $(k,l) \in \{(r,s), (r+m, s+m), (r+2m, s+2m), \dots\}$ и 0 в остальных случаях.

Обозначим через $A * B$ булевское произведение матриц A и B. Легко проверить, что

$$A * B \neq 0 \text{ если } I_j^n \cap I_r^m \neq \emptyset$$
$$B * A \neq 0 \text{ если } I_s^m \cap I_i^n \neq \emptyset$$

Ясно, что произведение $A * B$ ассоциативно. Кроме того, имеем $A * A = B * B = 0$. Если $n|m$, то $B * A * B = 0$, если $m|n$, то $A * B * A = 0$. В обеих случаях имеем $A * B * A * B = 0$.

Получаем следующую коммутационную формулу для регулярных обобщенных трансвекций.

$$\begin{aligned}
[t_{i,j}^n(\alpha), t_{r,s}^m(\beta)] \quad = \quad & \prod\nolimits_{(k,l)} (t_{kl}^{lcm(n,m)}(\alpha\beta))^{(A*B)_{kl}} \\
& \cdot \prod\nolimits_{(k,l)} (t_{kl}^{lcm(n,m)}(-\beta\alpha))^{(B*A)_{kl}} \\
& \cdot \prod\nolimits_{(k,l)} (t_{kl}^{lcm(n,m)}(\beta\alpha\beta))^{(B*A*B)_{kl}} \\
& \cdot \prod\nolimits_{(k,l)} (t_{kl}^{lcm(n,m)}(-\alpha\beta\alpha))^{(A*B*A)_{kl}} \\
& \cdot \prod\nolimits_{(k,l)} (t_{kl}^{lcm(n,m)}(\alpha\beta\alpha\beta))^{(A*B*A*B)_{kl}}
\end{aligned}$$

Первое произведение может быть записано тоже как

$$\prod_{(c,d)} (t_{i+cn, s+dm}^{lcm(n,m)}(\alpha\beta)),$$

где произведение берется по всех парах (c,d) таких, что $j + cn = r + dm$ и так далее (нам кажется, что это боллее сложная запись).

§ 4. Рост функций

Результаты настоящего и следующего параграфа опубликованы в [13].

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с естественным порядком. Продолжим этот порядок на множество $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ полагая $n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество

$P(\mathbb{N})$ всех функций $f : \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{N}_\infty$ образует полугруппу по отношению к композиции функций. Через Ω_∞ обозначим подполугруппу всех функций $f \in P(\mathbb{N})$ таких, что $f(n+1) \geq f(n) > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f(\infty) = \infty$. Ясно, что в полугруппе Ω_∞ нет нейтрального элемента.

Определим порядок на Ω_∞ полагая: $f \prec g$ если и только если существует n_0 такое, что $f(n) < g(n)$ для всех $n > n_0$.

Как обычно, $f < g$ означает, что $f(n) < g(n)$ для всех натуральных n. Мы пишем $f \ll g$, если $f^k \prec g$ для всех k. Здесь f^k обозначает k-ю итерацию функции f по отношению к композиции. Пусть $M(f) = \{h \in \Omega_\infty : f \ll h\}$.

Определим следующее отношение эквивалентности на множестве

$$f \sim g \qquad \textit{в том случае, когда} \qquad M(f) = M(g).$$

Это отношение эквивалентности можно следующим образом охарактеризовать в терминах отношения $\prec$:

Предложение 7. $f \sim g$ в том случае, когда существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f \prec g^k$ и $g \prec f^k$.

Доказательство: Если $f \prec g^k$ для некоторого k, то $M(g) \subseteq M(f)$. Обратно, предположим, что $M(g) \subseteq M(f)$, но $g \not\prec f^k$ для всех натуральных k. Зафиксируем s и обозначим через $\{n_{s,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ возрастающую последовательность натуральных чисел m такую, что $g(m) > f^s(m)$. Положим $n_i = n_{i,i}$. Так как $\{n_{s+1,i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{n_{s,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, то $n_i < n_{i+1}$. Теперь мы можем определить новую функцию h полагая $h(n) = g(n_{i+1})$ для всех $n \in (n_i, n_{i+1}]$. Тогда $h(n+1) \geq h(n) = g(n_{i+1}) > n_{i+1} \geq n$ и, таким образом, $h \in \Omega$. Однако, h не лежит в $M(g)$ так как h и g совпадают на бесконечном множестве. С другой стороны, для фиксированных k и $t \geq k$, $n \in (n_t, n_{t+1}]$ имеем $h(n) = g(n_{t+1}) > f^{t+1}(n_{t+1}) > f^k(n)$. Это показывает, что $f \ll h$ и $h \in M(f) \subseteq M(g)$, противоречие. □

Классы эквивалентности $\sim$ будут называться *ростами*. Множество всех ростов обозначается через Ω^*.

Предложение 8. Каждый рост ω является подполугруппой в Ω_∞.

Доказательство: Достаточно доказать, что ω замкнуто относительно композиции функции. Если $f \sim g$, то $g \prec f^k$ для некоторого k и, таким образом, $f \circ g \prec f^{k+1}$. С другой стороны, $f \prec f \circ g \prec (f \circ g)^{k+1}$ и, таким образом, $f \circ g \sim f$. □

Определим две важные функции из Ω_∞:

$$f_\infty(n) = \infty \text{ и } f_0(n) = n + 1$$

и обозначим соответствующие росты $\omega_\infty = [f_\infty]$ и $\omega_0 = [f_0]$. Ясно, что $f \in \omega_\infty$ если и только если найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f(n) = \infty$ и $g \in \omega_0$ если и только если существует $d \in \mathbb{N}$ такое, что $g(n) \leq n + d$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определим частичный порядок на Ω^* полагая

$$\omega_1 \leq \omega_2 \quad \text{если} \quad M(f) \supseteq M(g) \quad \text{для некоторых} \quad f \in \omega_1,\ g \in \omega_2.$$

Ясно, что $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_\infty$ для всех $\omega \in \Omega^*$. По предложению 7 этот порядок можно охарактеризовать следующим образом: $[f] < [g]$ если и только если существует k_0 такое, что $f \prec g^k$ и $g \not\prec f^k$ для всех $k \geq k_0$. Кроме того, $[f]$ и $[g]$ несравнимы, если $f \not\prec g^k$ и $g \not\prec f^k$ для всех k. Например, легко видеть, что следующие росты образуют возрастающую последовательность: $[n+1] < [2n] < [n^2] < [e^n]$. Говорят, что f экспоненциально больше, чем g, если $[e^g] < [f]$.

Для $\omega_1 = [f]$ и $\omega_2 = [g]$ можно определить два новых роста:

$$\omega_1 \vee \omega_2 = [\max\{f, g\}], \qquad \omega_1 \wedge \omega_2 = [\min\{f, g\}].$$

Конечно, $\omega_1 \vee \omega_2 \geq \omega_1, \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2 \leq \omega_1, \omega_2$. На самом деле $\omega_1 \vee \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2$ являются корректно определенными решеточными операциями.

Лемма 1. Если $\omega_3 > \omega_1 \wedge \omega_2$, то $\omega_3 > \omega_1$ или $\omega_3 > \omega_2$. Если $\omega_4 < \omega_1 \vee \omega_2$, то $\omega_4 < \omega_1$ или $\omega_4 < \omega_2$.

Мы дадим доказательство этой леммы и следующей теоремы в § 5. В следующей теореме мы резюмируем основные свойства ростов.

Теорема 1. Множество ростов Ω^* с операциями $\omega_1 \vee \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2$ образует решетку, обладающую следующими свойствами.

a) В решетке Ω^* существует наименьший эдемент ω_0 и наибольший элемент ω_∞.

b) Для любого роста ω такого, что $\omega < \omega_\infty$ существует такая строго возрастающая последовательность ростов $\omega = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots$, что каждый рост ω_{i+1} экспоненциально больше ω_i, $i = 0, 1, \ldots$

c) Решетка Ω^* плотная, т.е. для любых $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*$, существует такой рост $\omega_3 \in \Omega^*$ что $\omega_1 < \omega_3 < \omega_2$.

d) В решетке Ω^* не существует ни атомов, ни коатомов.

e) Для всех ω, $\omega_0 < \omega < \omega_\infty$, существует несчетное семейство попарно несравнимых ростов, которые не сравнимы с ω (несчетные антицепи).

f) Решетка Ω^* дистрибутивная (и, таким образом, модулярная).

g) Решетка Ω^* полная.

Отметим, что Ω^* не является булевой алгеброй. Аналоги утверждений b), c) и e) теоремы 1 были сформулированы без доказательства в [21].

Вообще говоря, функции данного роста могут быть устроены довольно сложно. Тем не менее, в каждом росте можно найти много совсем простых функций, так называемых ступенчатых функций.

Определение 2. Пусть $N = \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$. *Ступенчатая функция*, отвечающая последовательности N определена посредством $S_N(n) = n_{i+1}$ для всех $n \in [n_i, n_{i+1})$.

Каждый рост представляется некоторой ступенчатой функцией.

Предложение 9. Каждый рост ω является классом эквивалентности некоторой ступенчатой функции.

Доказательство: Пусть $f \in \omega$. Определим последовательность $N = \{n_i\}$ следующим образом $n_0 = 1$, $n_{i+1} = f(n_i) = f^{i+1}(1)$. Для каждого $n \in [n_i, n_{i+1})$ имеем $f(n) \leq f(n_{i+1}) = n_{i+2} = S_N^2(n)$. С другой стороны, $S_N(n) = n_{i+1} = f(n_i) \leq f(n)$, откуда следует $f \sim S_N$. □

Конечно, различные функции могут быть эквивалентны одной и той же ступенчатой функции и обратно, каждый рост содержит много различных ступенчатых функций. Ступенчатые функции хорошо себя ведут по отношению к композиции. Если $n \in [n_i, n_{i+1})$, то $S_N^k(n) = n_{i+k}$.

Лемма 2. Для двух последовательностей $N = \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $M = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ неравенство $S_N(n) \prec S_M^k(n)$ выполняется в том и только том случае, когда почти все интервалы $[m_j, m_{j+1})$ содержат не более $k-1$ членов последовательности N.

Доказательство: В самом деле, если $S_M \prec S_N^k$ и $n_s, \ldots, n_{s+k} \in [m_i, m_{i+1})$ для некоторого i, то $S_M(n_s) = m_{i+1} > n_{s+k} = S_N^k(n_s)$. С другой стороны, если $n \in [n_i, n_{i+1}) \cap [m_j, m_{j+1})$, то $S_M(n) = m_{j+1}$, $S_N^k(n) = n_{i+k}$. Если, кроме того, $[m_j, m_{j+1})$ содержит не более $k-1$ членов последовательности N, то $n_{i+k} > m_{j+1}$ и $S_M(n) \prec S_N^k(n)$. □

Охарактеризуем теперь порядок на множестве ростов с использованием ступенчатых функций. Основную роль в дальнейших рассуждениях играет следующее предложение, которое легко следует из предыдущей леммы.

Предложение 10. Для двух произвольных последовательностей N и M мы имеем:

a) $[S_N] = [S_M]$ если и только если существуют границы для количества членов последовательности N в интервалах $[m_i, m_{i+1})$ и для количества членов последовательности M в интервалах $[n_j, n_{j+1})$.

b) $[S_N] < [S_M]$ если и только если существуют границы для количества членов последовательности N в интервалах $[m_i, m_{i+1})$ и не существует таких оценок для количества членов последовательности M в интервалах $[n_j, n_{j+1})$.

c) $[S_N]$ и $[S_M]$ несравнимы в том и только том случае, когда не существует таких оценок для количества членов последовательностей N и M в интервалах $[m_i, m_{i+1})$ и $[n_j, n_{j+1})$, соответственно.

Лемма 3. Если $N \subset M$, то $[S_M] \leq [S_N]$. Обратно, если $\omega_1 \leq \omega_2$, то существуют последовательности N и M такие, что $\omega_1 = [S_M]$, $\omega_2 = [S_N]$ и $N \subset M$.

Доказательство: По предложению 3, $\omega_1 = [S_N]$, $\omega_2 = [S_M]$ для некоторых N, M. Так как $\omega_1 \leq \omega_2$, интервалы $[m_i, m_{i+1})$ содержат более k членов последовательности N для некоторого фиксированного k. Пусть

$$[m_{i_1}, m_{i_1+1}), \ldots, [m_{i_s}, m_{i_s+1}), \ldots$$

— последовательность всех интервалов, содержащих по крайней мере один член N. Положим $n'_s = m_{i_s}$, $N' = \{n'_s\}$. Тогда $N' \subset M$. Интервалы $[n'_s, n'_{s+1})$ содержат не более k членов последовательности N. С другой стороны, интервалы $[n_j, n_{j+1})$ содержат не более одного члена последовательности N', откуда следует, что $S_N \sim S_{N'}$. □

Охарактеризуем теперь в терминах ступенчатых фунуций операции $\omega_1 \vee \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2$. Для последовательностей N, M, мы имеем $\min(S_N, S_M) = S_{N \cup M}$, где $N \cup M$ обычное объединение множеств.

Введем новые операции на последовательностях N, M. Прежде всего, определим новую последовательность $L = N \vee M$ следующим образом. Предположим, что $n_1 \leq m_1$. Положим $l_1 = n_1$. Предположим, что мы уже построили члены $l_1, \ldots, l_{2i-1}$. Тогда l_{2i} — наименьший член последовательности M, больший, чем l_{2i-1} и пусть l_{2i+1} наименьший член последовательности N больший, чем l_{2i}. Ясно, что $\max(S_N, S_M) \sim S_{N \vee M}$. Имеет место следующий результат.

Лемма 4. Если $N \sim N'$, $M \sim M'$, то $N \cup M \sim N' \cup M'$, $N \vee M \sim N' \vee M'$.

Доказательство : Пусть $N = \{n_i\}$, $N' = \{n'_i\}$, $M = \{m_i\}$, $M' = \{m'_i\}$ и $N \cup M = K = \{k_i\}$, $N' \cup M' = K' = \{k'_i\}$. Тогда существует натуральное n такое, что интервалы $[n_i, n_{i+1})$, $[m_j, m_{j+1})$ содержат не более n членов последовательностей N' и M', соответственно, а интервалы $[n'_i, n'_{i+1})$, $[m'_j, m'_{j+1})$ содержат не больше, чем n членов последовательностей N и M, соответственно. В этом случае интервалы $[k_i, k_{i+1})$,

$[k'_i, k'_{i+1})$ содержат не более $2n$ членов последовательностей K', K, соответственно. Таким образом, $K \sim K'$.

Пусть теперь $L = N \vee M$, $L' = N' \vee M'$. Интервал $[l_{2i-1}, l_{2i})$ содержится в интервале $[m_j, m_{j+1})$, где $m_{j+1} = l_{2i}$, и, таким образом, содержит не более, чем n членов последовательности M' для некоторого n. Тем самым, $[l_{2i-1}, l_{2i})$ содержит не более, чем $2n$ членов последовательности L', так как он содержит не более, чем n членов последовательности M'. Кроме того, $[l_{2i}, l_{2i+1})$ содержит не более, чем $2n$ членов последовательности L', так как он содержит не более, чем n членов последовательности N'. Поменяв в этих рассуждениях L и L' местами, мы получим требуемое заключение. □

Доказательство Леммы 1: Пусть $\omega_1 = [S_N]$,$\omega_2 = [S_M]$, $K = N \cup M$, $\omega_3 = [S_K]$. Так как $K \supset N, M$, то по лемме 2 мы можем заключить, что $[S_N] \geq [S_K]$, $[S_M] \geq [S_K]$. Теперь предполоение $\omega = [S_{K'}]$, $K' = \{k'_i\}$, дает $\omega \not< \omega_3$. Но тогда не существует границы для количества членов последовательности K в интревалах $[k'_i, k'_{i+1})$. Предположим, что $\omega \leq \omega_1$ и $\omega \leq \omega_2$. Тогда существует n такое, что $[k'_i, k'_{i+1})$ содержит не более, чем n членов последовательностей N и M, и, таким образом, не более, чем $2n$ членов последовательности K, противоречие.

Пусть $\omega_4 = [L]$, $L = N \vee M$, $L = \{l_i\}$. Положим $L_1 = \{l_{2i-1}\}$, $L_2 = \{l_{2i}\}$. Тогда $L_1 \sim L_2 \sim L$. Так как $L_1 \subset N$, $L_2 \subset M$, то $[S_L] \geq [S_N], [S_M]$. Предположим теперь, что $\omega \not< \omega_4$, $\omega = [S_{L'}]$. Тогда не существует границы для количества членов последовательности M в интервалах $[l_i, l_{i+1})$ и, таким образом, то же самое выполняется для интервалов $[l_{2i-1}, l_{2i})$ или интервалов $[l_{2i}, l_{2i+1})$. Но $[l_{2i-1}, l_{2i})$ содержится в некотором $[m_s, m_{s+1})$, а $[l_{2i}, l_{2i+1})$ содержится в некотором $[n_t, n_{t+1})$, что и завершает доказательство. □

Доказательство Теоремы 1: Из леммы 3 следует, что Ω^* является решеткой. Часть a) очевидна. Для доказательства b), положим $\omega = [f]$ и определим $g_1(n) = f^n(n)$. Тогда $\omega_1 = [g_1] > \omega$. Теперь положим $\omega_k = [g_k]$, где $g_k(n) = g^n_{k-1}(n)$. Имеем $\omega < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_k < \ldots$

c) Предположим, что $\omega_1 = [S_N]$, $\omega_2 = [S_M]$, $N = \{n_i\}$, $M = \{m_j\}$, $\omega_1 < \omega_2$. Из предложения 4 b) следует, что интервалы $[n_i, n_{i+1})$ содержат ограниченное количество членов последовательности M, но количество членов последовательности N в интервалах $[m_j, m_{j+1})$ не является ограниченным. Пусть $\{[m_{j_s}, m_{j_s+1}]\}$, $s = 1, 2, 3, \ldots,$ — последовательность интервалов такая, что $[m_{j_s}, m_{j_s+1})$ содержит более, чем s^2 членов N. Обозначим эти члены через $n_{i_s+1}, \ldots, n_{i_s+s^2}$. Положим $K' = \bigcup_{s=1}^{\infty}\{n_{i_s}, n_{i_s+s}, \ldots, n_{i_s+s(s-1)}\}$ и $K = M \cup K'$, $K = \{k_i\}$. Пусть $\omega_3 = [S_K]$. Так как $M \subset K$, то $\omega_3 \leq \omega_2$ причем это неравенство является точным, так как каждый интервал $[m_{j_s}, m_{j_s+1})$ содержит s членов последовательности K. С другой стороны, каждый интервал $[n_i, n_{i+1})$ содержит не более, чем k_0 членов последовательности M и не более 1 члена последовательности K'. Это значит, что $\omega_1 \leq \omega_3$. Но каждый интервал $[k_i, k_{i+1})$, совпадающий с некоторым интервалом $[n_{i_s}, n_{i_s+s})$, содержит s членов последовательности N, так что $\omega_1 < \omega_3 < \omega_2$.

d) легко следует из c).

e) Если $\omega_0 < \omega < \omega_\infty$, то в силу плотности можно найти ω_1, ω_2 такие, что $\omega_0 < \omega_1 < \omega < \omega_2 < \omega_\infty$. Пусть $\omega = [S_N]$, $\omega_1 = [S_M]$, $\omega_2 = [S_K]$. Взяв некоторую подпоследовательность $N' \subseteq N$, мы можем предполагать, что каждый интревал $[n'_i, n'_{i+1})$, в частности, содержит три последовательных m_j и три последовательных k_l. Пусть A — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$. Представим его в виде дизъюнктного объединения $A = A_1 \cup A_2$ нечетных и четных членов $A_1 = \{a_{2s+1}\}$, $A_2 = \{a_{2s}\}$. Ясно, что можно определить новую функцию F_A, так что на интервалах $[n'_i, n'_{i+1})$ функция F_A определена как S_N, если $i \in \mathbb{N} \setminus A$, как S_K, если $i \in A_1$, и как S_M, если $i \in A_2$, при этом склейка производится так, чтобы выполнялось свойство $F_A \in \Omega_\infty$. Росты $[S_N]$ и $[F_A]$ несравнимы.

Для каждого вещественного числа r выберем бесконечную последовательность $\{b_n\}$ различных рациональных чисел, сходязуюся к r, и определим Γ_r как множество $\{b_n : n = 1, 2 \ldots\}$. Тогда $\{\Gamma_r : r \in \mathbb{R}\}$ является несчетным семейством подмножеств в $\mathbb{Q}$ таких, что как Γ, так и $\mathbb{Q} \setminus \Gamma$ бесконечны, причем два любых различных члена этого семейства Γ, Γ' пересекаются по конечному множеству $\Gamma \cap \Gamma'$. Это классический результат В. Серпиньского, доказанный в 1928 году [159]. Пусть $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ — любая биекция и $\Delta_r = \phi(\Gamma_r)$.

Тогда семейство ростов $\{[F_{\Delta_r}]\}_{r \in \mathbb{R}}$ является требуемым несчетным семейство попарно несравнимых ростов.

f) Предположим, что $\omega_1 = [S_N]$, $\omega_2 = [S_M]$, $\omega_3 = [S_K]$ попарно несравнимы. Посмотрим на $S_{N \cup M} = \min(S_N, S_M)$, $S_{N \cup K} = \min(S_N, S_K)$. Предположим, что $S_{N \cup M} \sim S_{N \cup K}$, $L = N \cup M$, $L' = N \cup K$. Тогда существует такое k, что каждый интервал $[l_i, l_{i+1})$ ссодержит не более k членов последовательности L'. Но либо $[l_i, l_{i+1}) = [m_s, m_{s+1})$, либо $[l_i, l_{i+2}) = [m_s, m_{s+1})$, так что $[m_s, m_{s+1})$ содержит не более, чем $2k$ членов последовательности N. В силу симметрии, также $S_N \sim S_M$, противоречие.

Предположим теперь, что $\omega_1 = [N]$, $\omega_2 = [M]$, $\omega_3 = [K]$, росты ω_1, ω_3 и ω_2, ω_3 попарно несравнимы и $\omega_1 < \omega_2$. По лемме 2 мы можем предполагать, что $M \subset N$. Если, кроме того, предположить, что $\omega_1 \wedge \omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_3$ мы точно также получим противоречие с предположением $\omega_1 < \omega_2$. Таким образом Ω^* не содержит как подрешетку ни диамант M_5, ни пятиугольник N_5 и, таким образом, дистрибутивна [62]. Хорошо известно, что для решеток дистрибутивность влечет модулярность.

g) Пусть $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — произвольное семейство ростов. Выберем любую функцию f_α из ω_α. Сейчас мы построим две функции f и g. А именно, положим $f(n) = \max_\alpha\{f_\alpha(n)\}$ и $g(n) = \min_\alpha\{g_\alpha(n)\}$. Ясно, что $f, g \in \Omega_\infty$. Из построения следует, что $[f]$ и $[g]$ — верхние и нижние границы семейства $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$. □

§ 5. Подгруппы определенные ростами

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1. Через $\mathrm{M}(\infty, R)$ мы обозначаем множество всех $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-матриц. Сложение матриц из $\mathrm{M}(\infty, R)$ всюду определено, но для умножения это не так. Кроме того, как показывает пример из параграфа 1 [73], умножение матриц из $\mathrm{M}(\infty, R)$ не является даже слабо ассоциативим.

Отметим два следующих важных результата из [73]. Если $R = F$ поле, то:

1) каждую счетномерную ассоциативную алгебру над F можно вложить в $\mathrm{M}(\infty, F)$,

2) каждый конечный или счетный группоид можно вложит в $\mathrm{M}(\infty, F)$.

В настоящей статье мы, вообще говоря, интересуемся ассоциативными структурами, так что мы используем дополнительные предположения, гарантирующие ассоциативность умножения. Будем рассматривать $\mathrm{M}_c(\infty, R)$ – кольцо всех конечностолбцовых матриц и его подкольцо $\mathrm{M}_{rc}(\infty, R)$ — всех конечнострочных и конечностолбцовых матриц.

Определение 3. Говорят, что функция $f \in P(\mathbb{N})$ является *строчной границей* для матрицы $a = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(\infty, R)$, если $a_{n,m} = 0$ для всех $m > f(n)$. Аналогично, функция $g \in P(\mathbb{N})$ называется *столбцовой границей* для a, если $a_{n,m} = 0$ для всех $n > g(m)$. Условие ограниченности очевидным образом выполняется, если $f(n) = \infty$ и $g(n) = \infty$.

В некотором смысле, функции f и g являются границами ширины полосы вдоль главной диагонали, содержащей все ненулевые элементы матрицы a.

Предложение 11. Для каждой матрицы $a \in \mathrm{M}(\infty, R)$ существует наименьшая строчная граница для a в Ω_∞, обозначаемая через B_r^a. Точно также, для любой матрицы $a \in \mathrm{M}(\infty, R)$ существует наименьшая столбцовая граница для a в Ω_∞, обозначаемая через B_c^a.

Доказательство: Положим $B_r^a(1) = m$, где $m = \max(2, \max(n : a_{1n} \neq 0))$, или $B_r^a(1) = \infty$, если такого m не существует. Пусть $B_r^a(n+1) = max(n+2, B_r^a(n), m)$, где

$m = \max(k : a_{nk} \neq 0)$, или $B_r^a(n+1) = \infty$, если такого m не существует. Граница по столбцвм $B_c^a(n)$ определяется аналогично. Из этого определения следует, что $B_r^a(n)$ и $B_c^a(n)$ обладают требуемыми свойствами. □

Построенная в доказательстве граница B_r^a называется *верхней границей* для a, а B_c^a — *нижней границей* для a. Нижние и верхние границы согласованы с умножением матриц. А именно, если $B_r^a, B_r^b \leq f$, то $B_r^{ab} \leq f^2$ (см. Рисунок 2). Точно так же, если $B_c^a, B_c^b \leq g$, то $B_c^{ab} \leq g^2$.

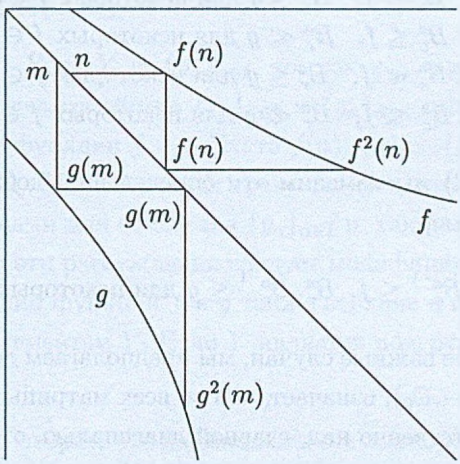


Рисунок 2

Замечание. Из предложения 6 следует, что для каждого $a \in \mathrm{M}(\infty, R)$ существуют росты ω_1, ω_2 такие, что $\omega_1 = [B_r^a]$, $\omega_2 = [B_c^a]$. Кроме того, если $\omega_3 \not\succ \omega_1$, тогда ни одна из функций $f \in \omega_3$ не является строчной границей для a, а если $\omega_4 \not\succ \omega_2$, то ни одна из функций $g \in \omega_4$ не является столбцовой границей для a.

С другой стороны, для каждого роста ω можно найти матрицу $a \in \mathrm{M}(\infty, R)$ такую, что $\omega = [B_r^a]$. Пусть $\omega = [S_N]$ для некоторой ступенчатой функции S_N. Достаточно взять верхнюю унитреугольную матрицу, у которой на главной диагонали расположены конечные блоки размеров $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \ldots$, все элементы которых равны 1. Аналогичный результат выполняется и для столбцовых границ. □

Для колец $\mathrm{M}_c(\infty, R)$ и $\mathrm{M}_{rc}(\infty, R)$ обозначим через $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ и $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ их группы обратимых элементов. Рассмотрим также соответствующие полугруппы $S_c(\infty, R)$ и $S_{rc}(\infty, R)$.

Для коммутативного кольца R можно определить также ассоциативную R-алгебру $A_c(\infty, R)$ конечностолбцовых матриц и ее подалгебру $A_{rc}(\infty, R)$. Рассматривая скобку Ли $[a, b] = ab - ba$ мы обычным образом получим алгебру Ли $L_c(\infty, R)$ и ее подалгебру Ли $L_{rc}(\infty, R)$.

Так как доказательства наших результатов для групп, полугрупп, колец, алгебр и алгебр Ли, мы формулируем их на языке универсальной алгебры.

В дальнейшем тексте X_c обозначает один из следующих обхектов:

$$\mathrm{M}_c(\infty, R), \quad \mathrm{GL}_c(\infty, R), \quad S_c(\infty, R), \quad A_c(\infty, R), \quad L_c(\infty, R),$$

а X_{rc} означает его строчно и столбцово конечный аналог. Определим четыре подмножества в X_c, отвечающие ростам ω_1 и ω_2:

$$\begin{aligned}
X(\omega_1, \omega_2) &= \{a \in X_c : \ \ B_c^a \le f, \ \ B_r^a \le g \text{ для некоторых } f \in \omega_1, g \in \omega_2\}, \\
X(\omega_1, \widehat{\omega}_2) &= \{a \in X_c : \ \ B_c^a \le f, \ \ B_r^a \ll g \text{ для некоторых } f \in \omega_1, g \in \omega_2\}, \\
X(\widehat{\omega}_1, \omega_2) &= \{a \in X_c : \ \ B_c^a \ll f, \ \ B_r^a \le g \text{ для некоторых } f \in \omega_1, g \in \omega_2\}, \\
X(\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2) &= \{a \in X_c : \ \ B_c^a \ll f, \ \ B_r^a \ll g \text{ для некоторых } f \in \omega_1, g \in \omega_2\}.
\end{aligned}$$

В случае $X_c = \mathrm{GL}_c(\infty, R)$ мы изменим эти определения, добавив те же самые ограничения для a^{-1}. Например,

$$X(\omega_1, \omega_2) = \{a \in X_c : \ B_c^a, B_c^{a^{-1}} \le f, \ B_r^a, B_r^{a^{-1}} \le g \text{ для некоторых } f \in \omega_1, g \in \omega_2\}$$

Чтобы охватить некоторые важные случаи, мы предполагаем дополнительно, что $X(\widehat{\omega}_0, -)$, соответственно $X(-, \widehat{\omega}_0)$, означает, что во всех матрицых только конечное число элементов под, соответственно над, главной диагональю, отличны от 0.

Из замечания следует, что равенство $X(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_3, \omega_4)$ выполняется в том и только том случае, когда $\omega_1 = \omega_3$ и $\omega_2 = \omega_4$. Вообще говоря, выполняется следующая диаграмма Хассе включений.

$$\begin{tikzcd}
& X(\omega_1, \omega_2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
X(\widehat{\omega}_1, \omega_2) \arrow[dr, dash] & & X(\omega_1, \widehat{\omega}_2) \arrow[dl, dash] \\
& X(\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2) &
\end{tikzcd}$$

Рисунок 3

Единственными исключениями злесь являются $X(\widehat{\omega}_\infty, \omega_\infty) = X(\omega_\infty, \omega_\infty) = X_c$ и $X(\widehat{\omega}_\infty, \widehat{\omega}_\infty) = X(\omega_\infty, \widehat{\omega}_\infty) = X_{rc}$.

Теорема 2. Для любых ростов ω_1, ω_2 множества

$$X(\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2), X(\omega_1, \widehat{\omega}_2), X(\widehat{\omega}_1, \omega_2), X(\omega_1, \omega_2)$$

являются подалгебрами алгебры X_c (в смысле универсальной алгебры). Если $\omega_1, \omega_2 < \omega_\infty$, то $X(\omega_1, \omega_2)$ подалгебра X_{rc}.

Обычно мы пишем просто $X(\omega) = X(\omega, \omega)$ и $X(\widehat{\omega}) = X(\widehat{\omega}, \widehat{\omega})$.

Теперь из замечания вытекает следующий результат.

Теорема 3. Решетки $\{X(\omega)\}$ и $\{X(\widehat{\omega})\}$ изоморфны решетке ростов $\Omega^\star$.

Следующий результат играет основную роль в приложениях ростов к изучению универсальных алгебр.

Теорема 4. Если Y — подмножество X_c, то существует такие наименьшие росты ω_1 и ω_2 в $\Omega^\star$, что $Y \subset X(\omega_1, \omega_2)$.

Доказательство: Если $Y = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$, то, как и в замечании, для каждого y_α мы можем построить два семейства $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ верхних и нижних границ. Построим теперь две функции f и g. Пусть $f(n) = \max_\alpha\{f_\alpha(n)\}$ и $g(n) = \max_\alpha\{g_\alpha(n)\}$. Ясно, что $f, g \in \Omega_\infty$. Из построения сразу следует, что $[f]$ и $[g]$ явдяются верхними и нижними границами для семейства $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и, таким образом, $Y \subset X([g], [f])$.□

В случае групп эти рассуждения следует модифицировать таким образом, чтобы учесть в определении функций f и g также верхние и нижние границы для элементов, обратных к элементам Y. Если Y является подгруппой, в таком изменении нет необходимости. □

Определение 4. Говорят, что подмножество Y алгебры $X_c(\infty, R)$ в теореме 4 имеет рост в полосе (ω_1, ω_2). Если $\omega_1 = \omega_2$, говорят, что Y имеет рост в полосе ω (или просто ростом ω).

Сформулируем теперь задачи, относящиеся к ростам.

> **Проблема 1** Какие алгебраические свойства универсальной алгебры X следуют из того факта, что X вкладывается в $X(\omega_1, \omega_2)$?
>
> **Проблема 2** Опишите свойства $X(\omega_1, \omega_2)$, зависящие от ω_1, ω_2.

В следующем параграфе мы приводим некоторые результаты по этим проблемам для групп.

§ 6. Порождение стрингами

В настоящем параграфе мы докажем результаты о ширине групп подстановок $\mathrm{Sym}(\omega) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N} \cap \mathrm{GL}(\omega)$ и верхнетреугольных матриц $\mathrm{UT}(\omega) = \mathrm{UT}_r(\infty, R) \cap \mathrm{GL}(\omega)$ относительно соответсвевующих стрингов. Мы говорим, что ширина группы G относительно порождающего множества S равна k, если каждый элемент из G является произведением не больше чем k элементов из S и существует такой элемент, который не является произведением меньшего числа элементов из S. Оказывается, что любая подстановка из $\mathrm{Sym}(\omega)$ является стрингом или произведением двух стрингов. Аналогично, любая матрица из $\mathrm{UT}(\omega)$ является стрингом или произведением двух стрингов для произвольного ассоциативного кольца R. Это обобщает известные результаты Вермеша [175], [176], Денеса и Пaштора [74] в случае группы $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ и Вермеша и Айреша для треугольной группы бесконечных матриц над полем комплексных чисел. В конце параграфа мы докажем, что любой элемент группы $\mathrm{GL}(\omega_0)$ является произведением стрингов для произвольного ассоциативного кольца R. Этот результат известен для группы $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, K)$ над конечным полем K [165]. В случае поля комплексных чисел, Вермеш и Айреш показали, что любая матрица из $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, \mathbb{C})$ является произведением не более чем четырех стрингов [175], [176] ([172], [173], [174], [177], [179]).

Результаты этого параграфа опубликованы в работах автора [13], [107], [12].

Определение 5. Матрица $a \in \mathrm{GL}(\infty, R)$ называется *стринг-матрицей* или *стрингом*, если существует бесконечная последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел такая, что $a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{GL}(n_i, R)$ при естественном диагональном вложении этого произведения в $\mathrm{GL}(\infty, R)$. Бусиной называем стринг, у которого только один неединичный блок на диагонали.

Иными словами, a является блочно-диагональной матрицей с блоками размерностей $n_1, n_2, \ldots$ по диагонали. Ее можно записать в виде бесконечного произведения коммутирующих конечных блоков $a = \prod_{s=1}^{\infty} a_s$. Отсюда видно, что $a^{-1} = \prod_{s=1}^{\infty} a_s^{-1}$, значит обратная к a матрица тоже является стрингом. Отметим, что произведение двух стринг-матриц не всегда является стрингом.

Символом $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$ обозначим семейство всевозможных конечных произведений стрингов.

Очевидно, что группа $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$ содержится в $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$.

Главным результатом настоящего параграфа является

Теорема 5. Группы $\mathrm{Sym}(\omega)$, $\mathrm{UT}(\omega)$ и $\mathrm{GL}_b(\infty, R)$ порождаются стрингами. Ширина групп $\mathrm{Sym}(\omega)$ и $\mathrm{UT}(\omega)$ равна 2.

Пусть $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \cap G(\widehat{\omega})$. Подгруппа $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}_0)$ называется группой финитных перестановок (подгруппой всех перестановок, которые сдвигают лишь конечное число элементов). Конечно, так как для перестановки a имеем $a^{-1} = a^t$, то каждая подгруппа $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ содержится в некотором $G(\omega) \cap \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Отметим, что Е.А. Ковальчук описал нормальные подгруппы $\mathrm{Sym}(\omega_0)$ [21].

Доказательство теоремы сделаем в несколько шагов.

Мы говорим, что матрица a имеет блочно трехдиагональную форму, если

$$a = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & & & & \\ v_1 & u_2 & w_2 & & & \\ & v_2 & u_3 & w_3 & & \\ & & v_3 & u_4 & w_4 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (*)$$

где на главной диагонали расположены квадратные матрицы $u_1, u_2, u_3, \ldots$ размеров

$$n_1 \times n_1, (n_2 - n_1) \times (n_2 - n_1), (n_3 - n_2) \times (n_3 - n_2), \ldots$$

Матрицы $v_1, v_2, \ldots$ имеют размеры

$$(n_2 - n_1) \times n_1, (n_3 - n_2) \times (n_2 - n_1), \ldots$$

а матрицы $w_1, w_2, \ldots$, соответственно, размеры

$$n_1 \times (n_2 - n_1), (n_2 - n_1) \times (n_3 - n_2), \ldots.$$

Кроме того, все ненулевые элементы матрицы a появляются в блоках u_i, v_i, w_i, $i \geq 1$.

Сначала мы докажем лемму

Лемма 5. Любую матрицу a из группы $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ можно представить в блочно трехдиагональной форме.

Доказательство. Выберем любое $n_1 > 1$. Пусть m_1 — наименьшее число такое, что все ненулевые элементы первых n_1 столбцов расположены в первых m_1 строках, а все ненулевые элементы первых n_1 строк расположены в первых m_1 столбцах. Положим $n_2 = \max\{n_1 + 1, m_1\}$. Пусть теперь m_2 — наименьшее число такое, что все ненулевые элементы первых n_2 столбцов расположены в первых m_2 строках, а все ненулевые элементы первых n_2 строк расположены в первых m_2 столбцах. Положим теперь $n_3 = \max\{n_2 + 1, m_2\}$. Повторяя эту процедуру, мы построим бесконечную последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Из построения следует, что a имеет блочно трехдиагональную форму (*) и все ненулевые элементы матрицы a появляются в блоках u_i, v_i, w_i, $i \geq 1$.$\square$

Теперь мы докажем следующий результат.

Предложение 12. Группа $\mathrm{Sym}(\omega)$ порождается стрингами. Точнее, каждый элемент $\mathrm{Sym}(\omega)$ либо сам является стрингом, либо представляется как произведение двух стрингов из $\mathrm{Sym}(\omega)$.

Доказательство. Предположим, что $a \in \mathrm{Sym}(\omega)$, причем a не является стрингом. Мы построим два стринга b, c такие, что произведение $c \cdot a \cdot b$ является единичной матрицей.

По лемме 5 мы представим a в блочно трехдиагональной форме

$$a = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & & & & \\ v_1 & u_2 & w_2 & & & \\ & v_2 & u_3 & w_3 & & \\ & & v_3 & u_4 & w_4 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Положим $r_0 = s_0 = 0$ и пусть $r_k = n_{2k}$, $s_k = n_{2k-1}$. Рассмотрим два следующие разбиения множества натуральных чисел $B_k = \{r_{k-1}+1, \ldots, r_k\}$ и $C_k = \{s_{k-1}+1, \ldots, s_k\}$.

Переупорядочим первые r_1 столбцов матрицы a, каждый из которых содержит ровно один единичный элемент, таким образом, чтобы столбец, имеющий 1 в k-й строке, $k \in C_1$, оказался k-м столбцом. Такая перестановка столбцов неединственна, так как остальные столбцы, имеющие 1 ниже строки с номером s_1, можно располагать произвольно. После такой перестановки блок u_1 становится единичной матрицей размера $n_1 \times n_1$, а блоки w_1, v_1 оба заменяются на нулевые матрицы. Эта перестановка столбцов эквивалентна умножению a справа на бусину $\mathrm{diag}\,(b_1, 1, 1, \ldots)$. Теперь столбцы с номерами из B_2 можно упорядочить так, чтобы блок u_3 стал единичной матрицей, а оба блока w_3, v_3 стали нулевыми. Эта перестановка эквивалентна умножению $a \cdot \mathrm{diag}\,(b_1, 1, 1, \ldots)$ справа на бусину $\mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, b_2, 1, 1, \ldots)$.

Ясно, что продолжая действовать таким образом, мы одновременно переставим столбцы с номерами из B_1, B_2, $B_3, \ldots$, это отвечает умножению a справа на стринг $b = \mathrm{diag}\,(b_1, b_2, b_3, \ldots)$. Точно также, мы можем переупорядочить строки с номерами из C_2 так, чтобы блок u_2 стал единичной матрицей, а блоки w_2, v_2 оба заменились на нулевые матрицы. Такая перестановка строк эквивалентна умножению a слева на бусину $\mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, c_2, 1, 1, \ldots)$. Теперь ясно, что продолжая действовать таким образом, мы можем одновременно переставить строки с номерами из C_2, C_3, $C_4, \ldots$, это эквивалентно умножению слева на стринг $c = \mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, c_2, c_3, c_4, \ldots)$. Окончательно, это значит, что произведение $c \cdot a \cdot b$ является единичной матрицей. При этом как c, так и b принадлежат $\mathrm{Sym}(\omega)$, что и доказывает теорему.□

Предложение 13. Группа $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}_0)$ финитных перестановок нормальна в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$.

Доказательство. Покажем, что сопряжение финитной перестановки при помощи стринга является финитной перестановкой. Тогда результат следует из предыдущего предложения, утверждающего, что группа перестановок порождается стрингами. Пусть $b = \mathrm{diag}\,(b_1, 1, 1, 1, \ldots)$ — финитная перестановка, а $a = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ — стринг. Выберем s так, чтобы размер b_1 был не больше, чем сумма t размеров $a_1, \ldots, a_s$. Тогда матрица $a^{-1} \cdot b \cdot a = \mathrm{diag}\,(b'_1, 1, 1, 1, \ldots)$ финитная (где размер b'_1 равен t). $\square$

Инволюция $a \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ называется *элементарной*, если все 2-циклы в a имеют вид $(i, i+1)$.

Предложение 14. Группа $\mathrm{Sym}(\omega_0)$ порождается элементарными инволюциями.

Доказательство. Если $a \in \mathrm{Sym}(\omega_0)$ — стринг $a = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, то размеры блоков $a_1, a_2, \ldots$ ограничены некоторым натуральным k. Таким образом, каждый блок можно рассматривать как перестановку из $\mathrm{Sym}(k)$ Каждая перестановка из $\mathrm{Sym}(k)$ является произведением не более, чем $f(k)$ элементарных инволюций и, таким образом, то же самое выполняется для a. Если a произведение двух стрингов, то мы представим каждый стринг как произведение элементарных инволюций, откуда и следует наш результат. $\square$

Определение 6. Матрица $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ называется *стринг-матрицей* или *стрингом*, если существует бесконечная последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел такая, что $a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{UT}(n_i, R)$ при естественном диагональном вложении этого произведения в $\mathrm{UT}(\infty, R)$.

Символом $\mathrm{UT}_{str}(\infty, R)$ обозначим семейство всевозможных конечных произведений стрингов. Это группа, которая может быть охарактеризована в матричных терминах следующим образом. Длиной строки матрицы из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ называем номер столбца последнего ненулевого элемента в строке, в случае, когда такого элемента не существует говорим, что длина строки бесконечна. Матрицу называем конечно строчной если длина любой ее строки конечна. Символом $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ обозначим подгруппу всех a из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ таких, что a и a^{-1} конечнострочные матрицы. Каждая строка такой матрицы содержит конечное число ненулевых элементов.

Очевидно, что подгруппа $\mathrm{UT}_{str}(\infty, R)$ содержится в $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$.

Предложение 15. Группа $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ порождается стринг-матрицами, т. е. имеет место равенство $\mathrm{UT}_r(\infty, R) = \mathrm{UT}_{str}(\infty, R)$. Более точно, любой элемент из $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ является стрингом или произведением двух стрингов.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{UT}_r(\infty, R)$ — некоторая конечно строчная матрица. Фиксируем произвольное натуральное число $n_1 \geq 1$. Пусть m_1 будет наибольшей из длин первых n_1 строк матриц g и g^{-1}, а m_2 — наибольшей из длин первых m_1 строк матриц g и g^{-1}. Имеем $m_2 \geq m_1 \geq n_1$. Положим $n_2 = m_2 + 1$.

Пусть m_3 будет наибольшей из длин первых n_2 строк матрицы g и g^{-1}, а m_4 — наибольшей из длин первых m_3 строк матриц g и g^{-1}. Положим $n_3 = m_4 + 1$. Продолжая процедуру построения чисел n_i, мы одновременно получим разбиение матриц g (и g^{-1}) на блоки, при этом на главной диагонали будут находится квадратные верхние унитреугольные матрицы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ для матрицы g ($c_1, c_2, c_3, \ldots$ соответственно для матрицы g^{-1}) размеров $n_1 \times n_1$, $(n_2 - n_1) \times (n_2 - n_1)$, $(n_3 - n_2) \times (n_3 - n_2)$, ... Кроме того, все ненулевые элементы матриц g (g^{-1}) расположены в блоках $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ ($c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots$), как это схематически изображено ниже.

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & a_3 & b_3 & \\ & & & a_4 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & & & \\ & c_2 & d_2 & & \\ & & c_3 & d_3 & \\ & & & c_4 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Матрицы b_1, d_1 имеют размер $n_1 \times (n_2 - n_1)$, матрицы b_2, d_2 размер $(n_2 - n_1) \times (n_3 - n_2)$, и т. д.

Из построения следует, что для всех n имеет место равенство $d_n \cdot b_{n+1} = 0$. Это вытекает из того, что в блоках b_k, d_k ненулевые элементы не появляются в столбцах с номерами больше, чем n_{2k-1}, а в блоках b_{k+1}, d_{k+1} ненулевые элементы не появляются в строках с номерами меньше, чем n_{2k}. Так как $g \cdot g^{-1} = e$, мы имеем $a_n \cdot d_n + b_n \cdot c_{n+1} = 0$ и $c_n = a_n^{-1}$ для всех n. Следовательно,

$$a_n \cdot d_n = -b_n \cdot c_{n+1} = -b_n \cdot a_{n+1}^{-1}.$$

Умножая обе стороны этого равенства на b_{n+1}, получаем

$$a_n \cdot d_n \cdot b_{n+1} = -b_n \cdot a_{n+1}^{-1} \cdot b_{n+1} = 0.$$

Построим теперь два стринга u, v таких, что $g = u \cdot v$. В разбиении на блоки матрицы g заменяем все $a_1, a_2, \ldots$ единичными матрицами $e_{n_1}, e_{n_2 - n_1}, \ldots$, все b_{2n-1} – нулевыми матрицами и все b_{2n} – произведениями $b_{2n} \cdot a_{2n+1}^{-1}$. Получим новую стринг-матрицу, которую обозначим символом u. Заменяя в разбиении по блокам матрицы g все b_{2n} нулевыми матрицами, получим другую стринг-матрицу v. Стринг-матрицы

u, v имеют следующий вид

$$u = \begin{pmatrix} e & & & & & \\ & e & b_2 \cdot a_3^{-1} & & & \\ & & e & & & \\ & & & e & b_4 \cdot a_5^{-1} & \\ & & & & e & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ & a_2 & & & & \\ & & a_3 & b_3 & & \\ & & & a_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Теперь используя равенство $b_n \cdot a_{n+1}^{-1} \cdot b_{n+1} = 0$, проверяем, что $g = u \cdot v$, и теорема доказана.□

Из доказательства на самом деле получается следующее

Следствие 1. Ширина группы $\mathrm{UT}(\omega)$ относительно стрингов равна 2.

Известно, что в случае когда $R = K$ – конечное поле, группа $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, K)$ порождается стрингами (смотри например [165]). Проблема порождаемости стрингами для произвольного ассоциативного кольца R пока открыта. Мы получили положительный ответ в частном случае подгруппы $\mathrm{GL}_b(\infty, R)$.

Предложение 16. Любая матрица a из группы $\mathrm{GL}_b(\infty, R)$ является произведением стрингов.

Доказательство описывает алгоритм для нахождения представления любой матрицы $a \in \mathrm{GL}_b(\infty, R)$ как произведениея стрингов. Очень интересен следующий открытый вопрос:

> Верно ли, что число стрингов в таком произведении ограничено для всех матриц некоторым натуральным числом k?

Отметим, что наше доказательство работает и в более общей ситуации для матриц имеющих не больше k ненулевых элементов в каждом блоке блочно-трехдиагональной формы матрицы рассматриваемой в доказательстве.

Доказательство:

Теперь мы опишем процедуру, которая умножениями на конечное число стрингов приводит матрицу a к единичной матрице. Сделаем это в трех шагах:

I. Найдем влочно трехдиагональную форму матрицы a.

II. Опишем приведение одного блочного столбца в трехдиагональной форме к единичному столбцу с использованием умножения на стринг, который является бусинкой.

III. Опишем главную процедуру приведения матрицы a к единичной матрице умножениями на стринги.

I. По лемме 5 мы представим a в блочно-трехдиагональной форме

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_2 & & & \\ d_1 & b_2 & c_3 & & \\ & d_2 & b_3 & c_4 & \\ & & d_3 & b_4 & c_5 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

где на главной диагонали квадраиные матрицы $b_1, b_2, b_3, \ldots$ размеров $n_1 \times n_1, (n_2 - n_1) \times (n_2 - n_1), (n_3 - n_2) \times (n_3 - n_2), \ldots$. Матрицы $d_1, d_2, \ldots$ имеют размеры $(n_2 - n_1) \times n_1, (n_3 - n_2) \times (n_2 - n_1), \ldots$ и матрицы $c_2, c_3, \ldots$ имеют размеры $n_1 \times (n_2 - n_1), (n_2 - n_1) \times (n_3 - n_2), \ldots$. Кроме того все ненулевые элементы матрицы a появляются только в блоках $b_1, d_1, c_i, b_i, d_i, i \geq 2,$.

II. 1) мы рассматриваем теперь только $k-$тый блочный столбец c_k, b_k, d_k. Этот блочный столбец проходит через столбцы матрицы a с номерами $n_{k-1}+1, n_{k-1}+2, \ldots, n_k$. Так как каждый столбец унимодулярен мы можем прибавить все ненулевые строки с $n_{k-1} + 1$-того столбца к $n_{k+1} + 1$-той строке таким образом, чтобы получить 1 на месте $(n_{k-1} + 1) \times (n_{k+1} + 1)$. Потом, используя эту 1, мы делаем нули в $n_{k+1} + 1$-той строке в столбцах с номерами $n_{k-1} + 2, n_{k-1} + 3, \ldots, n_k$. Аналогично, мы прибавляем соответсвующие строки к $n_{k+1} + 2$-той строке чтобы получить 1 в $n_{k-1} + 2$-том столбцу. Потом, используя эту 1, мы делаем нули в $n_{k+1} + 2$-той строке в столбцах с номерами $n_{k-1}+1, n_{k-1}+3, n_{k-1}+4, \ldots, n_k$. Продолжая эту процедуру мы получим ниже блока d_k квадратную единичную матрицу e размера $(n_k - n_{k-1}) \times (n_k - n_{k-1})$ как показано ниже:

$$\begin{array}{|c|}\hline c_k \\ \hline b_k \\ \hline d_k \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow 1) \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline c_k \\ \hline b_k \\ \hline d_k \\ \hline e \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow 2) \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline e \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow 3) \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline e \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

2) Мы используем этот блок e чтобы сделать нули выше этого блока. Используя 1 с $n_{k+1} + 1$-той строки мы делаем нули в $n_{k+1} + 1$-том столбце во всех строках выше $n_{k+1} + 1$-той. Аналогично, мы делаем нули исползуя 1 с $n_{k+1} + 2$-той строки в $n_{k+1} + 2$-том столбце во всех строках выше $n_{k+1} + 2$-той. Мы кончим эту процедуру когда сделаем нули во всех блоках выше блока e.

3) Мы меням местами $n_{k+1}+1$-тую строку с $n_{k-1}+1$-той строкой, $n_{k+1}+2$-тую строку с $n_{k-1}+2$-той строкой, ... Таким образом наш блок e переместиться на позицию, которую раньше занимал блок b_k.

4) Теперь используя единицы блока e мы делаем нули в строках с номерами $n_{k-1}+1,\dots,n_k$ слева от e, а потом справа.

Все шаги нашей -процедуры можно осуществить умножая слева (или справа) на соответсвующую бусинку, которая является элементарной матрицей.

III. Мы опишем теперь процедуру приведения матрицы a к единичной матрице умножениями слева и справа на соответствующие стринги. Из этого следует, что a является произведением стрингов.

1) Мы рассматриваем теперь блочный столбец c_5, b_5, d_5.
a) Используя процедуру из II мы делаем блок e_5 (единичную матрицу размера n_5-n_4) ниже d_5.
b) Мы делаем нули слева и справа от блока e_5.
c) Делаем нули выше блока e_5.
d) Меняя строки перемещаем блок e_5 на главную диагональ.

Ясно, что все эти операции на матрицы a можно осуществить умножением на бусинки соответсвующие элементарным матрицам. Кроме того, мы можем это сделать одновременно для блоков с номерами $1, 5, 9=5+4, 13=5+8, 17=5+12$ и так далее. Это соответствует умножению на стринги. Получаем

$$\begin{pmatrix}
e_1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
0 & \star & \star & & & & & & & & & & \\
 & \star & \star & \star & & & & & & & & & \\
 & & \star & \star & 0 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & e_5 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & 0 & \star & \star & & & & & & \\
 & & & \star & 0 & \star & \star & \star & & & & & \\
 & & & & & & \star & \star & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & e_9 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 0 & \star & \star & & \\
 & & & & & & & \star & 0 & \star & \star & \star & \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

2) Применяя процедуру из 1) в применении к блокам с номерами 2, 6, 10, ... получаем:

$$
\begin{pmatrix}
e_1 &&&&&&&&&&&& \\
& e_2 &&&&&&&&&&& \\
&& \star & \star &&&&&&&&& \\
&& \star & \star &&&&&&&&& \\
&&& 0 & e_5 &&&&&&&& \\
&&& 0 && e_6 &&&&&&& \\
&&& \star &&& \star & \star &&&&& \\
&&&&&& \star & \star &&&&& \\
&&&&&&& 0 & e_9 &&&& \\
&&&&&&& 0 && e_{10} &&& \\
&&&&&&& \star &&& \star & \star & \\
&&&&&&&&&&&& \ddots
\end{pmatrix}
$$

3) a) Теперь в седмом блочном столбце мы делаем матрицу e_7 (единичную матрицу размера $n_7 - n_6$) ниже последнего ненулевого блока так как в I.

b) Делаем нули слева и справа от e_7 а потом выше e_7.

c) Мы перемещаем блок e_7 на главную диагональ.

d) Применяя два ненулевые блока с девятой блочной строки мы исправляем левый верхний угол в блоке e_9 (он был испорчен предыдущими операциями).

e) Используя e_9 делаем нули в девятой блочной строке.

Ясно, что все эти операции можно осуществить умножениями на соответствующие бусинки. Более того, мы можем одновременно это сделать для блоков с номерами 3, 7, 11, 15, 19 умножением только на стринги.

В конце мы получим следующий обратимый стринг:

$$\operatorname{diag}(e_1, e_2, e_3, x_4, e_5, e_6, e_7, x_8, e_9, \ldots).$$

Теперь, умножая его на обратный к нему стринг получим единичную матрицу и теорема доказана.$\square$

Сейчас мы приведем доказательство того, что в случае поля группа $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, K)$ имеет ширину не больше 6.

Предложение 17. Для любого подя K каждая матрица $a \in \mathrm{GL}_{rc}(\infty, K)$ является произведением не болше чем 6 стрингов.

Доказательство: Пусть $a \in \mathrm{GL}_{rc}(\infty, K)$. Назовем глубиной строки номер первого столбца, в котором находится первый ненулевой элемент строки. Матрица a имеет конечное число строк глубины 1. Такие строки обязательно существуют, так как иначе, у матрицы a первый столбец содержал бы тольно нули. Используя первую строку глубины 1 делаем нули ниже в первом столбцу. Это можно осуществить умножением слева на нижную унитреугольную матрицу c_1 (бусинку). В матрице $c_1 \cdot a$ имеется только конечное число строк глубины 2 (такие строки объзательно существуют). Продолжая эту процедуру получим на $n-$том шагу матрицу $c_n \cdot \ldots \cdot c_1 \cdot a$. Объединяя бусинки можем добиться того, что получим новое произведение $d_m \cdot \ldots \cdot d_1 \cdot a$, в котором матрица d_i имеет первые $i-1$ столбцов такие как у единичной матрицы. Это значит, что бесконечное произведение $d \cdot a = \ldots d_m \cdot \ldots \cdot d_1 \cdot a$ существует и является бесконечной матрицей, у которой имеется ровно одна строка глубины 1, ровно одна строка глубины 2, и так далее, а d является конечнострочной. Ясно, что умножая слева матрицу $d \cdot a$ на подходящую матрицу перестановки p получим вехнюю треугольную матрицу $n = p \cdot d \cdot a$. Откуда $d = p^t \cdot n \cdot a^{-1}$, и d конечностолбцовая. Тогда обратная матрица $d^{-1} = d_1^{-1} \cdot d_2^{-1} \cdot \ldots$ нижняя конечностолбцовая и $a = d^{-1} \cdot p^t \cdot n$. Так как все три матрицы в этом произведении являются произведением не более чем двух стрингов, матрица a является произведением не болше чем 6 стрингов.□

Нам неизвестно, порождается ли группа $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ стрингами для произвольного кольца R. Но, группа порожденная стрингами всегда нормальна в $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$.

Предложение 18. Группа $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$.

Доказательство: Пусть $g \in \mathrm{GL}_{rc}(\mathbb{N}, R)$ и $h, \ldots, h' \in \mathrm{GL}_{str}(\mathbb{N}, R)$. Ввиду равенства $g^{-1}h \cdot \ldots \cdot h'g = (g^{-1}hg) \ldots (g^{-1}h'g)$ достаточно показать, что $g^{-1}hg \in \mathrm{GL}_{str}(\mathbb{N}, R)$.

Пусть $h = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots$ является стрингом соответсвующим последовательности $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ с диагональными клетками размеров $n_i - n_{i-1}$ соответственно. Ясно, что мы можем формально объединить некоторые соседние клетки чтобы получить новую большую клетку и новый стринг $h = b'_1 \cdot b'_2 \cdot b'_3 \cdot \ldots$. Легко видеть, что элемент $g^{-1}b_1g$ имеет только одну диагональную клетку размера $m_1 \times m_1$ (мы можем предположить, что $m_1 \geq n_1$). Положим $b'_1 = b_1$. Выбираем первое k такое, что $n_k \geq m_1$. Мы объединяем клетки $b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k = b'_2$. Теперь $g^{-1}b'_2g$ имеет клетку размера $m_2 \times m_2$. Выбираем первое r такое, что $n_r \geq m_2 + n_1$. Объединяем клетки $b_{k+1} \cdot b_{k+2} \cdot \ldots \cdot b_r = b'_3$ и так далее. Повторяя эту процедуру получим $h = b'_1 \cdot b'_2 \cdot b'_3 \cdot \ldots$, новый вид стринга для h. Пусть $s_1 = b'_1 \cdot b'_3 \cdot b'_5 \cdot \ldots$, $s_2 = b'_2 \cdot b'_4 \cdot b'_6 \cdot \ldots$. Стринги s_1, s_2 коммутируют и $h = s_1 \cdot s_2$. Кроме того, из построения следует, что $g^{-1}hg = (g^{-1}s_1g)(g^{-1}s_2g)$ является произведением двух стрингов, доказательство закончено.□

Известно, что для коммутативного кольца R и при $n \geq 3$ группа $\mathrm{E}(n, R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n, R)$ [93]. Из этого факта легко получается следующее

Предложение 19. Для любого коммутативного кольца R группа $\mathrm{E}(R)$ нормальна в $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$.

Доказательство: Сопряжение элементарной трансвекции стрингом является произведением Элементарных трансвекций, так как можно считать, что только один блок стринга "зацепляет"элементарную трансвекцию (объединяя несколько блоков в один блок) и тогда можно использовать конечномерный результат. Таким образом, снова сопрягая произведение элементарных трансвекций стрингом получим произведение элементов сопряженных элементарным трансвекциям. Это кончит доказательство.□

Сейчас мы докажем некоторые результаты об порождении группы квазидиагональных унитреугольных матриц.

Напомним, что бесконечное произведение $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ элементарных трансвекций t_i называем обобщенной трансвекцией, если существует последовательность $\{n_i\}$ $(n_i > 1)$ натуральных чисел такая, что для каждой трансвекции $t_i = t_{k_i,l_i}(\alpha)$ выполняется условие $n_1 + \ldots + n_{i-1} < k_i < l_i \leq n_1 + \ldots + n_i$.

Иными словами, $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{UT}(n_i, R) < \mathrm{UT}(\infty, R)$, и все t_i содержатся в соответствующих блоках $\mathrm{UT}(n_i, R)$ по главной диагонали.

Матрица $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ называется n-квазидиагональной, если $a_{ij} = 0$ для всех i, j таких, что $j - i > n$, и $a_{i,i+n} \neq 0$ для хотя бы одного индекса i. Мы говорим, что a квазидиагональна (или обобщенно якобиева или конечной ширины или ленточная), если a n-квазидиагональна для некоторого n. Все матрицы a из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ такие, что a и a^{-1} квазидиагональны, образуют подгруппу $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$. Эта подгруппа совпадает с наименьшей группой $\mathrm{UT}(\omega_0)$, определенной ростами.

Предложение 20. Подгруппа $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ квазидиагональных матриц в $\mathrm{UT}(\infty, R)$ содержит стабильную унитреугольную группу $\mathrm{UT}(R)$. Если R содержит $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца или имеет положительную характеристику, то $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ содержит свободную подгруппу счетного ранга.

Доказательство. Наименьший элемент $\omega_0 \in \Omega^*$ содержит все функции вида $f_d(n) = n + d$, где d - фиксированное натуральное число. Так как любая матрица из $\mathrm{UT}(R)$ ограничена функцией f_d для некоторого d, то $\mathrm{UT}(R)$ содержится в $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$.

В работе [105] показано, что две бесконечные матрицы

$$c = \mathrm{diag}(t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots) \text{ и } d = \mathrm{diag}(1, t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots),$$

где $t_{12}(1)$ – элементарная трансвекция, порождают свободную подгруппу ранга 2 в группе $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$. Для $p > 2$ они порождают в группе $\mathrm{UT}(\infty, K)$, где K – поле из p элементов, свободное произведение двух циклических подгрупп порядка p, которое тоже содержит нециклическую свободную подгруппу [132]. Достаточно рассмотреть подгруппу, порожденную матрицами $x = c(cd)c^{-1}$, $y = dc(cd)c^{-1}d^{-1}$. Для $p = 2$ примеры матриц порождающих свободную подгруппу можно найти в [27]. Как известно [132], коммутант свободной группы ранга 2 является свободной группой счетного ранга.□

Предложение 21. Группа $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ порождается 1-квазидиагональными обобщенными трансвекциями.

Доказательство. Любая матрица из $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ является стрингом или произведением двух стрингов, которые тоже квазидиагональны по следствию 1. Теперь результат вытекает из свойств унитреугольных матриц.□

Обозначим символом $\mathrm{UT}^k(\infty, R)$ множество всех матриц из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ с $k-1$ нулевыми диагоналями выше главной. Пусть $\mathrm{UT}_b^k(\infty, R) = \mathrm{UT}^k(\infty, R) \cap \mathrm{UT}_b(\infty, R)$. Справедливо следующее

Следствие 2. Имеем равенство $\gamma_n(\mathrm{UT}_b(\infty, R)) = \mathrm{UT}_b^n(\infty, R)$.

Отметим, что в общем случае мы имеем включение $\gamma_n(\mathrm{UT}(\infty, R)) \leq \mathrm{UT}^n(\infty, R)$.

Классическая теорема Гамильтона—Кэли утверждает, что любая конечномерная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Очевидно, что этот результат не имеет бесконечномерного аналога. С другой стороны, для квазидиагональных матриц мы можем доказать

Предложение 22. Если K – конечное поле и стринг a содержится в группе $\mathrm{UT}_b(\infty, K)$, то существует нетривиальный многочлен $f \in K[x]$ такой, что $f(a) = 0$.

Доказательство. Пусть $a = \prod a_i$ является d-квазидиагональным стрингом. Тогда каждый множитель a_i является $c \times c$-матрицей при некотором $c \leq d$. Следовательно a_i является корнем некоторого многочлена $f_i \in K[x]$ степени $\leq c^2$. Пусть f – произведение всех полиномов степени $\leq d$ из $K[x]$ (число таких полиномов конечно). Тогда $f(a_i) = 0$, и значит $f(a) = 0$. □

ГЛАВА II

Классы промежуточных подгрупп

В этой главе понятия сети идеалов и сетевой подгруппы обобщаются на случай бесконечных матриц. Это позваляет применить эту технику к исследованию подгрупп $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$, треугольной группы, групп Маклейна. Описывается тоже структура подгрупп некоторых подгруппы содержащих только стринги.

В § 7 мы даем определение сетей и сетевых подгрупп в случае бесконечных матриц. Приводим основные их свойства. Описываем подгруппы стабильной полной линейной группы содержащие диагональные матрицы. В § 8 исследуем подгруппы группы бесконечных конечностолбцовых матриц содержащих группу клеточно-диагональных матриц. В § 9 дается описание подгрупп треугольной группы содержащих диагональные матрицы. В § 10 описывается подгрупповое строение групп Маклейна. § 11 посвящен группе Вершика-Керова. Здесь приводится описание параболических подгрупп и разложение Врюа. В § 12 описывается подгруппа у которой все элементы стринги. Дается описание нормальных подгруии и подгрупп содержащих диагональные матрицы.

§ 7. Сети и сетевые подгруппы

Пусть R произвольное ассциативное кольцо с единицей. Система

$$\sigma = (\sigma_{ij}), \quad i, j \in \mathbb{N},$$

двусторонних идеалов кольца R, называется сетью идеалов в R, если

$$(\star) \qquad \sigma_{ir}\sigma_{rj} \subset \sigma_{ij}$$

при всех значениях $i, j, r \in \mathbb{N}$. Сеть σ мы называем D-сетью, если $\sigma_{ii} = R$ при всех значениях i.

В случае когда R простое кольцо (т. е. не содержит никаких двусторонних идеалов, кроме единичного и нулевого), то условие $(*)$ означае, что в случае равенства $\sigma_{ij} = (0)$ для любого r по крайней мере один из идеалов σ_{ir} или σ_{rj} нулевой.

Если $\sigma = (\sigma_{ij})$ и $\tau = (\tau_{ij})$ - две сети, то система $\sigma \cap \tau = (\sigma_{ij} \cap \tau_{ij})$также является сетью, называемой пересечением сетей σ и τ. Аналогичный смысл имеет пересечение произвольного семейства сетей.

Для сетей σ и τ мы вводим отношение частичного порядка полагая $\sigma \leq \tau$ если $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ при всех значениях i, j. Легко видеть, что все сети в R относительно введенного частичного порядка образуют полную решетку с наименьшим элементом — нулевой сетью (все идеалы нулевые) и наибольшей сетью — единичной сетью (все идеалы равны R).

Пусть $\mathrm{M}(\sigma)$ обозначает множество всех матриц $a \in \mathrm{M}_c(\infty, R)$, таких что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех значениях i, j. Если σ удовлетворяет $(\star)$, то $\mathrm{M}(\sigma)$ является кольцом, а множество $e + \mathrm{M}(\sigma) = \{e + a : a \in \mathrm{M}(\sigma)\}$ является мультипликативной системой. Ясно, что в случае D-сети σ множество $e + \mathrm{M}(\sigma)$ совпадает с $\mathrm{M}(\sigma)$. Очевидно, что далеко не все подкольца кольца $M_c(\infty, R)$ имеют вид $\mathrm{M}(\sigma)$ для некоторой сети σ. Достаточно расмотреть подкольцо верхнетреугольных матриц с постоянными коэффициентами на диагоналях. Так как $\mathrm{M}(\sigma \cap \tau) = \mathrm{M}(\sigma) \cap \mathrm{M}(\tau)$ и это равенство верно для пересечения любого семейства сетей, то для любого подмножества S кольца $\mathrm{M}_c(\infty, R)$ существует единственная наименьшая сеть σ такая, что $S \subset \mathrm{M}(\sigma)$. С другой стороны, если для сети τ через $EM(\tau)$ обозначим подкольцо порожденное матрицами вида $\alpha_{ij} e_{(ij)}$ где $\alpha_{ij} \in \tau_{ij}$, то очевидно, что существует наибольшая сеть τ такая, что $EM(\tau) \subset S$. Приведенный выше пример верхнетреугольных матриц с постоянными коэффициентами вдоль каждой диагонали показывает, что в частных случаях интервал $EM(\tau) \subset S \subset \mathrm{M}(\sigma)$ может быть очень великим.

Пусть $F(\sigma)$ обозначает пересечение $\mathrm{M}(\sigma) \cap FRM(\infty, R)$. В случае когда при всех i, j имеем равенство $\sigma_{ij} = I$ мы пишем коротко $F(I)$ или $M(I)$, вместо $\mathrm{M}(\sigma)$ или $F(\sigma)$.

Имеем следующее предложение

Предложение 23. Кольца $F(I)$ и $M(I)$ являются двусторонними идеалами кольца $M_c(\infty, R)$.

Легко заметить, что $\mathrm{M}(\sigma)$ является левосторонним идеалом тогда и только тогда, когда для всех i выполняются равенства $\sigma_{1i} = \sigma_{2i} = \sigma_{3i} = \ldots$. $\mathrm{M}(\sigma)$ является правосторонним идеалом тогда и только тогда, когда для всех i выполняются равенства $\sigma_{i1} = \sigma_{i2} = \sigma_{i3} = \ldots$. $\mathrm{M}(\sigma)$ является двусторонним идеалом тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}(\sigma) = M(I)$ для некоторого двустороннего идеала I в R.

Напомним здесь принципиальное отличие строения бесконечных матриц и конечных. Структура идеалов кольца $\mathrm{M}(n, R)$ совсем простая. Подмножество S кольца $\mathrm{M}(n, R)$ является двусторонним идеалом тогда и только тогда, когда для некоторго двустороннего идеала I в R имеем $S = \{a \in \mathrm{M}(n, R) : a_{ij} \in I\}$. Это значит, что отображение $I \mapsto \mathrm{M}(n, I)$ задает изоморфизм решетки идеалов в R с решеткой идеалов в $\mathrm{M}(n, R)$. В часности, $\mathrm{M}(n, R)$ простое кольцо тогда и только тогда, когда R

простое кольцо. В случае кольца $\mathrm{M}_c(\infty, R)$ структура идеалов не так очевидна. Даже в случае простого кольца из предложения получаем два нетривиальные идеалы.

Определение 7. Максимальная подгруппа группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ содержащаяся в $e + \mathrm{M}(\sigma)$ называется сетевой подгруппой соответствующей сети σ и обозначается $\mathrm{G}(\sigma)$. Если σ является D-сетью, то $\mathrm{G}(\sigma)$ называется также D-сетевой подгруппой.

Примерами сетевых подгрупп являются: группа верхних (или нижних) обратимых треугольных матриц, группа клеточно-диагональных обратимых матриц с фиксированными размерами клеток в частности группа диагональных матриц. В частности, единичная подгруппа и полная линейная подгруппа конечно столбцовых матриц — сетевые. Соответствующие им сети — это нулевая сеть (все идеалы нулевые) и единичная сеть (все идеалы совпадают с R).

Определение 8. Пусть σ — произвольная сеть идеалов в R. Подгруппа $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, содержащимися в $\mathrm{G}(\sigma)$ называется элементарной сетевой подгруппой, соответсвующей сети σ, и обозначается через $E(\sigma)$.

Для сети σ через $\mathrm{N}(\sigma)$ мы обозначаем нормализатор подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$.

Матрица a из $\mathrm{GL}_C(\infty, R)$ принадлежит сетевой подгруппе $\mathrm{G}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ и $a'_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех i и j. Условия, касающиеся обратной матрицы иногда можно опустить.

Матрица a принадлежит нормализатору группы $\mathrm{G}(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$, если выполняются условия $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subset \sigma_{ij}$ при всех индексах i, j, r, s.

В случае стабильной группы $\Gamma = \mathrm{GL}(R)$ определяем сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma)$ как пересечение $\mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{GL}(R)$, а символом $N_\Gamma(\sigma)$ обозначаем нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}(R)$.

Предложение 24. Пусть R — полулокальное кольцо, поля вычетов которого отличны от $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$ и $\mathrm{M}(2, \mathbb{F}_2)$. Тогда для любой подгруппы H стабильной линейной группы $\Gamma = \mathrm{GL}(R)$ содержащей все диагоналные матрицы существует единственная D—сеть идеалов σ такая, что $\Gamma(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}_\Gamma(\sigma)$.

Доказательство: При предположениях на кольцо нашего предложения, в серии работ [4], [6] доказано, что для любой подгруппы H_n конечномерной полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$ содержащей все диагоналные матрицы существует единственная конечная D-сеть идеалов σ такая, что $\mathrm{G}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}(\sigma)$. Пусть H — подгруппа $\mathrm{GL}(R)$ содержащая все диагональные матрицы $\mathrm{D}(R)$. Так как $\mathrm{GL}(R)$ является прямым (индуктивным) пределом групп $\mathrm{GL}(n, R)$ (можем считать, что матрицы из группы $\mathrm{GL}(n,R)$ вложены в левом верхнем углу матриц из $\mathrm{GL}(R)$), положим $H(n) = H \cap \mathrm{GL}(n,R)$. Ясно, что $H(n)$ содержит $\mathrm{D}(n,R)$. Для $H(n)$ существует единственная D-сеть $\sigma(n)$ такая, что $\mathrm{G}(\sigma(n)) \leq H(n)\mathrm{N}(\sigma(n))$. Тогда сеть σ является суммой сетей $\sigma(n)$ и $\Gamma(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}_\Gamma(\sigma)$.□

§ 8. Подгруппы содержащие клеточно-диагональные матрицы

Пусть R комутативное кольцо с 1, R^* — группа обратимых элементов кольца R. Пусть ν — отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ такое, что все классы эквивалентности $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ конечны. Наименьший из порядков $|I_1|, \ldots, |I_n|, \ldots$ этих классов будем обозначать через h_ν. Если i и j эквивалентны относительно ν, то пишем $i \sim j$.

С эквивалентностью ν на $\mathbb{N}$ свяжем D-сеть $[\nu]$, определив ее условиями: $[\nu]_{ij}$ — единичный идеал R, если $i \sim j$, и $[\nu]_{ij}$ — нулевой идеал в противном случае. Соответствующую D-сетевую подгруппу $\mathrm{G}([\nu])$ обозначаем также через $\mathrm{D}(\nu)$. Если каждый из классов $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ состоит из последовательных натуральных чисел, то $\mathrm{D}(\nu)$ — это группа клеточно-диагональных обратимых бесконечных матриц, диагональные клетки которых имеют соответственно порядки $|I_1|, \ldots, |I_n|, \ldots$. Для произвольной эквивалентности ν группа $\mathrm{D}(\nu)$ сопряжением при помощи матрицы-подстановки может быть преобразована в обычную группу клеточно-диагональных матриц. Таким образом группу $\mathrm{D}(\nu)$ будем называть группой клеточно-диагональных матриц заданного типа ν.

Элементарную сетевую подгруппу $E([\nu])$, соответствующую D-сети $[\nu]$ называем элементарной клеточно-диагональной группой типа ν и обозначаем также через $E(\nu)$. Это подгруппа порожденная всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\alpha)$, где $i \sim j$ и $\alpha \in R$.

Для произвольной D-сети σ определим на $\mathbb{N}$ эквивалентность ν_σ, считая индексы i и j эквивалентными относительно ν_σ тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = R$. Ясно, что $[\nu_\sigma] \leq \sigma$, так что $D(\nu_\sigma) \leq G(\sigma)$ и $E(\nu_\sigma) \leq E(\sigma)$. Очевидно также, что $D(\nu_\sigma)$ (соответственно $E(\nu_\sigma)$) — это наибольшая клеточно-диагональная группа, содержащаяся в $G(\sigma)$ (наибольшая элементарная клеточно-диагональная группа, содержащаяся в $E(\sigma)$). Для D-сети σ полагаем $h(\sigma) = h(\nu_\sigma)$.

Предложение 25. Пусть R — произвольное кольцо и σ — D-сеть идеалов в R, удовлетворяющая условию $h(\sigma) \geq 2$. Матрица a принадлежит нормализатору $\mathrm{N}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда при всех i, j, r, s таких, что $r \neq s$ справедливы включения

$$a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subset \sigma_{ij}.$$

Доказательство: Достаточно проверить, что все включения $a_{ir}\sigma_{rr}a'_{rj} \subset \sigma_{ij}$ следуют из включений из предложения. Для фиксированного $r \in \mathbb{N}$ найдется $p \neq r$ такой, что $\sigma_{rp} = \sigma pr = R$. Имеем

$$a_{ir}\sigma_{rr}a'_{rj} = a_{ir}Ra'_{rj} = a_{ir}\sigma_{rp} \cdot 1 \cdot \sigma_{pr} = a_{ir}\sigma_{rp}(\sum_q a'_{pq}a_{qp})\sigma_{pr}\sigma_{ij} \subset$$

$$\subset \sum_q (a_{ir}\sigma_{rp}a'_{pq})(a_{qp}\sigma_{pr}a'_{rj})$$

(здесь все суммы конечны). Имеем $a_{ir}\sigma_{rp}a'_{pq} \subset \sigma_{iq}$ и $a_{qp}\sigma_{pr}a'_{rj} \subset \sigma_{qj}$. откуда следует, что

$$\subset \sum_q (a_{ir}\sigma_{rp}a'_{pq})(a_{qp}\sigma_{pr}a'_{rj}) \subset \sigma_{ij},$$

доказательство окончено.□

Пусть H подгруппа группы $G = \mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ содержащая группу $E(\nu)$ элементарных клеточно-диагональных матриц типа ν, где $h(\nu) \geq 2$. С подгруппой H мы свяжем однозначно определенную D-сеть идеалов σ. Для упорядоченной пары различных индексов i и j через σ_{ij} обозначим совокупность тех элементов из $\alpha \in R$, для которых $t_{ij}(\alpha) \in H$. Ясно, что σ_{ij} — аддитивная группа. Если $i \sim j$, то согласно определению $E(\nu)$ все элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in R$, содержатся в $E(\nu)$, а значит, и в H. Следовательно, в этом случае $\sigma_{ij} = R$. Пусть теперь индексы i и j не эквивалентны, и пусть $\beta \in \sigma_{ij}$, $\alpha \in R$. Выберем r с условием $r \sim j$, $r \neq j$. Это возможно в силу условия $h(\nu) \geq 2$. Из формул

$$[t_{ij}(\beta), t_{jr}(\alpha)] = t_{ir}(\beta\alpha)$$

$$[[t_{ij}(\beta), t_{jr}(\alpha)], t_{rj}(1)] = t_{ij}(\beta\alpha)$$

следует, что σ_{ij} правый идеал в R. Аналогично проверяется, что σ_{ij} — левый идеал. Положим дополнительно $\sigma_{ii} = R$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Если $\beta \in \sigma_{ij}$ и $\alpha \in \sigma_{jr}$, то $t_{ij}(\beta) \in H$ и $t_{jr}(\alpha) \in H$. Тогда тоже $t_{ir}(\beta\alpha)$ содержится в H, т. е. $\beta\alpha \in \sigma_{ir}$. Этим довазано включение для попарно различных индексов. Но если среди индексов есть равные, то это включение выполнено очевидным образом. Таким образом σ является D-сетью идеалов. Так как $[\nu] \leq \sigma$, то $h(\nu) \leq h(\sigma)$.

Определение 9. Пусть $h(\nu) \geq 2$ и $E(\nu) \leq H \leq G$. Построенная D-сеть идеалов σ называется D-сетью, ассоциированной с подгруппой H.

Теперь мы докажем существование в подгруппе H содержащей $E(\nu)$ (при условии $h(\nu) \geq 2$) определенных элементарных трансвекций на основе наличия в ней матриц специального вида.

Лемма 6. Если p-я строка в матрице a из H совпадает с p-й строкой единичной матрицы, т. е. $a_{pj} = \delta_{pj}$ при всех j, то $a_{iq} \in \sigma_{iq}$ при всех i и всех $q \sim p$, $q \neq p$.

Если q-й столбец в матрице a из H совпадает с q-м столбцом единичной матрицы, т. е. $a_{iq} = \delta_{iq}$ при всех i, то $a_{pj} \in \sigma_{pj}$ при всех j и всех $p \sim q$, $p \neq q$.

Доказательство: Если $q \sim p$, $q \neq p$ и $i \sim q$, то $a_{iq} \in \sigma_{iq} = R$. Пусть i и q не эквивалентны. Пусть $r \sim i$, $r \neq i$ (это возможно ввиду условия $h(\nu) \geq 2$). Рассмотрим матрицы

$$b = at_{qp}(1)a^{-1}, \quad c = [b, t_{ri}(-1)].$$

Так как $t_{pq}(1) \in H$ и $t_{ri}(-1) \in H$, то $c \in H$. Простые вычисления показывают, что

$$b = e + \sum_s a_{sq}e_{sp},$$

и, далее, что $c = t_{rp}(a_{iq})$. Следовательно $a_{iq} \in \sigma_{rp} = \sigma_{iq}$ по предложению 1.

Для доказательства второй части леммы надо рассмотреть матрицы

$$b = a^{-1}t_{qp}(1)a, \quad c = [t_{jr}(-1), b],$$

(где $r \sim j$, $r \neq j$, j не эквивалентно p). □

Лемма 7. Пусть $h(\nu) \geq 3$. Если q-й столбец в матрице a из H совпадает с q-м столбцом единичной матрицы, т. е. $a_{iq} = \delta_{iq}$ при всех i, то $a_{ip} \in \sigma_{ip}$ при всех i и всех $p \sim q$.

Доказательство: Рассмотрим матрицу

$$u = \prod_r t_{qr}(a'_{qr}) \cdot a,$$

где произведение берется по всем индексам $r \sim q$, $r \neq q$. Ясно, что u содержится в H и отличается от a только в строке с номером q, а обратная к ней матрица u^{-1} отличается от a^{-1} только в столбцах с номерами $r \sim q$, $r \neq q$, при этом $u'_{qr} = 0$ при всех $r \sim q$, $r \neq q$. Фиксируем $p \sim q$, $p \neq q$, и рассмотрим матрицу

$$v = ut_{pq}(1)u^{-1} = e + \sum_{i,j} u_{ip}u'_{qj}e_{ij},$$

также содержащуюся в H. Если $r \sim q$, $r \neq q$, то $v_{ir} = \delta_{ir}$ при всех i (поскольку $u'_{qr} = 0$). Таким образом, в матрице v все столбцы с номерами r ($r \sim q$, $r \neq q$) совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы и по лемме 1 имеем включения v_{pj}

$sigma_{pj}$ при всех j и всех $p \sim r$, $p \neq r$. В силу условия $h(\nu) \geq 3$ для r имеются по крайней мере два различных значения. Следовательно $v_{pj} \in \sigma_{pj}$ при всех $p \sim q$ и всех j. Далее, при $i \neq q$ имеем $v_{ip} = u_{ip} = a_{ip}$. Матрица

$$w = v \prod_{j \neq p} t_{pj}(-v_{pj})$$

(здесь j пробегает все индексы, кроме p, их конечное число, так как все матрицы конечностолбцовые) ввиду $v_{pj} \in \sigma_{pj}$ содержится в H, и для нее

$$w_{pj} = \delta_{pj} \quad (j \in \mathbb{N})$$

$$w_{ir} = v_{ir} \quad (r \sim p, r \neq p).$$

По лемме 1 получаем отсюда включение

$$w_{ir} \in \sigma_{ir} \quad (i \neq p, r \sim p, r \neq p).$$

В качестве r здесь можно взять q, и мы получаем

$$a_{ip} = u_{ip} = v_{iq} = w_{iq} \in \sigma_{iq} = \sigma_{ip},$$

доказательство окончено. □

Теорема 6. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, $G = \mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ — полная линейная группа бесконечных конечно столбцовых матриц над R, ν — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}$, в котором все классы эквивалентности конечные и для которого $h(\nu) \geq 3$. Пусть $E(\nu)$ — элементарная клеточно-диагональная подгруппа типа ν, H — подгруппа в G, содержащая группу $E(\nu)$. Тогда существует и притом единственная D-сеть $\sigma \geq [\nu]$, такая, что

$$\mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}(\sigma).$$

Сеть σ, для которой имеем последние включения является D-сетью ассоцированной с подгруппой H.

Доказательство: Пусть a — произвольная матрица из H. Мы должны проверить все включения $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subset \sigma_{ij}$, $r \neq s$. Пусть α – произвольный элемент из σ_{rs}. Рассмотрим матрицу

$$b = at_{rs}(\alpha)a^{-1}.$$

Так как $b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir}\alpha a'_{sj}$, достаточно показать, что $b_{ij} \in \sigma_{ij}$, значит $b \in \mathrm{G}(\sigma)$.

Зафиксируем три попарно различных индекса p, q, h и рассмотрим матрицу

$$c = bt_{hp}(a_{qr})t_{hp}(-a_{pr})b^{-1}.$$

В силу условия $p \sim q \sim h$ матрица c содержится в H. Простые вычисления показывают при любом i (учитывая коммутативность кольца), что

$$c_{ip} = \delta_{ip} + b_{ih}a_{qr}, \ c_{iq} = \delta_{iq} - b_{ih}a_{pr}, \ c_{ij} = \delta_{ij} \ (j \neq p, j \neq q).$$

В частности, $c_{ih} = \delta_{ih}$ при всех i. Из Леммы 2 следует, что $c_{ip} \in \sigma_{ip}$ и $c_{iq} \in \sigma_{iq}$. Таким образом $b_{ih}a_{pr} \in \sigma_{ih}$ $(p \sim h, \, p \neq h)$. Рассмотрим еще одну матрицу

$$u = bt_{hp}(-b'_{qp})t_{hq}(b'_{pp})b^{-1}.$$

Имеем при всех i

$$u_{ip} = \delta_{ip}, \quad u_{iq} = b_{ih}(1 - a_{pr}\alpha a'_{sp} - a_{qr}\alpha a'_{sq}).$$

Из леммы 2 слелует, что $u_{iq} \in \sigma_{iq} = \sigma_{ih}$, а так как $b_{ih}a_{pr}$ и $b_{ih}a_{qr}$ содержатся в σ_{ih}, то $b_{ih} \in \sigma_{ih}$ при всех i. Индекс здесь также произвольный, поэтому $b \in \mathrm{G}(\sigma)$.

Единственность вытекает из того, что всякая элементарная трансвекция, содержащаяся в $\mathrm{N}(\sigma)$, содержится в $\mathrm{E}(\sigma)$ (уже при $h(\sigma) \geq 2$). В самом деле, пусть $a = t_{ij}(\alpha) \in \mathrm{N}(\sigma)$. Согласно предыдущему предложению имеем включение $a_{ij}Ra'_{jj} \subset \sigma_{ij}$, а так как в данном случае $a_{ij} = \alpha$, $a'_{jj} = 1$, то $\alpha \in \sigma_{ij}$. $\square$

§ 9. Подгруппы группы треугольных матриц

В этом параграфе мы опишем подгруппы группы бесконечных верхних треугольных матриц $\mathrm{T}(\infty, R)$ содержащие (или нормализуемые) стабильной группой диагональных матриц $\mathrm{D}(R)$, при некоторых ограничениях на ассоциативное кольцо R. Результаты настоящего параграфа опубликованы в [100].

Проблема классификаци подгрупп конечномерных классических групп над кольцами содержащих диагональные матрицы привлекла внимание многих математиков. Удовлетворительный ответ получен только для некоторых классов подгрупп. В серии работ З.И. Боревича и Н.А. Вавилова описано подгруппы содержащие диагональные матрицы над полулокальным кольцом с использованием понятия сетей и сетевых подгрупп (см. [4], [5], [6] и обзора [9]). В этом параграфе мы обобщаем эти результаты описывая подгруппы группы бесконечных верхних треугольных матриц, содержащих (или нормализуемых) диагональными матрицами из группы $\mathrm{D}(R)$, при некоторых предположениях на кольцо. Тем самым, это дает тоже обобщение для треугольного случая описания нормальных подгрупп бесконечномерной полной линейной группы [153].

Пусть R ассоциативное кольцо с единицей 1, R^* группа обратимых элементов кольца R. Группа $\mathrm{T}(\infty, R)$ состоит из всех бесконечных верхних треугольных матриц над кольцом R, у которых все диагональльные элементы обратимы, $\mathrm{D}(\infty, R)$ подгруппа всех ее диагональных матриц. Тогда стабильная группа $\mathrm{D}(R)$ состоит из всех диагональных матриц, у которых только конечное число элементов на диагонали не равно 1. Ясно, что группа $\mathrm{D}(R)$ порождается матрицами $d_i(\theta) = e + (\theta - 1)e_{ii}$, $\theta \in R^*$. Как обычно коммутатор лвух элементов группы обозначаем символом $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Мы будем рассматривать сети идеалов, т. е. системы $\sigma = (\sigma_{ij})$ $(i, j \in \mathbb{N})$ двусторонних идеалов σ_{ij} кольца R удовлетворяющие условиям $\sigma_{ir} \cdot \sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех $i, j, r \in \mathbb{N}$. В этом параграфе мы рассматриваем только *верхние сети* σ для которых σ_{ij} тривиально для всех $i > j$. Если кроме того $\sigma_{ii} = R$ для всех $i \in \mathbb{N}$ мы называем σ *верхней $D-$сетью.* Верхняя сеть σ называется *финитной*, если существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $\sigma_{ij} = (0)$ для всех $j > i > n_0$.

Пусть $\mathrm{M}(\sigma)$ множество всех треугольных матриц a таких, что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$. Если σ — верхняя сеть, то $e + \mathrm{M}(\sigma) = \{e + a : a \in \mathrm{M}(\sigma)\}$ замкнуто относительно умножения матриц. Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ обозначает сетевую подгруппу, а $\mathrm{E}(\sigma)$ элементарную сетевую подгруппу группы $\mathrm{G}(\sigma)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\zeta)$, где $\zeta \in \sigma_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$.

Главным результатом параграфа является следующая теорема (смотри [100]):

Теорема 7. Пусть R — ассоциативное кольцо с 1 такое, что существует элемент $\theta \in R^*$ для которого $\theta - 1 \in R^*$ и R аддитивно порождается элементами R^*. Пусть H подгруппа группы $\mathrm{T}(\infty, R)$ содержащая $\mathrm{D}(R)$. Тогда существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца R такая, что

$$\mathrm{D}(R) \cdot \mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{G}(\sigma).$$

Если кроме того подгруппа H содержится в стабильной треугольной группе $T(R)$, то $H = \mathrm{G}(\sigma)$.

Из теоремы получаем

Следствие 3. Если σ в Теореме является финитной сетью и подгруппа H содержит $\mathrm{D}(\infty, R)$, то $H = \mathrm{G}(\sigma) = \mathrm{D}(\infty, R) \cdot \mathrm{E}(\sigma)$.

Обычно, имеем неравенство $\mathrm{D}(\infty, R) \cdot \mathrm{E}(\sigma) \neq \mathrm{G}(\sigma)$ как, например в случае $D-$сети $\tau = \mathrm{diag}\,(\bar{\tau}, \bar{\tau}, \ldots)$, где $\bar{\tau} = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Наше доказательство верно без изменениий и в случае конечномерных матриц и дает новое доказательство следующего результата З.И. Боревича [5] (теорема 7)

Теорема 8. Пусть R ассоциативное кольцо с 1 такое, что существует элемент $\theta \in R^*$ для которого $\theta - 1 \in R^*$ и R аддитивно порождается элементами R^*. Пусть H подгруппа группы верхних $n \times n-$ треугольных матриц $T_n(R)$ над кольцом R содержащих диагональные матрицы $D_n(R)$. Тогда существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ $(1 \le i, j \le n)$ двусторонних идеалов кольца R такая, что $H = G(\sigma)$.

Теорема 8 показывает, что все подгруппы Борелевской подгруппы содержащие максимальный расщепимый торус являются сетевыми подгруппами.

При некоторых дополнительных условиях коммутативности мы можем доказать больше, именно

Теорема 9. Если при предположениях Теоремы элемент θ принадлежит центру R^* и H является подгруппой группы $\mathrm{T}(\infty, R)$ нормализуемой подгруппой $\mathrm{D}(R)$, то существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ идеалов R такая, что $\mathrm{E}(\sigma) \le H \le \mathrm{G}(\sigma)$.

Очевидно, что θ принадлежит центру R^* если например R^* или R коммутативны.

Следующее предложение дает характеризацию группы $\mathrm{G}(\sigma)$

Предложение 26. $\mathrm{G}(\sigma) = \mathrm{T}(\infty, R) \cap (e + \mathrm{M}(\sigma))$.

Доказательство: Мы покажем, что если $a = (a_{ij}) \in \mathrm{G}(\sigma)$, то $a^{-1} = (a'_{ij}) \in \mathrm{G}(\sigma)$. Так как $a^{-1} \cdot a = e$, мы имеем для $i < j$ равенство $a'_{ii} a_{i,i+1} + a'_{i,i+1} a_{i+1,i+1} = 0$. Таким образом $a'_{i,i+1} \in \sigma_{i,i+1}$, так как $a_{i+1,i+1}$ обратимо и по индукции сравенства $a'_{ii} a_{ij} + \ldots + a'_{ij} a_{jj} = 0$, получаем $a'_{ij} \in \sigma_{ij}$.

Лемма 8. Если $\zeta \in R^*$, то для всех $i, j \in \mathbb{N}$ мы имеем
$d_i(\zeta^{-1}) t_{ij}(\alpha) d_i(\zeta) = t_{ij}(\alpha\zeta)$ и $d_j(\zeta) t_{ij}(\alpha) d_j(\zeta^{-1}) = t_{ij}(\zeta\alpha)$.

Предложение 27. Пусть R ассоциативное кольцо с 1 такое, что существует элемент $\theta \in R^*$, для которого $\theta - 1 \in R^*$. Если $\mathrm{D}(R) \le H \le \mathrm{T}(\infty, R)$ и $a \in H$, то $t_{ij}(a_{ij}) \in H$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$.

Доказательство: Если $a \in H$, то $b = [a, d_j(\theta)] \in H$. Для $i < j$ мы имеем $b_{ij} = a_{ij}(\theta - 1) a'_{jj} \theta^{-1}$ и $b_{jj} = a_{jj} \theta a'_{jj} \theta^{-1}$. Все остальные коэффициенты матрицы b такие как у единичной матрицы e. Умножая матрицу b слева на диагональную матрицу $d_j(\epsilon)$, при соответсвуюшем ϵ, мы получаем матрицу c такую, что $c_{jj} = 1$. Теперь $[d_i(\theta), c] = t_{ij}((\theta - 1) c_{ij}) \in H$ и по лемме 8, получаем $t_{ij}(a_{ij}) \in H$.$\square$

Доказательство теоремы : Пусть $\mathrm{D}(R) \le H \le \mathrm{T}(\infty, R)$. Положим (для $i < j$) $\sigma_{ij} = \{\alpha \in R : t_{ij}(\alpha) \in H\}$ и $\sigma_{ii} = R$ для $i \in \mathbb{N}$. Из предложения 27 и Леммы 8 σ_{ij} являются двусторонними идеалами кольца R. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$ является $D-$сетью, так как $[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$. Ясно, что $\mathrm{D}(R) \cdot \mathrm{E}(\sigma) \leq H$ и из Предложения 27 получаем $H \leq \mathrm{G}(\sigma)$.□

Следствие 3 и Теорема 8 следует легко из того, что в случае финитной сети имеем равенство $\mathrm{D}(\infty, R) \cdot \mathrm{E}(\sigma) = \mathrm{G}(\sigma)$.

Если θ принадлежит центру R^*, то в доказательстве предложения 27 получаем $b_{jj} = 1$ и уже не надо умножать матрицу b на диагональную матрицу, и это заканчивает доказательство теоремы 9.

Сделаем сейчас несколько замечаний.

А. Наша Теорема говорит, что любая подгруппа группы $\mathrm{T}(\infty, R)$ содержащая $\mathrm{D}(R)$ находится в однозначно определенном интервале $\mathrm{D}(R)\mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{G}(\sigma)$. В случае когда $R = K$- является полем такие интервалы имеют очень простое строение. Ясно, что каждое поле аддитивно порождается обратимыми элементами. Существование обратимого элемента θ такого, что $\theta - 1$ тоже обратим очевидно для полей характеристики 0 и $p > 2$. В случае $p = 2$ такой элемент существует, если K имеет размерность ≥ 2 над $\mathbb{F}_2$ (как линейное пространство). Это значит, что предположения Теоремы выполнены для всех полей $K \neq \mathbb{F}_2$.

Рассмотрим 3 случая.

(i) для всех $i \in \mathbb{N}$: $\sigma_{i,i+1} = K$,

(ii) для всех множество $\{i : \sigma_{i,i+1} = (0)\}$ бесконечно,

(iii) множество $\{i : \sigma_{i,i+1} = (0)\}$ конечно.

(i) Из включений $\sigma_{i,i+1}, \sigma_{i+1,i+2} \subseteq \sigma_{i,i+2}$ получаем $\sigma_{i,i+2} = K$. Это значит, что $\sigma_{ij} = K$ для всех $j \geq i$. Мы имеем $\mathrm{D}(K)\mathrm{E}(\sigma) = \mathrm{T}(K)$ — группа всех финитных треугольных матриц, и $\mathrm{G}(\sigma) = \mathrm{T}(\infty, K)$.

Так как $\mathrm{T}(K)$ нормальная подгруппа группы $\mathrm{T}_r(\infty, K)$ (группы конечнострочных треугольных матриц), решетка подгрупп H таких, что $\mathrm{T}(K) \leq H \leq \mathrm{T}_r(\infty, K)$ изоморфна решетке подгрупп факторгруппы $\mathrm{T}_r(\infty, K)/\mathrm{T}(K)$.

(ii) Если $\sigma_{i,i+1} = (0)$ то $\sigma_{ij} = (0)$ и $\sigma_{k,i+1} = (0)$ для всех $k < i$, $j > i$. Для некоторых бесконечных последовательностей натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots)$ группа $\mathrm{D}(K)\mathrm{E}(\sigma)$ изоморфна бесконечному прямому произведению конечномерных треугольных групп $\mathrm{T}(n_1, K)$, $\mathrm{T}(n_2, K)$, ... которое нормально в группе $\mathrm{G}(\sigma)$ — бесконечному декартовому произведению групп $\mathrm{T}(n_1, K)$, $\mathrm{T}(n_2, K)$, ... Это дает несчетное число интервалов в решетке подгрупп. Здесь $\mathrm{T}(1, K) \simeq K^*$.

(iii) В этом случае все подгруппы соответствующие D−сети σ имеют вид $\mathrm{T}(n_1, K) \times \ldots \times \mathrm{T}(n_s, K) \times H_1$ где $\mathrm{T}(K) \leq H_1 \leq \mathrm{T}(\infty, K)$ (для фиксированной H_1 мы получаем счетное число подгрупп).

Наши результаты показывают, что все подгруппы $\mathrm{T}(\infty, K)$ содержащие $\mathrm{D}(K)$ лежат вблизи подгрупп связанных с D−сетьями. Ясно, что более детальное исследование в этом случае требует других методов и идей. Использование сетевых подгрупп редуцирует проблему нахождения таких подгрупп к исследованию решетки подгрупп группы $\mathrm{T}(\infty, K)$ содержащих $\mathrm{T}(K)$.

B. Пусть π подстановка множества натуральных чисел ($\pi \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$). Обозначим через π тоже бесконечную матрицу соответсвтвующую подстановке π. Мы говорим, что две сети τ и σ сопряжены, если $\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$ для некоторой подстановки $\pi \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Пусть $\mathrm{T}^{\pi}(\infty, R) = \pi\,\mathrm{T}(\infty, R)\pi^{-1}$. Мы имеем $\mathrm{D}(R) = \pi\,\mathrm{D}(R)\pi^{-1}$, $\mathrm{E}(\tau) = \pi\mathrm{E}(\sigma)\pi^{-1}$ и $\mathrm{G}(\tau) = \pi\mathrm{G}(\sigma)\pi^{-1}$. Ясно теперь, что наши результаты дают тоже описание подгрупп группы $\mathrm{T}^{\pi}(\infty, R)$ содержащих $\mathrm{D}(R)$ (или нормализуемых группой $\mathrm{D}(R)$) с использованием сети τ вместо сети σ.

C. Доказательства Теорем и 9 верны тоже в боллее общем случае группы $T(\Omega, R)$, всех верхних конечностолбцовых треугольных матриц размерности Ω (где Ω произвольное бесконечное линейно упорядоченное множество).

§ 10. Подгруппы группы Маклейна

В этом параграфе мы исследуем структуру нормальных подгрупп группы Маклейна с использованием сетей идеалов и сетевых подгрупп. Мы определим большую подрешетку Λ решетки нормальных подгрупп группы Маклейна при некоторых ограничениях на ассоциативное кольцо R. Эта подрешетка состоит из сетевых подгрупп соответсвующих нормальным сетям. В случае когда R− поле, $|R| > 2$, при небольших ограничениях на множество идексов, Λ изоморфна решетке монотонных функций и не зависит от основного поля. Результаты настоящего параграфа опубликованы в [104].

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей $1 \neq 0$, и пусть I — бесконечное линейно упорялоченное множество индексов. Матрицей размера $I \times I$ над R называем функцию $a : I \times I \to R$.

Пусть $\mathrm{T}_f(I, R)$ — группа всех обратимых верхних треугольных матриц, только в конечном числе коэффициентов отличающихся от единичной матрицы. Обозначим через $\mathrm{D}_f(I, R)$ и $\mathrm{UT}_f(I, R)$ соответственно ее диагональную и унитреугольную подгруппу. Группа $\mathrm{UT}_f(I, R)$ является нормальной подгруппой группы $T_f(I, R)$ так как является ядром гомоморфизма, который посылает треугольную матрицу в диагональную с такой же самой главной диагональю. Группа $\mathrm{T}_f(I,R)$ порождается диагональными и унитреугольными матрицами и таким образов имеем равенство $\mathrm{T}_f(I,R) = \mathrm{D}_f(I,R) \leftthreetimes \mathrm{UT}_f(I,R)$.

Группа $\mathrm{UT}_f(I,R)$ называется (обобщенной) группой Маклейна. Она обладает интересными свойствами. Группа $\mathrm{UT}_f(\mathbb{Q},\mathbb{F}_p)$ является бесконечной, локально конечной, perfect, p–группой, которая характеристически проста — в противосостоянии к конечным p–группам [136]. Ее автоморфизмы описаны в [152]. Группа $\mathrm{UT}_f(\mathbb{N},\mathbb{F}_p)$ является самым простым примером бесконечной p–группы котрая не удовлетворяет нормализаторному условию [24]. Группы Маклейна служат как примеры в общей теории групп показывающие ограничения для многих результатов: смотри [145], [149],[150], [95] для контрпримеров к проблемам касающимся групп с условиями на цепи подгрупп, [169], [170] для примеров больших семейств характеристически простых групп, [48]—[50] для явных построений некоторых ациклических групп с заданными свойсвами и некоторых расширений групп, [78]—[80] для распознавания групп Маклейна по группам автоморфизмов и применнениях к исследованию групп Хана.

В этом параграфе мы исследуем структуру нормальных подгрупп группы Маклейна с использованием сетей идеалов и сетевых подгрупп.

Для этого нам надо модифицировать понятие сети. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$ $(i,j \in I)$ двусторонних идеалов σ_{ij} кольца R называется *сетью* если

$$\sigma_{ir} \cdot \sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij} \text{ для всех } i,j,r \in I.$$

Если множество I конечно получаем конечную сеть.

Ясно, что если σ, τ сети, то система $\sigma \cap \tau = (\sigma_{ij} \cap \tau_{ij})$ тоже является сетью. Отношение '$\sigma \leq \tau$ если $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$' определяет частичный порядок на множестве всех сетей. В этом параграфе рассматриваем только *верхние сети* σ для которых σ_{ij} тривиален для всех $i \geq j$. Говорим, что сеть σ нетривиальна если $\sigma_{ij} \neq 0$ для хотя бы одной пары индексов (i,j).

Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ множество всех матриц $a \in \mathrm{UT}_f(I,R)$ таких, что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех $i < j$. Так как σ сеть, $\mathrm{G}(\sigma)$ замкнуто относительно умножения матриц.

На самом деле имеем следующее

Предложение 28. Если σ сеть, то $\mathrm{G}(\sigma)$ является подгруппой группы $\mathrm{UT}_f(I,R)$.

Доказательство: Достаточно доказать, что из $a \in \mathrm{G}(\sigma)$ следует $a^{-1} = (a'_{ij}) \in \mathrm{G}(\sigma)$. Мы определяем носитель матрицы $a \in \mathrm{UT}_f(I,R)$ следующим образом

$$\sup(a) = \{i \in I : a_{ij} \neq 0 \text{ или } a_{ji} \neq 0 \text{ для некоторого } j \neq i\}.$$

Применяя гомоморфизм $\mathrm{UT}_f(I,R) \to \mathrm{UT}(m,R)$, который забывает все коэффициенты вне множества $\sup(a) \times \sup(a)$ мы можем ограничить наши рассуждения до конечномерной унитреугольной группы и конечной сети. Так как $a^{-1} \cdot a = e$, мы имеем $a'_{12} + a_{12} = 0$, это значит, что $a'_{12} \in \sigma_{12}$. Теперь ввиду равенства $a'_{1,j+1} = -a'_{12}a_{2j} - \ldots - a'_{1,j-1}a_{j-1,j} - a_{1j}$ по индукции получаем $a'_{1,j+1} \in \sigma_{1,j+1}$. Аналогично получаем $a'_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех $i < j$, что кончит доказательство. □

Отображение $\sigma \mapsto \mathrm{G}(\sigma)$ биективно и $\sigma \cap \tau \mapsto \mathrm{G}(\sigma \cap \tau) = \mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{G}(\tau)$. Таким образом получаем следующее

Предложение 29. Решетка сетей идеалов кольца R индексированная множеством I изоморфна решетке сетевых подгрупп группы $\mathrm{UT}_f(I, R)$.

Не все подгруппы группы $\mathrm{UT}_f(I, R)$ являются сетевыми как показывает следующий пример.

Фиксируем $i < k < l$ с множества I. Пусть σ сеть с единственными нетривиальными коэффициентами $\sigma_{ik} = \sigma_{il} = \sigma_{kl} = R$. Обозначим через G подгруппу группы $\mathrm{G}(\sigma)$ состоящую из всех матриц для которых $a_{ik} = a_{kl}$. Ясно, что G не является сетевой подгруппой.

Интересен вопрос для каких сетей σ сетевая подгруппа $\mathrm{G}(\sigma)$ абелева. Мы охарактеризуем ниже максимальные абелевы сетевые подгруппы.

Пусть $i_0 \in I$, определим сети: σ такая, что $\sigma_{kl} = R$ если $k \leq i_0$ и $l > i_0$ и $\sigma_{kl} = 0$ в остальных случаях, и τ сеть такая, что $\tau_{kl} = R$ если $k < i_0$ и $l \geq i_0$ и $\tau_{kl} = 0$ в остальных случаях. Легко проверить, что $\mathrm{G}(\sigma)$ и $\mathrm{G}(\tau)$ являются максимальными абелевыми подгруппами [136], [78]. С другой стороны, в случае $I = \mathbb{Q}$, мы имеем сеть σ такую, что $\sigma_{kl} = R$ если $k < \sqrt{2}$ и $l > \sqrt{2}$ (и 0 в остальных случаях). Для этой сети группа $\mathrm{G}(\sigma)$ тоже максимальна абелева.

Эти примеры показывают, что детальное исследование сетевых подгрупп группы Маклейна зависит от предположений наложенных на упорядоченное множество.

Теперь дадим описание нормальных подгрупп группы Маклейна.

Сеть σ называется *нормальной сетью* если для всех $i < r < j$, $i, j, r \in I$, мы имеем $\sigma_{ir} \subseteq \sigma_{ij}$ и $\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$.

Главным результатом параграфа является

Теорема 10. Пусть R ассоциативное кольцо с единицей 1, которое аддитивно порождается обратимыми элементами и такое, что 1 является суммой двух обратимых элементов. Пусть H подгруппа группы $\mathrm{UT}_f(I, R)$. Группа H является нормальной подгруппой группы $\mathrm{T}_f(I, R)$ тогда и только тогда, когда $H = \mathrm{G}(\sigma)$ для некоторой нормальной сети σ.

Доказательство: Если σ нормальная сеть, то простые вычисления показывают, что для любого $g \in \mathrm{G}(\sigma)$ и $v \in \mathrm{T}_f(I,R)$ мы имеем $v \cdot g \cdot v^{-1} \in \mathrm{G}(\sigma)$.

Пусть теперь $H \lhd \mathrm{T}_f(I,R)$ и $H \subset \mathrm{UT}_f(I,R)$. Мы положим $\sigma_{ij} = \{\alpha \in R : t_{ij}(\alpha) \in H\}$ для $i < j$ и $\sigma_{ij} = 0$ в остальных случаях. Ввиду формул сопряженности для трансвекций $d_i(\theta^{-1}) \cdot t_{ij}(\alpha) \cdot d_i(\theta) = t_{ij}(\alpha\theta), \quad d_i(\theta) \cdot t_{ij}(\alpha) \cdot d_i(\theta^{-1}) = t_{ij}(\alpha\theta)$, и предположений на кольцо R множества σ_{ij} являются двусторонними идеалами кольца R. С равенств $[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(1)] = t_{ij}(\alpha), \quad [t_{ir}(1), t_{rj}(\alpha)] = t_{ij}(\alpha)$ верных для попарно различных i, j, r, следует, что сеть σ нормальна. Ясно, что $\mathrm{G}(\sigma) \subseteq H$. Докажем теперь, что если $a \in H$, то $t_{ij}(a_{ij}) \in H$ для всех $i < j$. Мы имеем $b = [a^{-1}, d_i(\theta)] \in H$ и $b_{ij} = a'_{ii}(\theta - 1)a_{ij}$. Если положим $c = [b_{-1}, d_j(\theta^{-1})]$, то мы имеем $[d_i(\theta), c] = t_{ij}((\theta - 1)c_{ij}) \in H$. Так как $c_{ij} = b'_{ii} b_{ij}(\theta - 1)$, из формул сопряженности следует, что $t_{ij}(a_{ij}) \in H$. Это значит, что $H \subseteq \mathrm{G}(\sigma)$ и теорема доказана.□

В частном случае $I = \mathbb{N}$ наш результат можно вывести из результата работы [5] для конечномерных унитреугольных групп и рассуждений параграфа §6 так как группа $\mathrm{UT}_f(\mathbb{N}, R)$ является прямым пределом конечномерных групп при естественных вложениях.

Так как сойство сетей идеалов 'быть нормальной' инвариантно относительно решеточных операций мы получаем

Предложение 30. При предположениях теоремы 10 множество сетевых подгрупп $\mathrm{G}(\sigma)$ соответствующих нормальным сетям является подрешеткой Λ решетки нормальных подгрупп группы Маклейна.

Отметим, что если R имеет бесконечную решетку двусторонних идеалов, то Λ несчетная. Интересно найти все нормальные подгруппы группы $\mathrm{UT}_f(I,R)$, которые не являются нормальными в $\mathrm{T}_f(I,R)$.

Теперь мы опишем большое семейство сетевых подгрупп $\mathrm{G}(\sigma)$, которые не являются нормальными в группе Маклейна.

Пусть "$\sim$"отношение эквивалентности на множестве I. Мы определим сеть $\widetilde{\sigma}$ положив $\widetilde{\sigma}_{ij} = R$ если $i \sim j$ и $\widetilde{\sigma}_{ij} = 0$ в остальных случаях. Сетевая группа $\mathrm{G}(\widetilde{\sigma})$ называется экви-группой (смотри [24]). Мы говорим, что классы эквивалентности C, D определяют минимаксную пару если $C \neq D$, C имеет минимальный элемент, D имеет максимальный элемент и $\min C < \max D$. Например, если $I = \mathbb{N}$, то $\sim$ не имеет минимаксной пары тогда и только тогда, когда $\sim$ не имеет конечных классов эквивалентности или имеет только один конечный класс вида $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если $\widetilde{\sigma}$ не имеет минимаксных пар классов, то $\mathrm{G}(\widetilde{\sigma})$ совпадает со своим нормализатором в $\mathrm{UT}_f(I,R)$ (теорема 3 из [24]). Это значит, что группа Маклейна не удовлетворяет нормализаторному условию для подгрупп. Отметим, что если $\widetilde{\sigma}$ имеет минимаксные пары классов эквивалентности, то для всех нетривиальных сетей $\tau \subset \widetilde{\sigma}$ сетевая подгруппа $\mathrm{G}(\tau)$ не совпадает со своим централизатором в $\mathrm{UT}_f(I,R)$ (и тем самым не совпадает и со своим нормализатором) (это легко следует из теоремы 2 из [24]).

Теперь опишем нормальные подгруппы с использованием монотонных функций.

Пусть $R = K$ поле (или простое кольцо) такое, что $|K| > 2$. Как обычно, для двух линейно упорядоченных множеств A, B мы расширяем порядок на дизъюнктную сумму $A \sqcup B$ предполагая, что $a < b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Мы дополнительно предположим, что для линейно упорядоченного множества $I \sqcup \{\infty\}$ выполнено следующее условие

($\star\star$) для всех $i \in I$ любое подмножество интервала $[i, \infty]$ имеет минимальный элемент.

Как пример множества I удовлетворяющего этому условию могут служить множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}, \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{N}$ с естественным порядком.

Обозначим через $MF(I)$ множество всех функций $f : I \to I \cup \{\infty\}$ которые монотонные, т. е. для которых из $x < y$ следует, что $f(x) \leq f(y)$. Для $\mathrm{G}(\sigma)$ ($\sigma-$ нормальная сеть) мы определим f_σ следующим образом: $f_\sigma(i) =$ минимальное j такое, что $\sigma_{ij} \neq 0$ и ∞ в остальных случаях. Функция f_σ хорошо определена так как нормальные сети имеют свойство: если $\sigma_{ij} = K$, то для всех $r > i, s > j$ имеем равенство $\sigma_{rs} = K$.

Следующая лемма очевидна

Лемма 9. Если σ нормальная сеть, то $f_\sigma \in MF(I)$.

Множество $MF(I)$ является решеткой относительно операций

$$(f_\sigma \wedge f_\tau)(i) = \max\{f_\sigma(i), f_\tau(i)\},$$
$$(f_\sigma \vee f_\tau)(i) = \min\{f_\sigma(i), f_\tau(i)\}.$$

Функции $f_{max}(i) = i+1$ и $f_{min}(i) = \infty$ для всех i соответствуют группам $\mathrm{UT}_f(I,R)$ и $\{e\}$. Ясно, что $f_{min} \leq f_\sigma \leq f_{max}$ для всех f_σ из $MF(I)$. Мы имеем тоже $G(\sigma) \cap G(\tau) \mapsto f_\sigma \wedge f_\tau$ и $G(\sigma \cdot \tau) \mapsto f_\sigma \vee f_\tau$.

Таким образом, мы получили обобщение известного результата Уир, который утверждает, что нормальные подгруппы силовской подгруппы группы $\mathrm{GL}_n(K)$ являются подгруппами соответствующими некоторым монотонным функциям окамляющим иенулевые ээлементы матриц из этих подгрупп ([168] теорема 4, [28]).

Теорема 11. Если K поле, $|K| > 2$, и I удовлетворяет условию ($\star\star$), то соответсвие $\mathrm{G}(\sigma) \mapsto f_\sigma$ определяет решеточный изоморфизм между решеткой $\Lambda = \{\mathrm{G}(\sigma) \in \mathrm{UT}_f(I, K) : \sigma -$ нормальная сеть $\}$ и решеткой $MF(I)$.

Отметим, что результаты и методы этого параграфа можно использовать до описания подгрупп группы $\mathrm{T}_f(I, R)$ содержащих $\mathrm{D}_f(I, R)$. Под $D-$сетью $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца R мы понимаем сеть σ такую, что $\sigma_{kk} = R$ и $\sigma_{ij} = 0$ для всех i, j, k $(i > j)$. Обозначим символом $G(\sigma)$ множество всех матриц $a \in \mathrm{T}_f(I, R)$ таких, что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех $i \leq j$. Аналогичные рассуждения как в доказательстве предложения 28 показывают, что $\mathrm{G}(\sigma)(\sigma)$ является подгруппой группы $\mathrm{T}_f(I, R)$. Малые изменения в доказательстве теоремы 10 дают следующую

Теорема 12. Пусть R ассоциативное кольцо с 1, которое аддитивно порождается обратимыми элементами и такое, что 1 является суммой двух обратимых элементов. Пусть H подгруппа группы $\mathrm{T}_f(I, R)$ содержащая $\mathrm{D}_f(I, R)$. Тогда существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца R такая, что $H = \mathrm{G}(\sigma)$.

§ 11. Группа Вершика-Керова

В настоящем параграфе мы показываем, что все параболические подгруппы группы Вершика-Керова $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$ (т. е. подгруппы содержащие $T(\infty, R)$ — группу бесконечиых верхнетреугольных матриц) являются сетевыми подгруппами для широкого класса полулокальных колец R. Результаты работы опубикованы в работе автора [101].

Классический результат для конечномерной полной линейной группы над полем говорит, что все параболические подгруппы, т. е. подгруппы содержащие подгруппу всех верхнетреугольных матриц, являются ступенчатыим группами 'staircase groups' (смотри [40] стр.53, или [54] для более общих результатов в контексте групп с $BN-$парой).

В работе [5] З. И. Боревич ввел понятия сети идеалов σ и сетевой подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$ и получил следующее обобщение этого результата (теорема 1 из [5]).

Теорема 13. Пусть R полулокальное кольцо, в котором 1 является суммой двух обратимых элементов. Если H параболическая подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, R)$, то существует единственная $T-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца R, такая, что $H = \mathrm{G}(\sigma)$.

В этом параграфе мы обобщаем этот результат на одну бесконечномерную группу. Группа $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ определяется как подгруппа группы $\mathrm{GL_c}(\infty, R)$ состоящая из всех матриц имеющих конечное число ненулевых элементов ниже диагонали (ясно, что $T(\infty, R) < \mathrm{GL_{VK}}(R) < \mathrm{GL_c}(\infty, R)$). Она рассматривалась Вершиком и Керовым в случае конечного поля K в работе [10]. Она имеет применения в теории представлений. $\mathrm{GL_{VK}}(K)$ является бесконечномерной, локально компактной, вполне несвязной, аменабелной в топологическом смысле и унимодулярной группой. Стабильная полная линейная группа $\mathrm{GL}(K)$ является ее плотной подгруппой, фактор-группа $\mathrm{GL_{VK}}(K)$ по центру является топологически простой группой.

Пусть $G(m, \infty)$ обозначает подгруппу группы $\mathrm{GL}(\infty, R)$ состоящую из всех матриц a таких, что $a_{ij} = 0$ для $i > max\{j, m\}$. Ясно, что $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ является прямым пределом групп $G(m, \infty)$ при естественных вложениях.

Мы дадим сейчас чисто алгебраическое описание параболических подгрупп группы $\mathrm{GL_{VK}}(R)$. Главным результатом является

Теорема 14. Пусть R полулокальное кольцо, в котором 1 является суммой двух обратимых элементов. Если H параболическая подгруппа группы $\mathrm{GL_{VK}}(R)$, то существует единственная T–сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов в R, такая, что $H = \mathrm{G}(\sigma)$.

Используя эту теорему мы можем доказать стандартные свойства (смотри [54] §2) параболических подгрупп в $\mathrm{GL_{VK}}(R)$

Теорема 15. Если R полулокальное кольцо, в котором 1 является суммой двух обратимых элементов, то:

(i) Если P_1, P_2 две параболические подгруппы в $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ и $gP_1g^{-1} \subset P_2$ для некоторого $g \in \mathrm{GL_{VK}}(R)$, то $g \in P_2$ и $P_1 \subset P_2$.

(ii) Любые две разные параболические подгруппы группы $\mathrm{GL_{VK}}(R)$ не сопряжены.

(iii) Любая параболическая подгруппа самонормализуема.

Пусть $\mathrm{Sym_{fin}}(\mathbb{N})$ обозначает регулярное матричное представление группы перестановок натуральных чисел с конечным носителем. Мы имеем

Теорема 16. (Разложение Брюа) Для любого поля K

$$\mathrm{GL_{VK}}(K) = \mathrm{T}(\infty, K) \cdot \mathrm{Sym_{fin}}(\mathbb{N}) \cdot \mathrm{T}(\infty, K).$$

Если $K = \mathbb{C}$ (комплексные числа), то теорема 16 следует из [10]. В [10] была введена алгебра Гекке двойных смежных классов группы $\mathrm{GL_{VK}}(\mathbb{C})$ над борелевской подгруппой $B = \mathrm{T}(\infty, \mathbb{C})$, и так как эта алгебра изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}(\mathrm{Sym_{fin}}(\mathbb{N}))$, получаем разложение Брюа в этом случае.

Напомним, что $t_{ij}(\zeta) = e + \zeta e_{ij}$, $\zeta \in R$, $i, j \in \mathbb{N}$, $d_i(\theta) = e + (\theta - 1)e_{ii}$, θ–обратим, и $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$ $(i, j \in \mathbb{N})$ двусторонних идеалов σ_{ij} кольца R называется *сетью* если $\sigma_{ir} \cdot \sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех $i, j, r \in \mathbb{N}$. Мы называем σ T*–сетью* если $\sigma_{ij} = R$ для $i \leq j$. Если множество идексов $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ мы имеем конечную сеть идеалов в $\mathrm{GL}(n, R)$.

Пусть множество $\mathrm{M}(\sigma)$ состоит из всех конечно столбцовых матриц a таких, что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$. Если σ является сетью, то $e + \mathrm{M}(\sigma) = \{e + a : a \in \mathrm{M}(\sigma)\}$ замкнуто относительно умножения матриц и через $\mathrm{G}(\sigma)$ обозначим ее максимальную подгруппу (сетевую подгруппу).

Доказательство теоремы 14: Для подгруппы H, содержащей $T(\infty, R)$, мы определяем T–сети σ и $\sigma(m)$ следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \{\zeta \in R : t_{ij}(\zeta) \in H\} \text{ для } i > j \text{ или } R \text{ для } i \leq j,$$

$$\sigma(m)_{ij} = 0 \text{ если } i > \max\{m, j\} \text{ или } \sigma_{ij} \text{ в противном случае.}$$

Положим $H(m) = H \cap G(m, \infty)$. Ясно, что H является прямым пределом групп $H(m)$, а $\mathrm{G}(\sigma)$ является прямым пределом групп $\mathrm{G}(\sigma(m))$. Покажем теперь, что $H(m)$ $= \mathrm{G}(\sigma(m))$. Если $g \in H(m)$, то $g = \left(\begin{array}{c|c} g_1 & g_3 \\ \hline 0 & g_2 \end{array}\right)$ где $g_1 \in \mathrm{GL}_m(R)$, $g_2 \in T(\infty, R)$. Так как $H(m) \geq T(\infty, R)$, умножая $g \in H(m)$ на матрицы $\left(\begin{array}{c|c} e_m & 0 \\ \hline 0 & g_2^{-1} \end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{c|c} e_m & -g_3 \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$, мы видим, что $g' = \left(\begin{array}{c|c} g_1 & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right) \in H$. Обозначим через $\widehat{H}(m)$ подгруппу группы $\mathrm{GL}_m(R)$ порожденную всеми такими g_1. Из теоремы 1 следует, что существует единственная конечная T–сеть $\widehat{\sigma}(m)$ двусторонних идеалов кольца R такая, что $\widehat{H}(m) =$ $G(\widehat{\sigma}(m))$. Из построения сетей $\widehat{\sigma}(m)$ и $\sigma(m)$ легло следует равенство $H(m) = \mathrm{G}(\sigma(m))$ из которого получаем $H = \mathrm{G}(\sigma)$.$\square$

Доказательство теоремы 15: Докажем сначала (i). Тогда (ii) и (iii) получаются из (i) стандартным образом. Если $g \cdot \mathrm{G}(\sigma) \cdot g^{-1} \subset \mathrm{G}(\sigma')$, тогда для некоторого m мы имеем $g \in G(m, \infty)$. Тогда

$$\left(\begin{array}{c|c} g_1 & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right) \cdot \mathrm{G}(\sigma) \cdot \left(\begin{array}{c|c} g_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right) \subset \mathrm{G}(\sigma')$$

или эквивалентно $g_1 \cdot \mathrm{G}(\widehat{\sigma}(m)) \cdot g_1^{-1} \subset \mathrm{G}(\widehat{\sigma}'(m))$ в группе $\mathrm{GL}_m(R)$. Мы покажем, что $g_1 \in \mathrm{G}(\widehat{\sigma}'(m))$ откуда следует, что $g \in \mathrm{G}(\sigma'(m))$. Из разложения $g_1 = uvdw$ где u, w верхние унитреугольные, d - диагональная и v нижияя унитреугольная ([5], Thm. 1) следует, что достаточно показать, что $v \in \mathrm{G}(\sigma'(m))$. Мы имеем $v = v_2 \cdot \ldots \cdot v_m$, где $v_i = \prod_{j=1}^{i-1} t_{ij}(v_{ij})$. Применяем принцип индукции. Предположим, что для некоторого r, $2 \leq r \leq m$, мы доказали, что $v_k \in \mathrm{G}(\sigma'(m))$, $2 \leq k < r$. Это значит, что $b \cdot \mathrm{G}(\sigma(m)) \cdot b^{-1} \subset \mathrm{G}(\sigma'(m))$, где $b = v_r \cdot \ldots \cdot v_m$. Мы имеем $c = [d_s(\theta)^{-1}, b] \in \mathrm{G}(\sigma')$ и тогда $c_{rs} = v_{rs}(\theta - 1) \in \sigma'_{rs}$. Из этого вытекает, что $v_{rs} \in \sigma'_{rs}$ и $v_r \in \mathrm{G}(\sigma')$.□

Доказательство теоремы 16: Из [40] стр.45, для любого поля K мы имеем $\mathrm{GL}(m, K) = T(m, (K) \cdot S_m \cdot T(m, K)$, где S_m регулярное матричное представление симметричной группы иа m элементах. Это значит, что $G(m, \infty) = T(\infty, K) \cdot S_m \cdot T(\infty, K)$ и так как $\mathrm{Sym_{fin}}(\mathbb{N})$ является прямым пределом групп S_m приестественных вложениях теорема доказана.□

Сделаем сейчас несколько замечаний.

a) В полулокальном кольце R единичный элемент 1 является суммой двух обратимых элементов тогда и только тогла, когда каждый фактор в разложении фактор-кольца кольца R по радикалу Джекобсона отличен от поля из двух элементов ([5] Теорема 3).

b) Как отмечено в [8] Теорему 13 можно обобщить на кольца R такие, что R аддитивио порождается обратимыми элементами и 1 является суммой двух обратимых элементов. Это значит, что и наши результаты верны в этом случае.

c) При тех же предположенниях на кольцо как в замечании b)в работе [100] (смотри параграф 9, теорема) описано подгруппы группы $T(\infty, R)$ содержащие $D_{\mathrm{fin}}(\infty, R)$ — подгруппу всех финитарных диагональных матриц. Этот результат вместе с теоремой 14 дает описание двух важных интервалов в решетке подгрупп группы $\mathrm{GL_{VK}}(R)$.

§ 12. Группы состоящее из стрингов

В настоящем параграфе мы определим два типа групп бесконечных матриц состоящее только из стрингов.

Пусть $x \in \mathrm{GL}(n, R)$. Обозначим через $\mathrm{D}(x)$ бесконечную блочно-диагональную матрицу $\mathrm{diag}\,(x, x, x, \ldots)$.

Мы положим

$$\mathrm{GL}^*(R) = \{\mathrm{D}(x) : x \in \mathrm{GL}(n, R), n \in \mathbb{N}\}.$$

Ясно, что $\mathrm{GL}^*(R)$ является группой так как $(\mathrm{D}(x))^{-1} = \mathrm{D}(x^{-1})$ и для $y \in \mathrm{GL}(m, R)$ мы имеем $\mathrm{D}(x) \cdot \mathrm{D}(y) = \mathrm{D}(z)$, где $z \in \mathrm{GL}(lcm(n, m), R)$.

Группа $\mathrm{GL}^*(R)$ имеет другое представление как прямый предел конечномерных групп. Пусть m, n натуральные числа таке, что m делит n $(m|n)$. Пусть ϕ_m^n естественное вложение группы $\mathrm{GL}(m, R)$ в группу $\mathrm{GL}(n, R)$ заданное равенством

$$\phi_m^n(x) = \mathrm{diag}\,(x, x, \ldots, x).$$

Это так называемые строго диагональные вложения. Ясно, что для любых натуральных k, m, n таких, что $m|n$ и $n|k$ мы имеем $\phi_m^k = \phi_n^k \circ \phi_m^n$. Сумма груnп $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно этих вложений совпадает с прямым пределом $\lim(\mathrm{GL}(n, R), \phi_m^n)$ и равна $\mathrm{GL}^*(R)$. Отметим, что $\mathrm{GL}^*(R)$ отличается от стабильной линейной группы $\mathrm{GL}(R)$, которая является прямым пределом при вложениях $\psi_m^n(x) = \mathrm{diag}\,(x, 1, \ldots, 1)$.

Мы опишем нормальные подгруппы и подгруппы содержащие диагональные матрицы в группе $\mathrm{GL}^*(R)$.

Обозначим через $\mathrm{E}^*(R)$ подгруппу группы $\mathrm{GL}^*(R)$ порожденную всеми $\mathrm{D}(x)$, где x элементарная трансвекция.

Если $x \in \mathrm{E}(2, R)$ мы можем смотреть на $\mathrm{D}(x)$ как на $\mathrm{D}(y)$, где $y = x \oplus x \in \mathrm{E}(4, R)$. Таким образом, для коммутативного R мы имеем равенства

$$[\mathrm{GL}^*(R), \mathrm{GL}^*(R)] = [\mathrm{E}^*(R), \mathrm{E}^*(R)] = \mathrm{E}^*(R).$$

Предложение 31. Если R коммутативно, то $E^*(R)$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{GL}^*(R)$.

Для двустороннего идеала A кольца R, через $\mathrm{E}^*(R, A)$ обозначим нормальное замыкание группы $\mathrm{E}^*(A)$ в группе $\mathrm{E}^*(R)$.

Эта группа называется относительной элементарной группой. Ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{GL}^*(R) \to \mathrm{GL}^*(R/A)$ обозначим $\mathrm{GL}^*(R, A)$ и называем главной конгруэнцподгруппой.

Следующий результат описывает нормальное строение группы $\mathrm{GL}^*(R)$:

Если R ассоциативное кольцо с 1, H — подгруппа нормализуемая группой $\mathrm{E}^*(R)$, то существует двусторонний идеал A кольца R такой, что

$$\mathrm{E}^*(R, A) \leq H \leq \mathrm{GL}^*(R, A).$$

Этот идеал однозначно определяется из равенств:

$$\mathrm{E}^*(R, A) = [H, \mathrm{E}^*(R)] = [H, GL^*(R)].$$

Для описания подгрупп содержащих диагональные матрицы надо использовать язык сетей.

В случае группы $\Gamma = \mathrm{GL}^*(R)$ определяем сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma)$ как пересечение $\mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{GL}^*(R)$, а символом $N_\Gamma(\sigma)$ обозначаем нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}^*(R)$.

Обобщая рассуждениям для стабильной группы в предложении 24 можно доказать следующий результат.

Пусть R — полулокальное кольцо, поля вычетов которого отличны от $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$ и $\mathrm{M}(2, \mathbb{F}_2)$. Тогда для любой подгруппы H группы $\Gamma = \mathrm{GL}^*(R)$ содержащей все диагоналные матрицы существует единственная D—сеть идеалов σ такая, что $\Gamma(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}_\Gamma(\sigma)$.

Супернатуральным числом называем формальное произведение вида

$$u = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots,$$

где $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, и $p_1, p_2, \ldots$ является упорядоченной по величине последовательностью всех простых чисел. Пусть $S\mathbb{N}$ множество всех супернатуральных чисел. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ можем считать подмножеством $S\mathbb{N}$. Натуральных числам соответствуют тогда все супернатуральные числа, в которых почти все экспоненты k_i равны нулю. В множестве $S\mathbb{N}$ можно ввести отношение делимости. Пусть $u = \prod p_i^{k_i}$, $v = \prod p_i^{l_i}$, два супернатуральные числа, говорим, что u делит v (обозначаем $u|v$), если $k_i \leq l_i$ для всех индексов i. Множество $S\mathbb{N}$ является полной решеткой с действиями

$$NWD(u, v) = \prod p_i^{\min(k_i, l_i)}$$

$$NWW(u, v) = \prod p_i^{\max(k_i, l_i)}$$

Наибольшим элементом в решетке является число $I = 2^\infty \cdot 3^\infty \cdot \ldots$, наименьшим число $0 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot \ldots$. $S\mathbb{N}$ содержит как подрешетку, множество $K(a)$, всех делителей числа $a = 2^1 \cdot 3^1 \cdot \ldots$, $K(a)$ на самом деле является булевой алгеброй. Отметим, что p^∞ является минимальным элементом в множестве $S\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Пусть Σ множество бесконечных последовательностей $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ натуральных чисел, таких, что $n_i \geq 2$ и $n_i | n_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Если $\xi = (n_1, n_2, \ldots)$, то ξ-гомогенной полной линейной группой называем прямый предел индуктивной системы $(\mathrm{GL}(n, R), \phi_m^n)$ где n, m пробегают только значения из последовательности ξ. Этот прямый предел будем обозначать $\mathrm{GL}(\xi, R)$ или $\mathrm{GL}(\xi)$. С каждой последовательностью ξ можем связать супернатуральное число $s(\xi)$ следующим образом: $s(\xi) = 2^{s_1} \cdot 3^{s_2} \cdot \ldots$, где s_i равно наибольшей степени числа p_i делящей все n_j или $s_i = \infty$ если такое число не существует. Оказывается, что прямые пределы однозначно определены числами $s(\xi)$. Разным супернатуралным числам отвечают неизоморфные пределы. Это легко следует из рассуждений работы [121].

Предложение 32. Все ξ-моногенные группы в $\mathrm{GL}^*(R)$ составляют решетку изоморфную решетке супернатуральных чисел.

Как следствие получаем

Следствие 4. Решетка ξ-моногенных групп полная, дистрибутивная, имеет наименьший и наибольший элемент.

Обозначим через $\mathrm{E}(\xi, R)$ подгруппу группы $\mathrm{GL}(\xi, R)$ порожденную всеми регулярными обобщенными трансвекциями и назовем элементарной группой группы $\mathrm{GL}(\xi, R)$. Для двустороннего идеала A кольца R, через $\mathrm{E}(\xi, R, A)$ обозначим нормальное замыкание группы $\mathrm{E}(\xi, A)$ в группе $\mathrm{E}(\xi, R)$. Эта группа называется относительной элементарной группой группы $\mathrm{GL}(\xi, R)$. Ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{GL}(\xi, R) \to \mathrm{GL}(\xi, R/A)$ обозначим $\mathrm{GL}(\xi, R, A)$ и называем главной конгруэнцподгруппой.

Следующий результат описывает нормальное строение группы $\mathrm{GL}(\xi, R)$:

Если R ассоциативное кольцо с 1, H — подгруппа нормализуемая группой $\mathrm{E}(\xi, R)$, то существует двусторонний идеал A кольца R такой, что

$$\mathrm{E}(\xi, R, A) \leq H \leq \mathrm{GL}(\xi, R, A).$$

Этот идеал однозначно определяется из равенств:

$$\mathrm{E}(\xi, R, A) = [H, \mathrm{E}(\xi, R)] = [H, GL(\xi, R)].$$

Для описания подгрупп содержащих диагональные матрицы надо использовать язык сетей.

В случае группы $\Gamma = \mathrm{GL}(\xi, R)$ определяем сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma)$ как пересечение $\mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{GL}(\xi, R)$, а символом $N_\Gamma(\sigma)$ обозначаем нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}(\xi, R)$.

Аналогично рассуждениям для стабильной группы доказывается

Пусть R — полулокальное кольцо, поля вычетов которого отличны от $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$ и $\mathrm{M}(2, \mathbb{F}_2)$. Тогда для любой подгруппы H группы $\Gamma = \mathrm{GL}(\xi, R)$ содержащей все диагоналные матрицы существует единственная $D-$сеть идеалов σ такая, что $\Gamma(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}_\Gamma(\sigma)$.

Результаты этого параграфа могут быть использованы для определения семейства групп являющихся аналогами группы Стейнберга и новых функторов K_1 (смотри также [156], [157], [158], [160], [18].

ГЛАВА III

Свободные подгруппы унитреугольных групп

Эта глава посвящена свободным подгруппам бесконечных унитреугольных групп. Известно, что конечномерные унитреугольные группы нильпотентны, а стабильная унитреугольная группа локально нильпотентна, тем самым они не содержат свободной подгруппы. Оказывается, что уже группа унитреугольных бесконечных матриц содержит свободные подгруппы и их много, в точно определенном смысле.

В § 13 приведено представление свободной группы ранга 2 бесконечными унитреугольными матрицами над кольцом целых чисел и кольцом вычетов по модулю p ($p > 2$). Это представление имеет техническое преимущество по отношению к представлениям свободной группы поворотами трехмерного пространства (Хаусдорф [167]), формальными рядами (Магнус [132]) или квадратными матрицами степени 2 (Санов [30], [20]). Используя это представление в § 14 даются совсем простые доказательства аппроксимируемости свободных групп нильпотентными группами (теорема Магнуса) и конечными p-группами (теорема Ивасавы) [132]. В § 15 доказывается, что почти все k-порожденные подгруппы группы бесконечных унитреугольных матриц над конечным полем являются свободными группами ранга k. В § 16 доказываются аналогичные результаты для случая полугруппы бесконечных треугольных матриц.

§ 13. Примеры свободных подгрупп

Мы построим теперь самые простые примеры свободных подгрупп ранга 2 в группе бесконечных унитреугольных матриц. Оказывается, что доказательства элементарны. Используя каноническую проекцию по модулю p (p - простое) мы получим свободные подгруппы в группе автоматов с конечным числом состояиий над алфавитом размера p, обобщая результаты Алешина [2], Бруннера-Сидки [55] и Олийника-Сущанского [25], [27], [143] в этом направлении. Результаты этого параграфа опубликованы в работе автора [105]. Как применение, в следующем параграфе дадим простые доказательства трех классических результатов в теории свободных групп.

Во многих работах рассматривается ситуация, когда $\mathrm{gp}(a, b)$, подгруппа группы G порожденная элементами a, b, является свободной группой ранга 2. Обычно, G является группой конечномерных матриц [30], [81], подстановок счетного множества [76] или преобразований эвклидова пространства [167]. В некоторых группах, почти все (в смысле категории Бэра) конечно порожденные подгруппы являются свободными. Известными примерами являются конечномерные, связные, неразрешимые группы Ли [81] и конечно порожденные кратно транзитивные подгруппы группы $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ [76]]. Доказательства этих результатов используют во многих случаях трудные факты из теории Галуа. В действительности часто бывает легче доказать, что группы некоторого класса являются свободными, чем доказать, что конкретная группа является свободной.

Простой пример (с простым доказательством) двух элементарных трансвекций $T_{12}(2), T_{21}(2)$ порождающих свободную подгруппу был приведен Сановым [30]. Если A и B порождают свободную подгруппу в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, то используя диагональное вложение вида $\mathrm{diag}\,(A, I_1, I_1, \ldots)$ или $\mathrm{diag}\,(A, A, A, \ldots)$ мы получим изоморфные копии свободных групп в группе бесконечномерных матриц (I_n обозначает $n \times n$ единичную матрицу). Наши примеры свободных групп ранга 2 являются подгруппами группы $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$, группы всех верхних бесконечных унитреугольных матриц над $\mathbb{Z}$ и не могут быть получены с использованием диагональных вложений. Все группы $\mathrm{UT}(k, \mathbb{Z})$ $(k \in \mathbb{N})$ являются нильпотентными и не содержат свободной нециклической подгруппы. Таким образом, наши примеры являются самыми простейшими для унитреугольной группы. Отметим, что группа $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ является пронильпотентной как обратный предел групп $\mathrm{UT}(k, \mathbb{Z})$.

На самом деле, мы покажем больше. Бесконечная верхняя унитреугольная матрица $A = (a_{ij})$ называется *$m-$квазидиагональной* если $a_{ij} = 0$ для $j > i + m$ и $a_{k,k+m} \neq 0$ для некоторого k. Матрица A называется *квазидиагональной* если она $m-$квазидиагональной для некоторого m. Символом $\mathrm{UT}_b(\infty, \mathbb{Z})$ обозначим подгруппу группы $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ состоящую из всех матриц A таких, что A и A^{-1} являются квазидиагональными. Символом $A_{[s]}$ обозначим подматрицу матрицы A, которую получаем выбрасыванием первых s строк и первых s столбцов матрицы A. Положим $\mathrm{res}(A) = \{A, A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots\}$. Множество $\mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, \mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z}) : |\mathrm{res}(A)| < \infty \text{ and } |\mathrm{res}(A^{-1})| < \infty\}$ является подгруппой. Приведенные выше примеры свободных подгрупп являются подгруппами группы $\mathrm{UT}_b(\infty, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, \mathbb{Z})$. При естественной проекции по модулю p (p - простое число) образы наших примеров являются свободными произведениями двух циклических групп порядка p. Таким образом для любого простого $p > 2$ модулярная группа $\mathrm{UT}_b(\infty, p) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, p)$ тоже содержит свободную подгруппу ранга 2 (и поэтому она неаменабельна).

Отметим, что свободные подгруппы группы $\mathrm{UT}(\infty, q)$ были построены на языке конечных автоматов в работе Алешина [2] для $q = 2$ (доказательство там неполное, полное доказательство приведено только в работе Григорчука и Жука), в работе Бруннера и Сидки [55] для $q = 2^n$ ($n \geq 2$) и в работе Олийныка [25] для $q = 2, 3$. Работа Олийныка и Сущанского [27] содержит первый пример двух бесконечных матриц, которые порождают свободную подгруппу в $\mathrm{UT}_b(\infty, 2) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, 2)$.

Пусть $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $a = \operatorname{diag}(a_2, a_2, a_2, \ldots)$, $b = \operatorname{diag}(1, a_2, a_2, \ldots)$.

Теорема 17. Группа $\mathrm{gp}(a, b)$ является свободной группой ранга 2 в группе $\mathrm{UT}_b(\infty, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, \mathbb{Z})$.

Следствие 5. Для любого натурального n группа порожденная матрицами $\operatorname{diag}(e_n, a_2, a_2, \ldots)$ и $\operatorname{diag}(e_{n+1}, a_2, a_2, \ldots)$ является свободной группой.

Следствие 6. Группа порожденная матрицами $\{a^k b a^{-k} : k \in \mathbb{Z}\}$ является свободной группой счетного ранга.

Доказательство Теоремы 17: Сначала заметим, что для произвольного натурального n имеем $a_2^n = T_{12}(n)$, откуда $a^n = \operatorname{diag}(a_2^n, a_2^n, \ldots)$ и $b^m = \operatorname{diag}(I_1, a_2^m, a_2^m, \ldots)$. Покажем, что произведение $b^{m_0} a^{n_1} b^{m_1} \ldots a^{n_s} b^{m_s} a^{n_{s+1}}$, где $n_1, m_1, \ldots, n_s, m_s$ ненулевые целые числа и m_0, n_{s+1} произвольные целые числа, является неединичной матрицей. Легкие вычисления показывают, что

$$a^n b^m = \begin{pmatrix} 1 & n & nm & & & & & \\ & 1 & m & & & & & \\ & & 1 & n & nm & & & \\ & & & 1 & m & & & \\ & & & & 1 & n & nm & \\ & & & & & 1 & m & \\ & & & & & & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

где все элементы матрицы выше ступенек нулевые и матрица является 2−квазидиагональной. Индукцией по s можно показать, что $a^{n_1} b^{m_1} \ldots a^{n_s} b^{m_s}$ имеет ступенчатый вид (с элементами выше "лесенки"равными нулю)

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & e & c & & & & & \\ & 1 & \ldots & d & & & & & \\ & & 1 & \ldots & e & c & & & \\ & & & 1 & \ldots & d & & & \\ & & & & 1 & \ldots & e & c & \\ & & & & & 1 & \ldots & d & \\ & & & & & & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

где угловые элементы равны $c = n_1m_1 \cdot \ldots \cdot n_sm_s$, что показывает, что матрица $a^{n_1}b^{m_1}\ldots a^{n_s}b^{m_s}$ неединичная. В действительности она $2s-$квазидиагональна. Умножая эту матрицу слева на b^{m_0} ($m_0 \neq 0$) и справа на $a^{n_{s+1}}$ ($n_{s+1} \neq 0$), мы тоже получим ступенчатую матрицу с коэффициентами в углу вида $m_0 \cdot c \cdot n_{s+1}$, что доказывает Теорему 17. □

Отметим, что матрицы $\{a^kba^{-k} : k \in \mathbb{Z}\}$ $3-$квазидиагональные и для любого k мы имеем $|\mathrm{res}(a^kba^{-k})| = 2$. Легкие вычисления показывают, что они имеют простую блочную структуру вида

$$a^kba^{-k} = \begin{pmatrix} I_2 & C^{(k)} & & & \\ & I_2 & C^{(k)} & & \\ & & I_2 & C^{(k)} & \\ & & & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \text{ где } C^{(k)} = \begin{pmatrix} k & -k^2 \\ 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Другой пример свободной подгруппы в группе $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ дают две матрицы $T_1 = \prod_{i=2}^{\infty} T_{1,i}(1)$, $T_2 = \prod_{i=1}^{\infty} T_{i,i+1}(-1)$, но вычисления в этом случае слишком громоздкие.

Пусть D будет $n \times n$ унитреугольной матрицей. Мы определяем бесконечную матрицу

$$D_{<1>} = \mathrm{diag}\,(D, D, \ldots), \ldots, D_{<s>} = \mathrm{diag}\,(I_{s-1}, D, D, \ldots), \ldots.$$

и ставим вопрос

Проблема *Для каких матриц D, бесконечные матрицы $D_{<1>}, \ldots, D_{<n>}$ порождают свободную подгруппу ранга n?*

В случае $n = 2$ наша Теорема 17 дает положительный ответ для $D = T_{12}(k)$ для любого целого числа k, так как подгруппа свободной группы свободна. Другой частичный ответ в этом направлении дает

Предложение 33. Пусть D будет $n \times n$ верхней унитреугольной матрицей, у которой все ненулевые коэффициенты положительные действительные числа. Тогда матрицы $D_{<1>}, \ldots, D_{<n>}$ порождают свободную подполугруппу ранга n.

То же самое верно и для матрицы $D = T_{12}(1)T_{13}(1)\ldots T_{1n}(1)$, но это требует дополнительных рассуждений.

Приведем теперь пример свободной подгруппы в модулярном случае. Пусть φ_p : $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z}) \to \mathrm{UT}(\infty, p)$ канонический гомоморфизм по модулю p унитреугольной группы (p - простое число). Из Теоремы 17 следует

Теорема 18. Если $\mathrm{gp}(a, b)$ группа из Теоремы 17, то $\mathrm{gp}(\varphi_p(a), \varphi_p(b))$ является свободным произведением $C_p \star C_p$ двух циклических групп порядка p.

Следствие 7. Для любого простого $p > 2$, группа $\mathrm{UT}_b(\infty, p) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, p)$ содержит свободную подгруппу ранга 2.

Ясно, что $\varphi_p(a), \varphi_p(b)$ имеют порядок равен p и те же самые рассуждения как в доказательстве Теоремы 17 показывают, что $\mathrm{gp}(\varphi_p(a), \varphi_p(b)) = \mathrm{gp}(\varphi_p(a)) \star \mathrm{gp}(\varphi_p(b))$ является свободным произведением. Известно, что если $n > 2$, то $C_n \star C_n$ содержит свободную подгруппу ранга 2 [132], стр. 195. Из Следствия 5 получаем бесконечное семейство разных свободных подгрупп ранга 2 в группе $\mathrm{UT}_b(\infty, p) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, p)$. На самом деле, этот результат верен для любого поля характеристики $p > 2$.

Другие примеры свободных подгрупп группы $\mathrm{UT}(\infty, q)$, на языке автоматов с конечным числом состояний, построены в [2], [55], [25]. В [2] построено два автомата порождающие свободную подгруппу, но полное доказательство пока не опубликовано. Вложение группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ (а тем самым и свободной группы) в группу $\mathrm{UT}(\infty, 2^n)$ для $n \geq 2$ построено в [55]. В [25] автор дал пример подгруппы изоморфной $C_2 \star C_2 \star \ldots \star C_2$ свободному произведению n копий групп C_2, которое содержит свободную подгруппу при $n > 2$. Работа [27] содержит явный пример свободной подгруппы в $\mathrm{UT}_b(\infty, 2) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, 2)$.

Из наших результатов следует, что группа $\mathrm{UT}(\infty, F)$, для конечного поля F, содержит свободную подгруппу счетного ранга. Но с другой стороны, известно, что группа всех подстановок натуральных чисел содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$ [77] и является подгруппой $\mathrm{GL}_c(\infty, K)$. Верно ли, что $\mathrm{UT}(\infty, F)$ тоже содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$?

Теперь мы сформулируем интересное свойство унитреугольной группы. Пусть $G_1, \ldots, G_n$ подгруппы группы $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ определенные условиями

$$G_s = \{a \in \mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z}) : a_{ij} = 0 \text{ если для } i < j \ (i \not\equiv s \bmod n \text{ или } j \not\equiv s \bmod n)\}$$

Группы G_s изоморфны группе $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ и подгруппа порожденная всеми G_s является их прямым произведением $G_1 \times \ldots \times G_n$. Повторяя это построение в модулярном случае получаем

Предложение 34. Существует бесконечно порожденная, резидуально нильпотентная, счетная, несвободная группа H, имеющая следующие свойства:

1) H содержит свободную подгруппу не содержащуюся в коммутанте,

2) любая группа $\gamma_n(H)$ является несвободной группой содержащей $\underbrace{H \times H \times \ldots \times H}_{n}$ и прямое произведение свободных групп $\underbrace{F \times F \times \ldots \times F}_{n}$

§ 14. Применеиия к аппроксимациоиным свойствам

Теперь мы используем наш пример свободной группы унитреугольных матриц для получения элементарных доказательств следующих классических результатов в теории групп. Результаты параграфа опубликованы в работе автора [105].

Пусть F обозначает свободную группу счетного или конечного ранга (если требуется указать явно ранг пишем F_∞ или F_m). Пусть $[F,F] = \gamma_2(F)$ коммутант группы F $\gamma_n(F) = [\gamma_{n-1}(F), F]$ — n—тый член нижнего центрального ряда F.

Теорема 19. (Леви [125]) Коммутант $[F_2, F_2]$ является счетио порожденной свободной группой.

Теорема 20. (Магнус [131]) Нижний центральный ряд свободной группы пересекается тривиально, т. е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(F) = \{I\}$ (другими словами F является резидуально нильпотентной группой или F аппроксимируется нильпотентными группами).

Теорема 21. (Ивасава [132]) Свободная группа аппроксимируется конечными p—группами.

Напомним, что группа G аппроксимируется группами со свойством P, если для каждого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует нормальная подгруппа N_g группы G, не содержащая g и такая, что факторгруппа G/N_g обладает свойством P. Иначе говоря, G аппроксимируется группами со свойством P, если все нормальные подгруппы, чьи факторгруппы обладают свойством P пересекаются по единице.

Если H подгруппа в G, то $\gamma_n(H) \subset \gamma_n(G)$. Теорема 20 легко следует из Теоремы 17 и следующего

Предложение 35. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})) = \{I\}$.

Если для фиксированного k, i—тые строки матриц a, b имеют вид

$$(a)_i = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, a_{i,i+k+1}, \ldots]$$

и

$$(b)_i = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, b_{i,i+1}, \ldots]$$

то

$$(aba^{-1}b^{-1})_i = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+1}, c_{i,i+k+2}, \ldots]$$

Это значит, что во всех матрицах из $\gamma_n(\mathrm{UT}(\infty,\mathbb{Z}))$ первые $n-1$ диагонали выше главной являются нулевыми. Отсюда следует, что пересечение всех групп $\gamma_n(\mathrm{UT}(\infty,\mathbb{Z}))$ тривиально.

Дадим набросок доказательства Теоремы 19. Пусть $G = \mathrm{gp}(a,b)$ из Теоремы 17. Коммутант группы G порождается матрицами $c_{(m,n)} = [a^m, b^n]$ где $m \cdot n \neq 0$. В действительности, матрицы $c_{(m,n)}$ являются свободными порождающими. Имеем

$$c_{(m,n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nm & -n^2m & n^2m^2 & & & & & \\ & 1 & 0 & -nm & nm^2 & & & & & \\ & & 1 & 0 & nm & -n^2m & n^2m^2 & & & \\ & & & 1 & 0 & -nm & nm^2 & & & \\ & & & & 1 & 0 & nm & -n^2m & n^2m^2 & \\ & & & & & 1 & 0 & -nm & nm^2 & \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Аналогичные рассуждения как в доказательстве Теоремы 17 показывают, что любое нетривиальное слово в порождающих $c_{(m,n)}$ является нетривиальной матрицей.

Для доказательства теоремы 21 отметим, что естественное отображение $\rho : F_2 \to \mathrm{UT}(n,p)$ при котором образами порождающих x, y свободной группы будут матрицы

$$c = \mathrm{diag}\,(t_{12}(1), t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots), \quad d = \mathrm{diag}\,(1, t_{12}(1), t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots)$$

которые получаются вырезанием левого верхнего угла размера $n \times n$ из соответсвующих порождающих свободной группы в $\mathrm{UT}(\infty, p)$, является гомоморфизмом групп. Это вытекает из того, что в треугольных группах при умножении матриц коэффициенты k-того столбца произведения зависят только от столбцов сомножителей с номерами не больше k. Так как, матрицы c, d квазидиагональные и имеют конечые резидуа, для произвольного элемента свободной группы его образ в $\mathrm{UT}(n,p)$ (слово на матрицах c, d) будет нетривиальной матрицей при достаточно большом n.

Отметим, что самое простое и красивое доказательство теоремы Виноградова о упорядочиваемости свободного произведения упорядочиваемых групп [22] данное А. Стройновским тоже использует бесконечные треугольные матрицы [162].

§ 15. Почти все подгруппы свободны

В этом параграфе мы покажем, что группа бесконечных верхних унитреугольных матриц над конечным полем содержит счетную подгруппу, которая имеет много свободных подгрупп (полную). Из этого следует, что в четко определенном смысле, почти все $k-$порожденные ее подгруппы являются свободными группами ранга k. Эти результаты опубликованные в работе [102].

Пусть $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ группа всех бесконечных (индексированных множеством $\mathbb{N}$) верхних унитреугольных матриц над конечным полем порядка p^s (p - простое число). Множество N_m всех матриц a из G таких, что первые m столбцов a такие, как у единичной матрицы e, составляет нормальную подгруппу группы G. Ясно, что $|G : N_m| < \infty$ и G является проконечной группой как обратный предел групп $G/N_m \simeq \mathrm{UT}(m, p^s)$ [171], [146]. Проконечная топология индуцирует метрику $d(x, y)$, относительно которой группа G является полным метрическим пространством. То же самое верно и для группы $G^k = G \times \ldots \times G$ если рассматривать произведение метрик $d(x, y)$. Если $x \in G^k$, то символом $\langle x \rangle$ обозначим подгруппу группы G порожденную всеми координатами элемента x. Положим

$$F = \{x \in G^k \mid \langle x \rangle \text{ является свободной группой ранга } k\}.$$

Подмножество метрического пространства называется нигде не плотным, если его дополнение содержит открытое, плотное подмножество. Сумма счетного семейства нигде не плотных множеств называется множеством первой категории (в смысле Бэра). Теорема Бэра утверждает, что в полном метрическом пространстве дополнение множества первой категории является плотным множеством [118].

В работе [81] Эпстейн показал, что почти все $k-$порожденные подгруппы связной, неразрешимой, конечномерной группы Ли являются свободными группами ранга k, здесь выражение почти все интерпретируется используя натуральную меру Хаара на группе. В работе [76] Диксон показал, что почти все $k-$порожденные подгруппы в группе подстановок счетного множества являются свободными группами ранга k в натуральной топологии определенной на группе подстановок. Батачаржи получила аналогичные результаты в [53] для обратных пределов сплетений нетривиальных групп. Мы докажем следующую

Теорема 22. Почти все $k-$порожденные подгруппы в группе $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ являются свободными группами ранга k, в том смысле, что множество $G^k \setminus F$ является множеством первой категории в G^k.

Эта теорема показывает принципиальное отличие строения бесконечномерной унитреугольной группы $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$. Отметим, что конечномерная унитреугольная группа $\mathrm{UT}(m, p^s)$ конечна, а стабильная унитреугольная группа $\mathrm{UT}_\omega(p^s)$, как прямый предел конечных групп $\mathrm{UT}(m, p^s)$ при натуральных вложениях, локально конечная, тем самым они не содержат никаких свободных нециклических подгрупп.

Гарсайд и Найт предложили в [86] новый подход, с использованием польских топологических групп, который дает много эквивалентных условий для свойства доказанного в Теореме 1. Главный результат статьи [86] позволяет усилить наш результат следующим образом

Следствие 8. (i) Почти все счетно порожденные подгруппы группы $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ являются свободными подгруппами счетного ранга.
(ii) $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит недискретную свободную подгруппу ранга два.

Наше доказательство Теоремы 22, в отличие от доказательств в работах [53], [76]-[86], использует конкретные примеры свободных подгрупп. Оно вытекает из существования в G конкретной счетной подгруппы, в которой много (обилие) свободных подгрупп. Имеем

Теорема 23. Группа $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит счетную подгруппу H такую, что пересечение H^k с любым открытым шаром в G^k содержит свободную подгруппу ранга k, заданную конкретными порождающими.

Наш подход дает возможность доказать аналогичный результат для полугрупп. Например, почти все подполугруппы мультипликативной полугруппы бесконечных верхнетреугольных матриц над конечным полем являются свободными [106].

В заключение мы обсудим несколько открытых вопросов. Все рассматриваемые здесь свободные подгруппы дискретные. Интересно найти явные порождающие недискретной свободной подгруппы ранга 2, существование которой вытекает из Следствия 8 (ii). Известно, что группа подстановок бесконечного множества содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$. Верно ли то же самое для группы $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$?

Проконечная топология на G индуцирует следующую метрику

Определение 10. Для $x, y \in G$ расстояние $d(x, y)$ определено равенством $d(x, y) = 0$ если $x = y$, а когда $x \neq y$ равенством $d(x, y) = 2^{-m}$ где $m \in \mathbb{N}$ является наименьшим номером таким, что $m-$тые строки матриц x и y разные, т. е. $xy^{-1} \in N_m$.

Групповые действия $(x, y) \mapsto xy$ и $x \mapsto x^{-1}$ на группе G непрерывны в этой метрике и (G, d) является полным метрическим пространством. Определяем метрику d_k на G^k обычным образом: $d_k(x, y) = \max\{d(x_i, y_i) | i = 1, \ldots, k\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Символом $B(x, n)$ обозначаем открытый шар в G^k с радиусом 2^{-n}. $B(x, n)$ открытый и замкнутый (равен замкнутому шару с радиусом 2^{-n-1}). Тем самым (G^k, d_k) полное и вполне несвязное пространство.

Доказательство Теоремы 23: Пусть $B(x, n)$ фиксированный открытый шар в G^k. Тогда $x = (x_1, \ldots, x_k) \in G^k$ и $n \in \mathbb{N}$. Покажем сначала, что $B(x, n)$ содержит свободную подгруппу. Пусть $x'_1, \ldots, x'_k$ обозначает образы матриц $x_1, \ldots, x_k$ при гомоморфизме $f : \mathrm{UT}(\infty, p^s) \to \mathrm{UT}(n, p^s)$, который вычеркивает строки и столбцы с номерами $n+1, n+2, \ldots$. Если $y_1, \ldots, y_k$ порождают свободную подгруппу в G, то бесконечные унитреугольные матрицы $z_1 = \mathrm{diag}(x'_1, y_1)$, $\ldots$, $z_k = \mathrm{diag}(x'_k, y_k)$ тоже порождают свободную подгруппу. Кроме того $z = (z_1, \ldots, z_k) \in B(x, n)$.

Теперь приведем примеры свободных групп в G, которые можно задать явными порождающими. Главный результат [27] показывает, что $\mathrm{UT}(\infty, 2)$ содержит свободное произведение трех циклических групп порядка два, и поэтому содержит тоже нециклическую свободную подгруппу [132]. На самом деле в работе [27] приведен явный пример двух матриц, которые порождают свободную подгруппу. В [105] показано, что бесконечные матрицы $c = \mathrm{diag}(t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots)$ и $d = \mathrm{diag}(1, t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots)$, где $t_{12}(1)$ элементарная трансвекция $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, порождают свободную подгруппу в группе $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ (нециклическую). Для $p > 2$, они порождают в $\mathrm{UT}(\infty, p)$ свободное произведение двух циклических групп порядка p, который также содержит нециклическую свободную подгруппу [132]. Например, элементы $x = c(cd)c^{-1}$, $y = dc(cd)c^{-1}d^{-1}$ порождают свободную подгруппу ранга два. Стандартные рассуждения показывают, что если x, y порождают свободную подгруппу ранга два, то yxy^{-1}, $\ldots$, $y^k x y^{-k}$ порождают свободную подгруппу ранга k. Из этого следует, что мы получили свободные подгруппы также в группе $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$ для любого s, так как конечное поле порядка p^s содержит простое подполе порядка p.

Свободные подгруппы в [105] и [27] лежат к интересной подгруппе $\mathrm{UT}_a(\infty, p^s)$ группы $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$ связанной с преобразованиями конечных автоматов. Обозначим через $A_{[n]}$ подматрицу матрицы A, которая появляется после вычеркивания первых n столбцов и первых n строк матрицы A. Мы говорим, что последовательность $\{A_{[n]}\}$ почти периодическая, если она периодическая, то есть $A_{[n+d]} = A_{[n]}$, начиная с некоторого фиксированного n_0. $\mathrm{UT}_a(\infty, p^s)$ определена как подгруппа всех матриц A, для которых обе матрицы A и A^{-1} квазидиагональные и обе последовательности $\{A_{[n]}\}$ и $\{A^{-1}_{[n]}\}$ почти периодические. Ясно, что группа $\mathrm{UT}_a(\infty, p^s)$ счетная и матрицы $z_1 = \mathrm{diag}(x'_1, y_1), \ldots, z_k = \mathrm{diag}(x'_k, y_k)$ принадлежат группе $\mathrm{UT}(n, p^s) \times \mathrm{UT}_a(\infty, p^s)$. Группа $H = [\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{UT}(n, p^s)] \times \mathrm{UT}_a(\infty, p^s)$ тоже счетна и Теорема 23 доказана.□

Доказательство теоремы 22: Если w редуцированное слово в свободной группе ранга k, то положим $F(w) = \{x \in G^k | w(x) \neq e\}$. Ясно, что $F = \bigcap F(w)$, где пересечение взято по всем нетривиальным редуцированным словах w. Отметим, что это пересечение счетного семейства. Так как $G^k \setminus F = G^k \setminus \bigcap F(w) = \bigcup (G^k \setminus F(w))$, достаточно доказать, что $F(w)$ открытое и плотное множество. Это показывает, что $G^k \setminus F(w)$ нигде не плотное множество и $G^k \setminus F$ множество первой категории.□

Лемма 10. $F(w)$ открыто в G^k.

Доказательство: Из непрерывности групповых действий следует непрерывность отображения $\phi : G^k \to G$ определенного равенством $\phi(x) = w(x)$. Множество $\{e\}$ замкнуто в G, отсюда $G \setminus \{e\}$ открыто и $F(w) = \phi^{-1}(G \setminus \{e\})$ открыто в G^k.□

Лемма 11. $F(w)$ плотное в G^k.

Доказательство: Покажем, что F плотное в G^k и ввиду неравенства $F \subseteq F(w)$ получим заключение леммы. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_k) \in G^k$ и $n \in \mathbb{N}$. Из Теоремы 23 следует, что любой открытый шар $B(x, n)$ содержит точку множества F, значит F плотное.□

Замечание. Группа $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит много интересных несвободных подгрупп, например Нотингеймскую группу. Известно, что любая счетно порожденная про-p-группа вложима в $\mathcal{N}$ [64], и тем самым в $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$. В частности, любая конечно порожденная резидуально конечная p-группа вложима в $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$.

§ 16. Почти все подполугруппы свободны

В этом параграфе мы покажем, что, в точно определенном смысле, почти все k−порожденные подполугруппы мультипликативной полугруппы бесконечных верхнетреугольных матриц над конечным полем являются свободными полугруппами ранга k. Этот результат доказан в работе автора [106].

Многие вопросы о существовании свободных подполугрупп в разных структурах пока не решены (все рассматриваемые нами свободные полугруппы некоммутативные). Макар-Лиманов спросил в [134] когда мультипликативная группа тела содержит свободную подполугруппу. Клейн поставил такой вопрос для области целостности [119] (смотри также [65] для частичного ответа и ссылок). Если данная полугруппа S имеет свободную подполугруппу, то S не удовлетворяет никакому полугрупповому тождеству. Вопрос, верно ли обратно, пока открыт. В работе [142] Окнински и Сальва получили положительный ответ в случае линейной полугруппы над конечно порожденным полем.

Ввиду этих результатов, интересно исследовать свойства множества свободных подполугрупп данной полугруппы. Олийнык показал в [26], что почти все конечно порожденные подполугруппы полугруппы автоматных преобразований являются свободными. Мы покажем сейчас, что в точно определенном смысле, почти все k−порожденные подполугруппы мультипликативной полугруппы бесконечных верхнетреугольных матриц над конечным полем F являются свободными полугруппами ранга k. Этот результат интересен, так как конечномерные полугруппы верхних треугольных матриц над конечным полем конечны, а их прямый предел при естественных вложениях локально конечен. Это значит, что они не содержат свободных подполугрупп.

Пусть $S = \mathcal{T}(\infty, p^r)$ обозначает полугруппу (относительно умножения) всех верхних треугольных матриц индексированных множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ над конечным полем порядка p^r (p-простое, $r \in \mathbb{N}$). Определим на S метрику d, положив для всех $x, y \in S$ $d(x, y) = 0$ если $x = y$ в остальных случаях $d(x, y) = 2^{-m}$, где m является наименьшим натуральным числом таким, что m-тый столбцы у матриц x и y различны.

Ясно, что (S, d) неархимедово метрическое пространство (ультраметрическое). Мы определяем произведение метрик d_k на $S^k = S \times \ldots \times S$ (k-раз) естественным образом: $d_k(x, y) = \max\{d(x_i, y_i) | i = 1, \ldots, k\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Мы покажем, что пространство (S, d), а таким образом и (S^k, d_k), полные.

Если $x \in S^k$, то $\langle x \rangle$ обозначает подполугруппу полугруппы S порожденную компонентами x. Мы положим

$$F = \{x \in S^k \ : \ \langle x \rangle \text{ является свободной полугруппой ранга} k\}.$$

Главным результатом параграфа является

Теорема 24. Почти все $k-$порожденные подполугруппы полугруппы $S = \mathcal{T}(\infty, p^r)$ являются свободными полугруппами ранга k, иначе говоря множество $S^k \backslash F$ является множеством первой категории в S^k.

В доказательстве теоремы 24 мы используем следующую

Предложение 36. Полугруппа $S = \mathcal{T}(\infty, p^r)$ содержит свободную полугруппу ранга k.

Доказательство предложения 36: На самом деле мы используем более сильный факт, именно $\mathcal{T}(\infty, p^r)$ содержит 2-порожденную свободную группу. Если подгруппа порожденная элементами x и y свободна, то подполугруппа порожденная x и y тоже свободна (обратное неверно, см. [42]). Кроме того, подполугруппа порожденная элементами $xy, xy^2, \ldots, xy^k$ является свободной подполугруппой ранга k, как показывают простые выкладки. Полугруппа $\mathcal{T}(\infty, p^r)$ содержит $\mathrm{UT}(\infty, p^r)$, группу верхних унитреугольных матриц. Достаточно повторить рассуждения из доказательства Теоремы 23 и наше предложение доказано.

Отметим, что на самом деле мы находим явный пример свободной подполугруппы ранга k, все шаги доказательства конструктивны, но вычисления слишком громоздкие и мы их опустим.

Главная идея доказательства теоремы 24 такая же как в работах [76], [26]. Доказательство получается серией лемм.

Лемма 12. (S^k, d_k) полное пространство.

Доказательство: Мы покажем, что (S, d) полное пространство, а тогда лемма следует из известного свойства произведения метрических пространств. Пусть $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ фундаментальная последовательность в (S, d). Для любого i существует n_i такое, что $d(u_{n_i}, u_m) < 2^{-i}$ для $m \geq n_i$. Это значит, что для $m \geq n_i$ первые $i-1$ столбцы матрицы u_m равны соответствующим столбцам матрицы u_{n_i}. Таким образом последовательность $\{u_{n_i}\}$ имеет предел u, который является также пределом для $\{u_i\}$. Поэтому пространство (S, d) полное. □

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_k)$ обозначает упорядоченный набор из n порождающих свободной полугруппы $FS(X)$ ранга k. Если $w = w(X)$ элемент $FS(X)$ и $u \in S^k$, то обозначим через $w(u)$ образ w в полугруппе S^k, при подстановке $X = u$. Если $w_1, w_2 \in FS(X)$, то положим $F(w_1, w_2) = \{x \in S^k : w_1(x) \neq w_2(x)\}$. Ясно, что $F = \bigcap_{w_1 \neq w_2} F(w_1, w_2)$. Это пересечение счетного числа множеств. Так как $S^k \setminus F = S^k \setminus \bigcap_{w_1 \neq w_2} F(w_1, w_2) = \bigcup_{w_1 \neq w_2}(S^k \setminus F(w_1, w_2))$, достаточно доказать, что $F(w_1, w_2)$ открыто и плотно для $w_1 \neq w_2$. Это покажет, что $S^k \setminus F(w_1, w_2)$ нигде не плотно и $S^k \setminus F$ является множеством первой категории.

Лемма 13. Для всех $w_1, w_2 \in FS(X)$, $w_1 \neq w_2$, множество $F(w_1, w_2)$ открыто в S^k.

Доказательство: Пусть $u, v \in S$. Если для некоторых $u_1, v_1 \in S$, первые m столбца матриц u и u_1 (соответвственно v и v_1) совпадают, то из свойства матричного умножения совпадают тоже первые m столбцы матриц uv и $u_1 v_1$. Это значит, что полугрупповая операция $(x, y) \mapsto xy$ на S непрерывна в метрике d. Отображения $\phi_i : S^k \to S$ определенные равенством $\phi_i(x) = w_i(x)$, где $i = 1, 2$, тоже непрерывны. Это значит, что множество $S^k \setminus F(w_1, w_2) = \{x \in S^k : w_1(x) = w_2(x)\}$ замкнуто, что доказывает лемму.□

Лемма 14. Для всех $w_1, w_2 \in FS(X)$, $w_1 \neq w_2$, множество $F(w_1, w_2)$ плотно в S^k.

Доказательство: Мы покажем более сильный результат, именно что F плотно в S^k и так как $F \subseteq F(w_1, w_2)$ лемма будет доказана. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_k) \in S^k$ и $n \in \mathbb{N}$. Мы покажем, что $B(x, n)$, открытый шар в S^k с радиусом 2^{-n} и центром в x, содержит точку из множества F. Пусть $x'_1, \ldots, x'_k$ обозначает образы $x_1, \ldots, x_k$ при гомоморфизме $f : \mathcal{T}(\infty, p^r) \to \mathcal{T}(n, p^r)$ который выбрасывает строки и столбцы с номерами $n+1, n+2, \ldots$. Из теоремы 36 следует, что существуют $y_1, \ldots, y_k$, которые порождают свободную подполугруппу в S. Ясно, что бесконечные унитреугольные матрицы $z_1 = \mathrm{diag}(x'_1, y_1), \ldots, z_k = \mathrm{diag}(x'_k, y_k)$ тоже порождают свободную полугруппу. Кроме того $z = (z_1, \ldots, z_k) \in B(x, n)$ что закончит доказательство. □

ГЛАВА IV
Применения

Эта глава посвящена применнении аналогов понятий введенных в предыдущих разделах к исследованию других "счетномерных"алгебраических структур, а именно группы автоморфизмов свободной группы счетного ранга, группы автоморфизмов корневого дерева счетной валентности, ассоциативной алгебры и алгебры Ли бесконечных матриц.

В § 17 рассматриваются подгруппы автоморфизмов свободной группы счетного ранга. В § 18 исследуются автоморфизмы корневого дерева счетной валентности. Вводятся два класса подгрупп связанных с ростами и описываются основные свойства этих подгрупп. В § 19, заключающем эту главу, описываются некоторые ассоциативные алгебры и алгебры Ли бесконечных матриц связанные с ростами и приведены результаты о порождении стрингами.

§ 17. Автоморфизмы свободной группы счетного ранга

В этом параграфе мы исследуем трудную проблему классификации автоморфизмов свободной группы счетного ранга. Мы описываем рациональную систему порождающих. Мы строим новые типа подгрупп и даем структурные результаты для них. Главный результат параграфа говорит, что группа всех автоморфизмов порождается (по модулю IA-автоморфизмов) стрингами и нижними треугольными автоморфизмами. Результаты параграфа опубликованы в работе автора [91].

Группа автоморфизмов свободной группы конечного ранга была исследована во многих работах. Я. Нильсен в [141] получил ее представление используя элементарные автоморфизмы называемые теперь автоморфизмами Нильсена. По сравнении с конечным случаем группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} F_\infty$ свободной группы счетного ранга исследована слабо. Проблема классификации ее подгрупп очень трудная. Известны только некоторые ее естественные подгруппы и изолированные результаты. Группа $\operatorname{Aut} F_\infty$ огромная, так как она содержит как подгруппу группу $\operatorname{Sym}(\mathbb{N})$ всех перестановок натуральных чисел. С другой стороны известно [77], что $\operatorname{Sym}(\mathbb{N})$ содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$, мы получаем еще одну огромную подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$.

Решетка подгрупп группы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ тоже исследована слабо. Известны естественные подгруппы содержащие внутренние, финитарные, ограниченные, триангулярные, подстановочные и диагональные автоморфизмы.

В этом параграфе мы строим новые подгруппы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ и описываем некоторые их свойства. Стандартное понятие ограниченности автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_\infty$ состоит в существовании верхней грани n на длину всех редуцированных слов вида $\alpha(x_i)$ и $\alpha^{-1}(x_i)$. Мы рассматриваем ограниченность с совсем другой точки зрения. Мы требуем только, чтобы каждый x_j появляющийся в $\alpha(x_i)$ находился вблизи x_i, в смысле, что $|i-j|$ не очень великое. Отметим, что сумма экспонент порождающей x_j в $\alpha(x_i)$ может быть произвольной. Это очень различается от понятия ограниченности введенного в [69]. Мы вводим понятие стринга, которое реализует наше понятие ограниченности. Стринги являются аналогами бесконечных блочно-диагональных матриц с конечными блоками на главной диагонали. Специальный вид стрингов в группе верхнетреугольных автоморфизмов исследовался в [69]. Множество всех конечных произведений стрингов $\mathcal{H}$ является группой, называемой группой стрингов. Она играет важную роль в дальнейшем. Мы доказываем, что $\mathcal{H}$ содержит группу порожденную подстановочными и верхнетреугольными автоморфизмами и изучаем некоторые параболические подгруппы $\mathcal{H}$. Мы описываем тоже большую решетку подгрупп $\mathcal{H}$ связанных с ростами. Мы надеемся, что понятие стринга может быть полезным для получения частичного решения гипотезы Солитара о порождаемости группы ограниченных автоморфизмов (смотри также [127], [61]).

Главный результат параграфа говорит, что $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ порождается (по модулю IA-автоморфизмов) стрингами и нижнетреугольными матрицами. В последней части параграфа получаются аналоги этих результатов для некоторых других многообразий.

Приведем сначала основные определения. Пусть F_∞ – свободная группа счетного ранга со свободными порождающими $X = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ и пусть $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ – ее группа автоморфизмов. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_\infty$. Мы говорим, что автоморфизм α является

верхним треугольным если $\alpha(x_i) \in \langle x_{i+k} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$ для всех $i \in \mathbb{N}$;

нижним треугольным если $\alpha(x_1) = x_1^{\pm 1}$ и $\alpha(x_i) \in \langle x_1, \ldots, x_i\rangle$ для всех $i > 1$;

диагональным если $\alpha(x_i) = x_i^{\epsilon_i}$ для $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ и всех $i \in \mathbb{N}$;

подстановочным автоморфизмом если $\alpha(x_i) = x_{\pi(i)}$ для некоторой подстановки π натуральных чисел;

конечно столбцовым автоморфизмом если x_i для всех $i \in \mathbb{N}$ появляется только в конечном числе редуцированных слов $\alpha(x_j)$, $j \in \mathbb{N}$.

Следующий результат Р. Коэна характеризует верхние и нижние треугольные автоморфизмы.

Лемма 15. ([69], теорема 2.4) Если автоморфизм α верхнетреугольный, то для любого $i = 1, 2 \ldots$ функция $\alpha|_{\langle x_i, x_{i+1}, \ldots\rangle}$ является автоморфизмом группы $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots\rangle$ and $\alpha(x_i) = A_i x_i^{\epsilon_i} B_i$, где $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ и $A_i, B_i \in \langle x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots\rangle$.

Лемма 16. ([69], следствие 2.3) Если автоморфизм α нижнетреугольный, то для любого $i = 1, 2 \ldots$ $\alpha(x_i) = A_i x_i^{\epsilon_i} B_i$, где $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, $A_1 = B_1 = 1$ и для $i > 1$ мы имеем $A_i, B_i \in \langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle$.

Мы говорим, что автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut} F_\infty$ является *n-ограниченным* если слова $\alpha(x_i)$ и $\alpha^{-1}(x_i)$ для всех i имеют длину не больше n и α является *ограниченным* если α n-ограничен для некоторого n. Пусть $\mathcal{B}_n$ обозначает множество всех n-ограниченных автоморфизмов и пусть $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Ясно, что $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$ для всех n.

Пусть $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ обозначает множество всех верхних треугольных, нижних треугольных, диагональных и подстановочных автоморфизмов соответсвенно и пусть $\mathcal{K}$ – множество всех автоморфизмов α таких, что α и α^{-1} являются конечно столбцовыми. Ясно, что $\mathcal{D}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_1$, $\mathcal{T}^+ \cap \mathcal{T}^- = \mathcal{D}$ и пересечения $\mathcal{T}^+ \cap \mathcal{S}$ и $\mathcal{T}^- \cap \mathcal{S}$ тривиальные. Мы не будем тщательно различать подстановочный автоморфизм и подстановку натуральных чисел.

Следующий результат описывает естественные подгруппы группы $\operatorname{Aut} F_\infty$.

Предложение 37. Множества $\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-, \mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{K}$ и $\mathcal{B}$ являются пожгруппами группы $\operatorname{Aut} F_\infty$.

Доказательство: Для $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ это очевидно. Так как $\mathcal{K}$ и $\mathcal{B}$ замкнуты относительно сложения, они являются подгруппами $\operatorname{Aut} F_\infty$. Результат для $\mathcal{T}^+$ и $\mathcal{T}^-$ следует из леммы 1 и 2. □

Отметим, что $\mathcal{B}$ называется группой ограниченных автоморфизмов. По аналогии с бесконечными матрицами $\mathcal{K}$ называем группой конечно столбцовых автоморфизмов.

Группа $\mathcal{S}$ содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$ [77]. С другой стороны, для $\mathcal{T}^+$ мы можем доказать следующий результат

Предложение 38. Группа $\mathcal{T}^+$ содержит свободную подгруппу счетного ранга.

Доказательство: Пусть α_1, α_2 два автоморфизма группы F_∞ определенные следующим образом: для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_1(x_{2k-1}) = x_{2k-1}x_{2k}, \quad \alpha_1(x_{2k}) = x_{2k}$$

$$\alpha_2(x_{2k-1}) = x_{2k-1}, \quad \alpha_2(x_{2k}) = x_{2k}x_{2k+1}.$$

Пусть A_∞ будет свободной абелевой группой счетного ранга и пусть $\chi : \operatorname{Aut} F_\infty \to \operatorname{Aut} A_\infty$ гомоморфизм индуцированный естественным отображением $\bar{\chi} : F_\infty \to A_\infty$. Так как $\operatorname{Aut} A_\infty$ изоморфна группе $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z})$ – группе обратимых конечно строковых матриц над $\mathbb{Z}$ – мы можем отождествить $\chi(f)$ с соответсвующей матрицей из $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z})$. В [103] доказано, что матрицы $\chi(\alpha_1)$, $\chi(\alpha_2)$ порождают свободную подгруппу ранга два в $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z})$. Это значит, что $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ тоже свободная группа ранга два содержащаясь в $\mathcal{T}^+ \cap \mathcal{B}$. Ее коммутант и является искомой свободной группой счетного ранга. □

Теперь дадим определение основного объекта наших исследований

Определение 11. Пусть α автоморфизм F_∞ следующего типа:

(1) существует разбиение $\{X_j | j \in \mathbb{N}\}$ множества попрождающих $\{x_1, x_2, \ldots\}$ такое, что $X_1 = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ и для всех $j > 1$ мы имеем $X_j = \{x_{n_j+1}, \ldots, x_{n_{j+1}}\}$ где $n_1 < n_2 < \ldots$ является строго растущей последовательностью натуральных чисел;

(2) для любого k такого, что $n_j + 1 \leq k \leq n_{j+1}$ мы имеем $\alpha(x_k) \in \langle x_{n_j+1}, \ldots, x_{n_{j+1}} \rangle$.

Автоморфизм удовлетворяющий условиям (1) и (2) называем стрингом.

Отметим, что если α является стрингом, мы имеем разложение $F_\infty = \prod^*_{j \in \mathbb{N}} \langle X_j \rangle$, где * обозначает свободное произведение, и определяем автоморфизм α_j как действующий как α на $\langle X_j \rangle$ (значит $\alpha_j = \alpha|_{\langle X_j \rangle}$ на $\langle X_j \rangle$) и действующий тривиально в остальных случаях. Теперь α является произведением $\alpha = \prod_{j=1}^\infty \alpha_j$, так как все α_j коммутируют и только конечное число из них действует нетривиально на одном конкретном слове из F_∞.

Если α стринг и $\alpha = \prod \alpha_j$, то α^{-1} тоже стринг (так как $\alpha^{-1} = \prod \alpha_j^{-1}$). С другой стороны, сложение двух стрингов вообще не объязано быть стрингом, как показывает следующий пример.

Пусть α_1 и α_2 автоморфизмы из доказательства теоремы 1. Тогда α_1, α_2 стринги, но $\alpha_2 \circ \alpha_1$ не является стрингом, так как $\alpha_2 \circ \alpha_1(x_{2k-1}) = x_{2k-1}x_{2k}$ и $\alpha_2 \circ \alpha_1(x_{2k}) = x_{2k}x_{2k+1}x_{2k+2}$ для всех k.

Пусть $\beta(x_1) = x_1$, $\beta(x_k) = x_1 \cdot x_k$ для всех $k > 1$. Ясно, что β автоморфизм из $\mathcal{T}^- \cap \mathcal{B}$ и $\beta \notin \mathcal{H}$.

Отметим, что в работе [69] Р. Коэн называет стринги из $\mathcal{T}^+$ сплетающими автоморфизмами.

Пусть $\mathcal{H}$ множество всех конечных произведений стрингов (как правило для, в общем, разных разбиений множества порождающих). Следующий факт очевиден, мы его отметим как предложение

Предложение 39. Множество $\mathcal{H}$ является подгруппой группы $\operatorname{Aut} F_\infty$.

Группа $\mathcal{H}$, которую будем называть группой стрингов, имеет важное значение в последующих рассуждениях.

Пусть $\beta(x_1) = x_1$, $\beta(x_k) = x_1 \cdot x_k$ для всех $k > 1$. Ясно, что β автоморфизм из $\mathcal{T}^- \cap \mathcal{B}$ и $\beta \notin \mathcal{H}$.

Теперь мы исследуем структуру подгрупп группы стрингов $\mathcal{H}$.

Предложение 40. Группа стрингов $\mathcal{H}$ содержит подгруппу порожденную всеми верхними треугольными и подстановочными автоморфизмами, т. е. $\mathcal{H} \supseteq \langle \mathcal{T}^+, \mathcal{S} \rangle$.

Доказательство: Включение $\mathcal{T}^+ \subseteq \mathcal{H}$ следует из теоремы 3.3 из [69]. Из леммы 2.3 [166] (смотри тоже [155]) следует, что $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, что требовалось доказать. □

Кажется, что на самом деле мы имеем равенство $\mathcal{H} = \langle \mathcal{T}^+, \mathcal{S} \rangle$, но ни доказательства ни контрпримера мы знаем.

Этот результат о структуре $\mathcal{H}$ можно использовать для описания некоторых подгрупп. Мы говорим, что подгруппа G группы $\mathcal{H}$ *параболическая* если она содержит $\mathcal{T}^+$. Ясно, что описание параболических подгрупп группы $\mathcal{H}$ тесно связано с подгрупповой структурой симметрической группы $\operatorname{Sym}(\mathbb{N})$. более того, для любой подгруппы S_1 группы $\mathcal{S}$ подгруппа $\langle \mathcal{T}^+, S_1 \rangle$ параболическая. Если S_2 собственная подгруппа в S_1, то $\langle S_2, \mathcal{T}^+ \rangle$ тоже собственная подгруппа в $\langle S_1, \mathcal{T}^+ \rangle$. Кажется, что можно найти минимальные параболические подгруппы исходя из таких соображений.

Напомним, что подгруппы A, B называются сравнимыми, если $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$ и несравнимыми в противном случае. Из известных свойств подгрупп группы $S(\mathbb{N})$ получаем следующую

Предложение 41. Существует несчетное семейство попарно несравнимых параболических подгрупп в $\mathcal{H}$. Другими словами, решетка параболических подгрупп группы $\mathcal{H}$ содержит несчетные цепи.

Доказательство: Напомним сначала классический результат В. Серпинского с 1928 года [159]. Подмножество Γ бесконечного множества Δ называется a moiety если $|\Gamma| = |\Delta \setminus \Gamma|$. Пусть $\Delta = \mathbb{Q}$. Для любого вещественногочисла r мы берем какую нибудь бесконечную последовательность Γ_r разных рациональных чисел, которая страмится к r. Толгда семейство $\{\Gamma_r : r \in \mathbb{R}\}$ несчетно и для любых двух множеств Γ, Γ' из этого семейства пересечение $\Gamma \cap \Gamma'$ конечно.

Теперь, пусть $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ произвольная биекция и пусть $\bar{\Gamma}_r := \phi(\Gamma_r)$. Обозначим через $S(\bar{\Gamma}_r)$ поточечный стабилизатор множества $\mathbb{N} \setminus \bar{\Gamma}_r$ в $S(\mathbb{N})$. Легко видеть, что семейство $\{\langle S(\bar{\Gamma}_r), \mathcal{T}^+\rangle : r \in \mathbb{R}\}$ содержит попарно несравнимые параболические подгруппы. □

Для описания другово семейства подгрупп $\mathcal{H}$ используем понятие роста из параграфа 4.

Теперь определим подгруппы $\mathcal{H}$ связанные с ростами. Пусть α стринг соответсвующий последовательности $n_1 < n_2 < \ldots$. Мы говорим, что α ограничен функцией f из ω если $f(1) \geq n_1$ и для всех натуральных k мы имеем $f(n_k+1) \geq n_{k+1}$. Мы говорим, что автоморфизм β из $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ ограничен функцией $f \in \omega$ (или β - $[f]$-ограничен) если для всех натуральных n существует $k = k(n)$ зависящее от n только такое, что $\beta(x_n)$ и $\beta^{-1}(x_n)$ редуцированные слова в порождающих $x_{n-k(n)}, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k(n)}$ и $f(n) \geq n + k(n)$.

Легко видеть, что если α $[f]$-ограничен и β $[g]$-ограничен, то $\alpha \circ \beta$ является $[f \circ g]$-ограниченным. Поэтому следующее определение имеет смысл.

Определение 12. Символм $\mathcal{H}(\omega)$ обозначим множество всех автоморфизмов α из $\mathcal{H}$ таких, что они $[f]$-ограничены для некоторых $f \in \omega$.

На самом деле $\mathcal{H}(\omega)$ является подгруппой группы $\mathcal{H}$. Мы имеем

Предложение 42. Семейство $\{\mathcal{H}(\omega) \mid \omega \in \Omega^*\}$ составляет подрешетку решетки подгрупп группы $\mathcal{H}$. Более того, она изоморфна решетке Ω^*.

В частности, решетка $\{\mathcal{H}(\omega) \mid \omega \in \Omega^*\}$ имеет все свойства, которые мы доказали в теореме 1.

Сейчас мы дадим описание группы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ и некоторых ее нормальных подгрупп. Пусть $A_\infty \cong F_\infty / F'_\infty$ свободная абелева группа счетного ранга и пусть $\chi : \mathrm{Aut}\, F_\infty \to \mathrm{Aut}\, A_\infty$ гомоморфизм индуцирован естественным отображением $\bar{\chi} : F_\infty \to A_\infty$. Ядро $\mathcal{A}$ отображения χ состоит из IA-автоморфизмов группы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$. Как показано в [68] и [127], χ эпиморфизм. Мы используем известный изоморфизм группы $\mathrm{Aut}\, A_\infty$ и $\mathrm{GL}_r(\infty, \mathbb{Z})$. Мы не будем различать $\chi(f)$ и соответсвующую ей матрицу из $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z})$.

Теперь можем описать совсем хорошее множество порождающих для $\mathrm{Aut}\, F_\infty$.

Теорема 25. Любой автоморфизм из $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ является сложением некоторого IA-автоморфизма и автоморфизма из подгрушы порожденной нижними треугольными и конечно столбцовыми автоморфизмами, т. е. $\mathrm{Aut}\, F_\infty = \langle \mathcal{T}^-, \mathcal{K}\rangle \cdot \mathcal{A}$.

Доказательство: Мы сначала докажем, что $\mathrm{Aut}\, A_\infty = \langle \chi(\mathcal{T}^-), \chi(\mathcal{K})\rangle$. Пусть $A \in \mathrm{GL}_r(\infty, \mathbb{Z})$. Это значит, что в каждой строке матрицы A находится только конечное число ненулевых элементов. Так как $\mathbb{Z}$ является кольцом главных идеалов, из обратимости A следует, что идеал порожденный элементами любой строки A равен $\mathbb{Z}$. Это значит, что существует элементарная финитная матрица B_1 такая, что произведение $A \cdot B_1$ имеет только один ненулевой элемент в первой строке. Аналогично, существует элементарная финитная матрица B_2 такая, что произведение $A \cdot B_1 \cdot B_2$ имеет только один ненулевой элемент во второй строке, который расположен под нулем в первой строке. Продолжая эту процедуру мы получим бесконечное произведение $A \cdot (\prod_{i=1}^{\infty} B_i)$. Это произведение хорошо определено [72] так как для любого натурального k и любого натурального $n \geq k$ в каждом конечном произведении $A \cdot B_1 \cdots B_n$ первые k столбцы одинаковые и они не изменяются в произведении $A \cdot B_1 \cdots B_n$.

Это значит, что матрица $A \cdot (\prod_{i=1}^{\infty} B_i)$ и может быть преобразованная умножением на подходящуюся перестановку в нижне треугольную матрицу T, более точно: $A \cdot (\prod_{i=1}^{\infty} B_i) \cdot P = T$. Так как $(\prod_{i=1}^{\infty} B_i)^{-1} = \prod_{i=1}^{\infty} B_i^{-1}$, то $A = T \cdot P^t \cdot (\prod_{i=1}^{\infty} B_i^{-1})$. Кроме того, из конструкции следует, что $\prod_{i=1}^{\infty} B_i^{-1} \in \chi(\mathcal{K})$ и $P^t \in \chi(\mathcal{H})$, тем самым $\mathrm{Aut}\, A_\infty = \langle \chi(\mathcal{T}^-), \chi(\mathcal{K})\rangle$. Но так как $\mathcal{A}$ является ядром отображения χ, отсюда, ввиду свойств прообраза автоморфизма χ, получаем нашу теорему. $\square$

На самом деле, из доказательства следует следующая интересная

Предложение 43. Группа $\mathrm{GL}_r(\infty, \mathbb{Z})$ порождается множеством всех нижне треугольных матриц и стрингов.

Интересным является вопрос о обобщении результатов и методов работ [100] – [103] на случай группы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$.

Отметим, что теорему 43 можно доказать и следующим образом: Суон доказал (смотри [68]), что группа $\mathrm{Aut}\, A_\infty$ порождается треугольными автоморфизмами, более точно точно, треугольными по отношению к базисам состоящим из одного фиксированного множества, но возможно по разному упорядоченным. Так как любое упорядочение соответсвует подстановочному автоморфизму, который является произведением стрингов [155], получаем нашу теорему.

Символом $InnF_\infty$ обозначим подгруппу всех внутренних автоморфизмов группы F_∞.

Предложение 44. a) Группа $\mathcal{K}$ содержит $\mathcal{H}$;

b) Группа $\langle \mathcal{T}^-, \mathcal{H}\rangle$ содержит $InnF_\infty$.

Доказательство: a) Индукцией по числу стрингов можем доказать, что в любом конечном произведении стрингов α любая порождающая x_i может появится только в конечном числе слов $\alpha(x_j)$. Кроме того, любой стринг принадлежит $\mathcal{K}$, и поэтому $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$.

b) Пусть $\alpha \in InnF_\infty$. Тогда для некоторого $g \in \operatorname{Aut} F_\infty$ мы имеем $\alpha(x) = g^{-1}xg$. Пусть n минимальное число такое, что $g \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Мы определяем два автоморфизма:

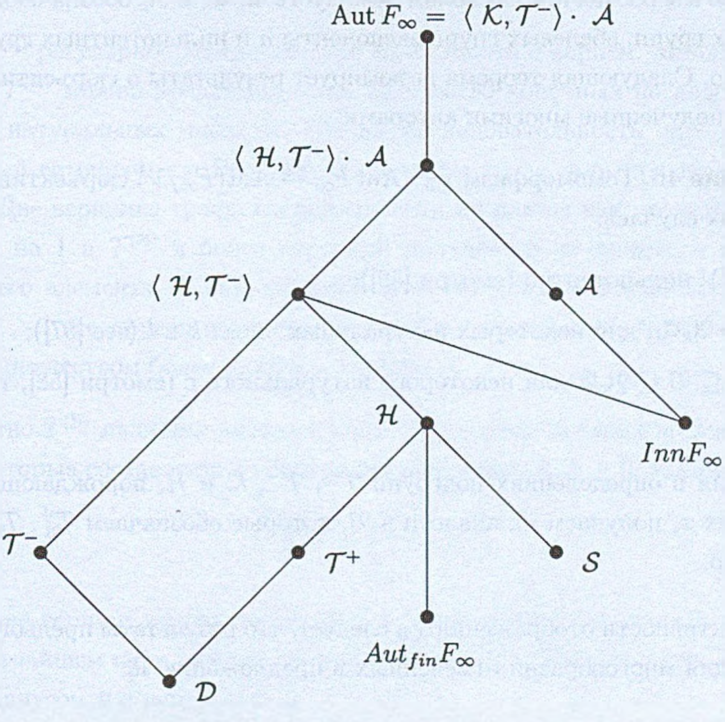
$\alpha_1(x_1) = g^{-1}x_1g, \ldots, \alpha_1(x_n) = g^{-1}x_ng$, $\alpha_1(x_k) = x_k$ для всех $k > n$,

$\alpha_2(x_1) = x_1, \ldots, \alpha_2(x_n) = x_n$, $\alpha_2(x_k) = g^{-1}x_kg$ для всех $k > n$.

Ясно, что $\alpha_1 \in \mathcal{H}$, $\alpha_2 \in \mathcal{T}^-$ и $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2$, откуда следует наше предложение. Отметим, что $\alpha \neq \alpha_2 \circ \alpha_1$.□

Пусть $\alpha_3(x_1) = x_1$, $\alpha_3(x_2) = x_2$ и для всех $i > 2$ пусть $\alpha_3(x_i) = [x_1, x_2]x_i$. Можна проверить, что отображение α_3 является IA-автоморфизмом, который не принадлежит $\mathcal{K}$.

Ниже мы показываем диаграмму включений дла подгрупп $\operatorname{Aut} F_\infty$ рассматриваемых в этом параграфе.



Из свойств эпиморфизма χ и результатов [60] и [83] вытекает описание некоторых нормальных подгрупп группы $\operatorname{Aut} F_\infty$.

Предложение 45. Группа $\operatorname{Aut} F_\infty$ содержит два счетные семейства подгрупп: одну состоящую из максимальных нормальных подгрупп и вторую, содержащую нормальные несравнимые подгруппы.

Доказательство: Так как отображение χ является эпиморфизмом, прообразы максимальных и нормальных подгрупп группы $\operatorname{Aut} A_\infty$ при отображении χ являются максимальными и нормальными подгруппами группы $\operatorname{Aut} F_\infty$. Теперь, первая часть теоремы вытекает из следствия 0.7 работы [60], а вторая из [83] (смотри теорему 7.3 и рассуждения после ее доказательства).□

Теперь мы рассмотрим некоторые относительно свободные группы. Пусть $\mathfrak{V}$ многообразие групп и пусть $\mathcal{V}$ соответсвующая ей вербальная подгруппа, а $F_\infty/\mathcal{V}$ относительно свободная группа многообразия $\mathfrak{V}$ счетного ранга со свободными порождающими $y_1, y_2, \ldots$ [140]. Естественный гомоморфизм $F_\infty \to F_\infty/\mathcal{V}$ индуцирует гомоморфизм

$$\chi_{\mathfrak{V}} : \operatorname{Aut} F_\infty \to \operatorname{Aut}(F_\infty/\mathcal{V}),$$

которого ядро мы обозначим символом $\mathcal{A}_{\mathfrak{V}}$. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{N}_c$ обозначают многообразия: абелевых групп, абелевых групп экспоненты n и нильпотентных групп класса c, соответсвенно. Следующая теорема резюмирует результаты о сюръективности отображения $\chi_{\mathfrak{V}}$ полученные многими авторами:

Предложение 46. Гомоморфизм $\chi_{\mathfrak{V}} : \operatorname{Aut} F_\infty \to \operatorname{Aut}(F_\infty/\mathcal{V})$ сюръективен в каждом из следующих случаев:

(1) $F_\infty/\mathcal{V}$ нильпотентно (смотри [59]);

(2) $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$, для некоторых натуральных чисел k и l (see [57]);

(3) $\mathfrak{A}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ для некоторого натурального c (смотри [58], теорема 2).

Подставляя в определениях подгрупп $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{H}$, порождающие y_i вместо порождающих x_i получаем их аналоги в $\mathfrak{V}$, которые обозначаем $\mathcal{T}_{\mathfrak{V}}^+$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{V}}^-$, $\mathcal{K}_{\mathfrak{V}}$ и $\mathcal{H}_{\mathfrak{V}}$, соответсвенно.

Из сюръективности отображения $\chi_{\mathfrak{V}}$ следует, что результаты предыдущих секций верны тоже для многообразий отмеченных в предложении 46.

Предложение 47. Если $\mathfrak{V}$ любое многообразие из предложения 46, то

a) $\mathcal{H}^b_{\mathfrak{V}} \supseteq \langle \mathcal{T}^+_{\mathfrak{V}}, \mathcal{S} \rangle$;

b) $\mathrm{Aut}(F_\infty/\mathcal{V}) = \langle \mathcal{T}^-_{\mathfrak{V}}, \mathcal{K}_{\mathfrak{V}} \rangle \cdot \mathcal{A}_{\mathfrak{V}}$;

c) Группа $\mathcal{K}_{\mathfrak{V}}$ содержит $\mathcal{H}_{\mathfrak{V}}$;

d) Группа $\langle \mathcal{T}^-_{\mathfrak{V}}, \mathcal{H}_{\mathfrak{V}} \rangle$ содержит $Inn(F_\infty/\mathcal{V})$.

§ 18. Автоморфизмы корневого дерева счетной валентности

Класс групп автоморфизмов локално конечных корневых деревьев в последнее время привлекл внимание многих математиков. Этот класс содержит важные контрпримеры к неограниченной проблеме Бернсайда [1] и контрпримеры к проблеме Милнора [16] о подгруппах промежуточного роста. С другой стороны, их естественное обобщение, группа автоморфизмов корневого дерева счетной валентности, исследована слабо [163], [138]. В данном параграфе мы исследуем подгруппы этой группы. Описываем два семейства подгрупп выделенные ростами (классами натуральнозначных функций над $\mathbb{N}$). Приводим основные свойства этих подгрупп. Результаты этого параграфа опубликованы в работе автора [14].

Пусть $\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ регулярное дерево счетной валентности с корнем. Множество вершин $T^{(\mathbb{N})}$ графа $\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ можно представить как множество конечных последовательностей (кортежей) натуральных чисел $\mathbb{N}$. Пустая последовательность определяет корень обозначаемый символом $x_\emptyset$. Вершину обозначаем $x_{i_1,\ldots,i_k}$ или при помощи кортежа $(i_1,\ldots,i_k)$. Две вершины графа соединены если их длины как последовательностей отличаются на 1 в $\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ и более короткий получается из длинного вычеркиванием последнего элемента. Таким образом $x_\emptyset$ имеет счетное количество соседов вида $x_1, x_2, x_3, \ldots$, все другие вершины соединены с одной вершиной более короткой и счетным множеством более длинных вершин.

Множество $T^{(\mathbb{N})}$ является дизъюнктным объединением своих подмножеств уровней $L(k)$, которые составлены из всех кортежей длины k, $k \geq 0$, таким образом

$$T^{(\mathbb{N})} = \coprod_{k=0}^{\infty} L(k).$$

На множестве вершин можно определить комбинаторное расстояние, равное числу ребер в кратчайшем пути, соединяющем две вершины. Тогда уровень $L(k)$ является сферой с радиусом k и центром в $x_\emptyset$.

Говорим, что вершина y лежит ниже вершины x, если путь соединяющий y с корнем проходит через x. Для любой вершины $x \in T^{(\mathbb{N})}$, символом $\mathcal{T}_x^{(\mathbb{N})}$ обозначим поддерево дерева $\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ растянутое на всех вершнах начинающихся с x. Оио состоит из всех вершин лежащих ниже x. Имеем канонический изоморфизм

$$\delta_x : \mathcal{T}^{(\mathbb{N})} \to \mathcal{T}_x^{(\mathbb{N})},$$

который переводит вершину y в вершину xy полученную конкатенацией последовательностей x и y.

Автоморфизмом корневого дерева называется перестановка множества вершин, оставляющая на месте корень и сохраняющая отношение инцидентности вершин. Это значит, что любой автоморфизм τ дерева $\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ оставляет на месте корень $x_\emptyset$ и определяет перестановку поддеревьев $\mathcal{T}_1^{(\mathbb{N})}, \mathcal{T}_2^{(\mathbb{N})}, \mathcal{T}_3^{(\mathbb{N})}, \ldots$ На самом деле, для любого $x \in L(k)$, $k \geq 1$, автоморфизм τ определяет тоже перестановку τ_x, всех поддеревьев $\mathcal{T}_{xi}^{(\mathbb{N})}$, где $i \in \mathbb{N}$. Если вершине x отвечает кортеж $(i_1, \ldots, i_k)$, то её образу $\tau(x)$ под действием автоморфизма τ отвечает кортеж $\tau((i_1, \ldots, i_k)) = (\tau_\emptyset(i_1), \tau_{i_1}(i_2), \ldots, \tau_{i_1 \ldots i_{k-1}}(i_k))$. Для сложения двух автоморфизмов получаем формулу

$$(\sigma \circ \tau)((i_1, \ldots, i_k)) = \sigma(\tau((i_1, \ldots, i_k))).$$

Символом $G = Aut(\mathcal{T}^{(\mathbb{N})})$ обозначим группу всех автоморфизмов дерева $\mathcal{T}(\mathbb{N})$. Стабилизатором вершины x называется подгруппа $St_G(x) = \{g \in G : g(x) = x\}$. Стабилизатором k-того уровня $St_G(k)$, называется пересечение всех стабилизаторов вершин этого уровня. Элементарные свойства стабилизаторов описывает следующий, очевидный результат [17].

Предложение 48. Стабилизатор уровня $St_G(k)$ – нормальная подгруппа в G. Пересечение $\bigcap_{n=0}^{\infty} St(n)$ – тривиальная группа.

Теперь мы определим два семейства автоморфизмов корневого дерева счетной валентности связанные с ростами натуральнозначных функций описанными в параграфе 4.

А. *Автоморфизмы конечного типа.*

Мы говорим, что функция f является fin–ограниченнем для автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$, если $\tau_\emptyset(n) = \tau_\emptyset^{-1}(n) = n$ для всех $n > f(1)$, и $\tau_{i_1,\ldots,i_k}(n) = \tau_{i_1,\ldots,i_k}^{-1}(n) = n$ для всех $n > f(k+1)$. Если носитель подстановки $\tau_{i_1,\ldots,i_k}$ бесконечен, говорим, что подстановка $\tau_{i_1,\ldots,i_k}$ ограничена через $f(k+1) = \infty$.

Если автоморфизмы σ и τ являются fin–ограничеными функциями f, g такими, что $f(n) + n, g(n) + n \in \omega$, то сложение $\sigma \circ \tau$ является автоморфизмом тоже fin–ограниченным через некоторую функцию h такую, что $h(n) + n \in \omega$. Таким образом, для любого роста ω мы можем определить подгруппу в группе $\operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ следующим образом. Обозначим через $G_{fin}(\omega)$, множество всех $\tau \in \operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$, таких, что все подстановки τ_x $fin-$ограничены некоторыми функциями $f, f(n)+n \in \omega$. Легко видеть, что это в действительности подгруппа группы всех автоморфизмов дерева. Очевидно, что $\operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(\mathbb{N})} = G_{fin}(\omega_\infty)$. Кроме того, наименьшая подгруппа определённая ростом $G_{fin}(\omega_0)$ содержит подгруппы изоморфные группам автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(d)}$ корневых d-арных деревьев (локально конечных) для всех $d \geq 2$. На самом деле, имеется равенство

$$\cup_{d=2}^{\infty} \operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(d)} = G_{fin}(\omega_0)$$

Из рассуждений работы [13] вытекает следующий результат.

Предложение 49. Решетка подгрупп $\{G_{fin}(\omega)\}_{\omega\in\Omega^*}$ изоморфна решетке ростов Ω^*.

Ясно, что любая подгруппа G оставляет сферы (уровни) дерева инвариантными и вся группа G сферически транзитивна, т. е. действует транзитивно на сферах. На самом деле верен более общий результат.

Предложение 50. Для любого роста ω группа $G_{fin}(\omega)$ сферически транзитивна.

Доказательство. На самом деле, достаточно доказать предложение для группы $G_{fin}(\omega_0)$. Ввиду равенства $G_{fin}(\omega_0) = \cup_{d=2}^{\infty} \operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(d)}$, для любых двух вершин $x, y \in L(k)$, где $x = (i_1, \ldots, i_k), y = (j_1, \ldots, j_k)$, автоморфизм α такой, что $\alpha(x) = y$ можно найти уже в подгруппе $\operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(d)}$, где d являлется максимальным из чисел $i_1, \ldots, i_k$, $j_1, \ldots, j_k$. $\square$

Мы говорим, что автоморфизм τ является элементарной инволюцией, если для всех $x \in T^{(\mathbb{N})}$ подстановка τ_x является элементарной инволюцией, т. е. в разложении на независимые циклы, все циклы имеют вид $(i, i+1)$.

Предложение 51. Группа $G_{fin}(\omega_0)$ порождается элементарными инволюциями.

Доказательство. Если τ принадлежит $G_{fin}(\omega_0)$, то существует натуральное число d такое, что любая подстановка $\tau_{i_1,\ldots,i_k}$ удовлетворяет условию: $\tau_{i_1,\ldots,i_k}(n) = n$ для всех $n > d$. Таким образом, можно её рассматривать как подстановку множества из d элементов, или элемент симметрической группы $S(d)$. Известно, что $S(d)$ имеет множество порождающих, которое составляют транспозиции $(1,2), (2,3), \ldots, (d-1, d)$, они являются элементарными инволюциями. Любой элемент из $S(d)$ является произведением не более чем $g(d)$ таких транспозиций, где $g(d)$ зависит только от числа d. Но тогда любой автоморфизм τ из $G_{fin}(\omega_0)$ является произведением не более чем $g(d)$ элементарных иволюций. $\square$

Б. *Автоморфизмы бесконечного типа.*

Мы говорим, что подстановка $\pi \in \mathbb{N}$ ограничена функцией $f \in \Omega_\infty$, если для всех чисел n мы имеем $\pi(n), \pi^{-1}(n) \leq f(n)$. Это определение ограниченности подстановки существенно отличается от fin–ограниченности. Ограниченная подстановка может иметь бесконечный носитель.

Мы говорим, что функция $f \in \Omega^*$ ограничивает автоморфизм $\tau \in \operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ если $\tau_\emptyset(n), \tau_\emptyset^{-1}(n) \leq f(n)$ для всех натуральных чисел n и

$$\tau_{i_1,\ldots,i_k}(n), \tau_{i_1,\ldots,i_k}^{-1}(n) \leq f(n)$$

для всех натуральных чисел n.

Ясно, что подстановка π ограничена функцией $f \in \omega_0$ тогда и только тогда, когда существует d такое, что для всех n мы имеем $|\pi(n) - n| \leq d$. Кроме того, если автоморфизмы σ и τ ограничены функциями $f, g \in \omega$ соответственно, то $\sigma \circ \tau$ ограничена некоторой функцией $h \in \omega$. Это позволяет нам определить для любого роста ω подгруппу группы $\operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ следующим образом

$$G(\omega) = \{\tau \in \operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})} : \tau \text{ ограничена некоторой } f \in \omega\}$$

Очевидно, что $\operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})} = G(\omega_\infty)$.

Предложение 52. Решетка подгрупп $\{G(\omega)\}_{\omega \in \Omega^*}$ изоморфна решетке ростов Ω^*.

Нас интересует группа $G(\omega_0)$.

Предложение 53. Группа $G(\omega_0)$ порождается всеми элементами τ такими, что τ_x является элементарной инволюцией для всех $x \in L(1)$.

Доказательство. Из теоремы 7 работы [13] следует, что любая подстановка $\alpha \in \operatorname{Sym}(\mathbb{N})$ является стрингом s или проиведением двух стрингов $s_1 \cdot s_2$. Кроме того, если $\alpha \in S(\omega)$, то $s, s_1, s_2 \in S(\omega)$. Напомним, что подстановка называется стрингом, если в естественном матричном представлении она является блочно-диагональной матрицей с конечными блоками на диагонали. Предположим, что $\alpha \in S(\omega_0)$. Тогда размеры всех блоков стринга s (или стрингов s_1, s_2) ограничены числом d. Теперь рассуждая аналогично, как в доказательстве предложения 51 получаем требуемый результат. □

Предложение 54. Для любого роста ω группа $G(\omega)$ имеет тривиальный центр и любой её автоморфизм является внутренним.

Доказательство. Пусть g нетривиальный элемент из $G(\omega)$. Тогда существует $x \in T^{\mathbb{N}}$ такой, что $g(x) \neq x$. Но тогда можем найти h из $St(x)$ такой, что $h(g(x)) \neq g(x)$. Тогда $h \circ g(x) \neq g(x) = g \circ h(x)$, это показывает, что центр тривиален.

Пусть $\phi \in Aut(G(\omega))$. Тогда существует k такое, что ϕ стабилизирует уровни $L(1), L(2), \ldots, L(k)$ и не стабилизирует уровня $L(k+1)$. Это значит, что для всех $x \in L(k)$ имеем $\phi(x) = x$, и существует $y \in L(k+1)$ такой, что $\phi(y) \neq y$. Пусть x_0 предшествует вершине y, а $\{y_1, y_2, \ldots\}$ все следующие вершины за вершиной x_0 в дереве (на $k+1$-том уровне). Так как группа $St(x_0)$ транзитивно действует на множестве вершин $y_1, y_2, \ldots$, отображение ϕ переводит стабилизатор $St(y_i)$ в некоторый стабилизатор $St(y_j)$. Обозначим через $\bar{\phi}$ отображение множества вершин $\{y_1, y_2, \ldots\}$ в себя заданное условием $\bar{\phi}(y_i) = y_j$ если $\phi(St(y_i)) = St(y_j)$. Отображение $\bar{\phi}$ является автоморфизмом, так как оно является подстановкой соответсвующих поддеревьев. Из сферической транзитивности $G(\omega)$ следует, что для любого $\alpha \in G(\omega)$ и $x \in T^{\mathbb{N}}$, мы имеем $\alpha St(x)\alpha^{-1} = St(\alpha(x))$. Это значит, что для $y \in \{y_1, y_2, \ldots\}$ мы имеем $\phi(St(\alpha(y))) = St(\bar{\phi}(\alpha(y)))$. С другой стороны $\phi(\alpha St(y)\alpha^{-1} = \phi(\alpha)\phi(St(y))\phi(\alpha^{-1}) = St(\phi(\alpha)\bar{\phi}(y))$. Отсюда следует, что $\phi(\alpha) = \bar{\phi}\alpha\bar{\phi}^{-1}$. □

§ 19. Применения к алгебрам

Результаты настоящего параграфа опубликоны в [12], [14]. В настоящем параграфе мы будем рассматривать только коммутативные кольца R.

Бесконечная $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ матрица a называется строго верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \geq j$. Множество всех строго верхнетреугольных матриц $\mathcal{UT}(\infty, R)$ является ассоциативной $R-$алгеброй с обычным сложением и умножением. Пусть $\mathcal{UT}_r(\infty, R)$ обозначает ее подалгебру конечно-строчных матриц. Аналогично случаю группы вводим понятие стринга.

Говорим, что $a \in \mathcal{UT}(\infty, R)$ является *стринг-матрицей*, или просто *стрингом* если существует бесконечная последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел такая, что $a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{UT}(n_i, R)$. Значит, a является обычной блочно-диагональной верхнетреугольной матрицей с нулями на главной диагонали.

Предложение 55. Алгебра $\mathcal{UT}_r(\infty, R)$ порождается стрингами.

Доказательство. Если $a \in \mathcal{UT}_r(\infty, R)$, то $e + a \in \mathrm{UT}_r(\infty, R)$. По предложению мы можем представить $e+a$ как произведение двух стрингов $e+a = (e+b)(e+c)$. Отсюда $a = b + c + bc$, где b, c – стринги, и $\mathcal{UT}(\infty, R)$ порождается как алгебра стрингами.□

Если a квазидиагональна, то $a = b + c + bc$, где b, c – тоже квазидиагональные стринги. Любой квазидиагональный стринг нильпотентен, отсюда получаем такое утверждение.

Предложение 56. Алгебра $\mathcal{UT}_b(\infty, R)$ порождается нильпотентными элементами.

Ясно, что в алгебре $\mathcal{UT}(\infty, R)$, тоже можно определить подалгебры $\mathcal{UT}(\omega)$ связанные с ростами. Для них верны аналогичные результаты как и в случае групп. Доказательства требуют лишь небольших изменений.

Наши результаты могут быть обобщены и на случай алгебр Ли бесконечных треугольных матриц с нулями на главной диагонали. В частности, можно определить семейство подалгебр связанных с ростами аналогично ассоциативному случаю.

Как мы отмечали во введении, каждую счетномерную алгебру над полем F можно вложить в $A_{rc}(\infty, F)$ [88]. На самом деле, можно высказать даже более точное утверждение. По теореме 4 параграфа 4 такую алгебру можно вложить в $A(\omega_1, \omega_2)$ для некоторых ω_1, ω_2. Интересно было бы найти описание тех алгебр, которые погружаются в $\mathcal{UT}_r(\infty, K)$.

Сформулируем теперь на языке роста в полосе основные результаты [144], [97].

> Для каждой конечно порожденной ассоциативной алгебры A над полем F существует минимальное вещественное $\alpha \in [0, 1]$ такое, что A можно вложить в $A([n + n^\alpha])$. Для каждого $\alpha \in [0, 1]$ существует конечно порожденная алгебра A такая, что A можно вложить в $A([n + n^\alpha])$ и нельзя вложить в $A([n + n^\beta])$ для $0 \le \beta < \alpha$.
>
> Каждую счетномерную ассоциативную алгебру над полем можно вложить в $A([n + n])$.

Так как доказательство для алгебр нельзя, вообще говоря, прямо применить к группам, следующий результат представляется интересным.

Следствие 9. Группу единиц счетномерной ассоциативной алгебры над полем можно вложить в $G([n + n])$. Для группы единиц $U(A)$ каждой конечно порожденной ассоциативной алгебры A над полем F существует наименьшее $\alpha \in [0, 1]$ такое, что $U(A)$ можно вложить в $G([n + n^\alpha])$ и нельзя вложить в $G([n + n^\beta])$ для $\beta < \alpha$.

Примеры. Сейчас, мы опишем многие примеры, которые легко вкладываются в предложенную нами схему применения роста в полосе для классификации универсальных алгебр. На рисунке 4 звездочки обозначают область, в которой расположены все ненулевые элементы матриц из соответствующей подалгебры X_c из параграфа 5. В случае групп — все ненулевые элементы вне главной диагонали.

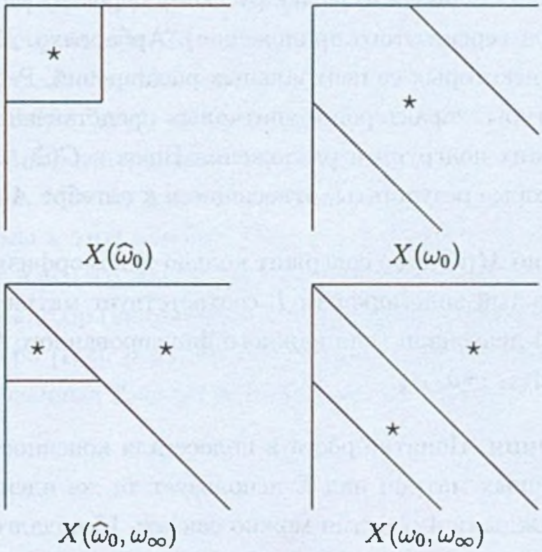


Рисунок 4

a) $X(\widehat{\omega}_0, \widehat{\omega}_0) = X(\widehat{\omega}_0)$. В случае колец (алгебр, алгебр Ли) мы получаем кольцо $M(\widehat{\omega}_0)$ (соответственно, алгебру $A(\widehat{\omega}_0)$, алгебру Ли $L(\widehat{\omega}_0)$) всех бесконечных матриц, у которых только конечное количество ненулевых элементов. Каждое промежуточное кольцо M, $M(\widehat{\omega}_0) \leq M \leq M_c(\infty, R)$, называется кольцом бесконечных матриц (по поводу богатой теории таких колец см. [41], [38], [63] и содержащиеся там ссылки). В случае групп $G(\widehat{\omega}_0)$ известна как стабильная полная линейная группа $\mathrm{GL}(R)$, важный объект алгебраической K-теории (см. [133], [93]).

Алгебра Ли $L(\widehat{\omega}_0)$ содержит аффинную алгебру Ли бесследовых матриц бесконечных матриц (алгебра Каца—Муди отвечающая бесконечной аффинной матрице A_∞^+ [114]).

b) $X(\omega_0, \omega_0) = X(\omega_0)$. Кольцо $M(\omega_0)$ является нерегулярным (в смысле фон Неймана) кольцом, каждый односторонний идеал которого порожден идемпотентами [166]. В случае алгебр Ли $L(\omega_0)$ является алгеброй Ли всех матриц, имеющих лишь конечное число ненулевых диагоналей, и связана с центральными расширениями аффинных алгебр Ли Каца—Муди (в случае групп — групп Каца—Муди) [114]. Группа $G(\omega_0)$ является наименьшей неприводимой подгруппой в $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$. Гудирл [120] поставил вопрос, всегда ли алгебру конечной размерности Гельфанда—Кириллова можно вложить в $A(\omega_0)$. Утвердительный ответ на этот вопрос стал бы чрезвычайно полезным инструментом для различения алгебр с бесконечной размерностью Гельфанда—Кириллова.

c) $X(\widehat{\omega}_0, \omega_\infty)$. Группа $G(\widehat{\omega}_0, \omega_\infty)$ известна как группа Вершика—Керова. Она рассмотрена в приложении Вершика и Керова к русскому переводу [113] (см. также [180] по поводу расширенной версии этого приложения). Арбарелло, Де Кончини и Кац [43] изучали свойства некоторых ее центральных расширений. Работа [10] посвящена изучению ее структуры, характеров и унитарных представлений, [102] содержит описание параболических подгрупп и разложения Брюа в $G(\widehat{\omega}_0, \omega_\infty)$. В [43], кроме того, приведены некоторые результаты, относящиеся к алгебре $A(\widehat{\omega}_0, \omega_\infty)$.

d) $X(\omega_0, \omega_\infty)$. Кольцо $M(\omega_0, \omega_\infty)$ содержит кольцо эндоморфизмов кольца многочленов Лорана L. Каждый эндоморфизм L соответствует матрице с постоянными элементами на каждой диагонали (для каждого фиксированного k для всех i, j выполняется равенство $a_{i,i+k} = a_{j,j+k}$.

Возможные обобщения. Понятие роста в полосе для конечнострочных и конечностолбцовых бесконечных матриц над $\mathbb{Z}$ использует те же идеи, что в случае $\mathbb{N}$, но чуть сложнее. С каждыми 4 ростами можно связать 16 подалгебр. На рисунке 5 мы видим по две возможности для каждой из двуз верхних и двух нижних границ f_1, f_2, g_1, g_2 с той же диаграммой Хассе, что для булевой алгебры подмножеств 4-элементного множества (по техническим причинам мы берем линейные функции $h_i(n) = -n + d_i$ в первом и третьем квадрантах).

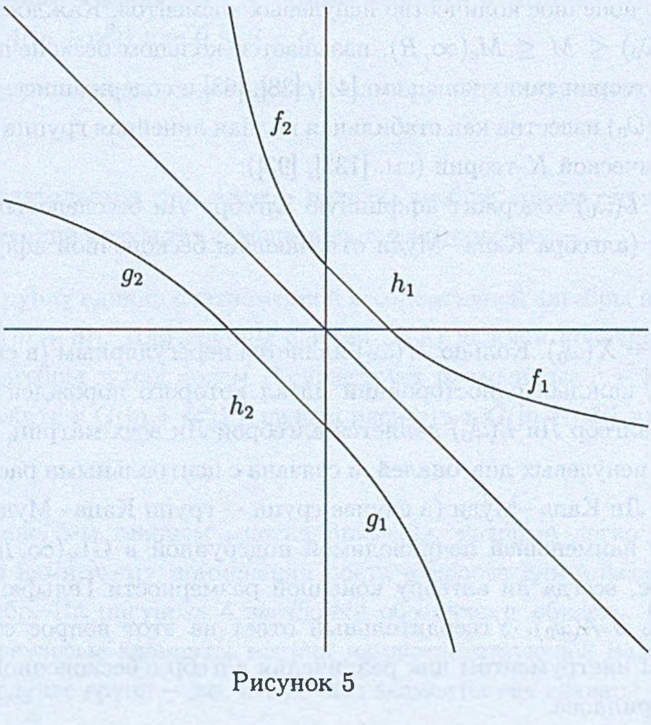


Рисунок 5

Отметим, что для алгебр Ли бесконечных комплексных матриц типа $\mathbb{Z}$ здесь следует различать два важных случая. Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \widehat{\omega}_0$, то мы получим алгебру Ли (индексированную $\mathbb{Z}$) конечных матриц, содержащую аффинную алгебру Каца—Муди как подалгебру бесследовых матриц $\mathfrak{sl}(\infty)$. Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_0$, то мы получим алгебру Ли $\mathfrak{gl}_J$ обобщенных матриц Якоби (с конечным числом ненулевых диагоналей). Ее центральные расширения $\mathfrak{gl}_J^*(\infty)$ играют важную роль в теории представлений. Многие классические конструкции теории конечномерных алгебр Ли применимы к этой алгебре. Некоторые важные бесконечномерные алгебры Ли вкладываются в $\mathfrak{gl}_J^*(\infty)$, так что представления алгебры $\mathfrak{gl}_J^*(\infty)$ становятся представлениями этих алгебр (например, это так для всех аффинных алгебр Каца—Муди и алгебры Вирасоро [114], [52]). Более детальные исследования роста в полосе для матриц индексированных $\mathbb{Z}$ будут опубликованы в будущем.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA GLIWICE

Список литературы

[1] С.В. Алёшин, *Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах* Мат. заметки **11** No.3 (1972), 319–328.

[2] С.В. Алёшин, *Свободная группа конечного автомата* Вестник Московского Унив. **38** No.4 (1983), 10-13.

[3] Х. Басс, Алгебраическая K-теорияю. Мир, Москва 1973.

[4] З.И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц*, Записки научн. семинаров. ЛОМИ **64**, (1976), 12–29.

[5] З.И. Боревич, *О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом*, Вестник ЛГУ, **13** (1976), 16–24.

[6] З.И. Воревич, Н.А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц*, Труды Мат Инст АН СССР **148** (1978) 43–57.

[7] З.И. Воревич, Н.А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом*, Труды Мат Инст АН СССР **165** (1984) 24–42.

[8] Н.А. Вавилов, *Разложение Брюа подгрупп содержащих группу диагональных матриц*, Russian) Записки научн. семинаров. ЛОМИ **114**, (1982), 50–61.

[9] Н.А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых класических групп,* Труды Инст. Мат АН СССР **183** (1990) 29–42.

[10] А.М. Вершик, С.В. Керов, *Об одной весконечномерной группе над конечным полем* Функциональный анализ и приложения **32** (1998), No. 3, 3–10,

[11] Т.В. Головачева, *О ленточной размерности конечнопорожденных ассоциативных алгебр над полем.* Фундаментальная и прикладная математика **1**, (1995), No 2, 385–391.

[12] В. Голубовски, *Подгуппы бесконечных унитреугольных матриц*, Записки научных семинаров ПОМИ, том **338** (2006), 137–154.

[13] В. Голубовски, *Новая мера роста для групп и алгебр*, Алгебра и Анализ, том **19** (2007), No 4, 69-91.

[14] В. Голубовски, *Автоморфизмы корневых деревьев счетной валентности*, Записки научных семинаров ПОМИ, том 343, 199–205.

[15] Р.И. Григорчук, *О проблеме Милнора о групповом росте,*Доклады АН СССР **271** (1983), no. 1, 30–33.

[16] Р.И. Григорчук, *Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних* Известия АН СССР **48** (1984), no. 5, 939–985.

[17] Р.И. Григорчук, В.В. Некрашевич, В.И. Сущанский, *Автоматы, динамические системы и группы* Труды Мат. Института им. Стеклова **231** (2000), 134–214.

[18] Д.Ю. Григорьев *Аналог разложения Брюа для замыкания конуса классических групп Шевалле* Доклады АН СССР **257** (1981), no. 5, 1040–1044.

[19] И.Д. Иванюта *Силовские p-подгруппы группы* GL(q). Украинский Мат. Журнал **32** (1980), no. 6, 813–818.

[20] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, Основы теории групп. Третье издание. Наука, Москва 1982.

[21] Е.А. Ковальчук, *Группы ограниченно-растущих подстановок* Проблемы теории групп и гомологической алгебры Математика, Ярославль (1988), 18–28.

[22] А.И. Кокорин, В.М. Копытов, Линейно упорядоченные группы. Наука, Москва 1972.

[23] Ю.Г. Леонов, *Представление резидуально конечных 2-групп бесконечными унитреугольными матрицами над полем из двух элементов*, Математичні Студії (Львів) **22** (2003), No. 2, 134–140.

[24] Ю.И. Мерзляков, *Еквиподгруппы унитреугольной группы: критерия самонормализуемости* Доклады АН России No.6 **339** (1994) 732–735.

[25] А. Олийнык, *Свободное произведение групп C_2 как группа конечных автоматных подстановок,* Вопросы алгебры — Гомель **14** (1999), 158-165.

[26] А. Олийнык, *О свободных подполугруппах автоматных преобразований,* Мат. Заметки **63** (1998), No. 1-2, 215-224.

[27] А.С. Олийник, В.И. Сущанский, *Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц*, Мат. заметки **67** (2000), No. 3-4, 320–324.

[28] П.П. Павлов, *Силовские p-подгруппы полной линейной группы над простым полем характеристики p,* Известия Акад. Наук СССР. Сер. Мат. **16** (1952), 437–458.

[29] Б.И. Плоткин, *О бесконечномерных линейных группах* Доклады АН СССР **153** (1963), 42–45.

[30] И.Н. Санов, *Одно свойство представления свободной группы* Доклады АН СССР **57** (1947) 657-659.

[31] В.Н. Силаев, *О ленточной размерности кольца формальных рядов.* Успехи мат. наук **56** (2001), no. 4, 157–158.

[32] М.П. Седнева, *Замечания о бесконечномерных линейных группах* Латвийский сборник, Зинатне, Рига(1965) no. 6, 59–62.

[33] В.А. Толстых, *Бесконечномерные полные линейные группы имеют конечную ширину,* Сиб. Мат. Ж. **47** (2006), No. 5, 1160–1166.

[34] И.Р. Шафаревич, *О некоторых бесконечномерных группах II.* Известия АН СССР **45** (1981), no. 1, 214–226, 240.

[35] G. Abrams, *On dense subrings of* RFM(R). J. Algebra **110** (1987), no. 1, 243–248.

[36] G. Abrams, *On the existence of rings R with R isomorphic to* RFM(R). J. Austral. Math. Soc. Ser. A **42** (1987), no. 1, 129–131.

[37] G. Abrams, J. Haefner, *Picard groups and infinite matrix rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 7, 2737–2752.

[38] G. Abrams, J.J. Simon, *Isomorphisms between infinite matrix rings: a survey.* Contemp. Math. **259** (2000), 1–12.

[39] H.S. Allen, *Rings of infinite matrices.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **8** (1957) 117–118.

[40] J.L. Alperin, R.B. Bell, Groups and representations, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1995.

[41] F.W. Anderson, K.R. Fuller, Rings and categories of modules, Spriger-Verlag, New York-Berlin, 1973.

[42] K.I. Appel and F.M. Djorup, *On a group generated by a free semigroup,* Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 838-840.

[43] E. Arbarello, C. De Concini, V.G. Kac, *The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves.* Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989), 171–190.

[44] D.G. Arrell, *The normal subgroup structure of the infinite general linear group.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **24** (1981), no. 3, 197–202.

[45] D.G. Arrell, *The subnormal subgroup structure of the infinite general linear group.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **25** (1982), no. 1, 81–86.

[46] D.G. Arrell, E.F. Robertson, *Infinite dimensional linear groups.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **78** (1977/78), no. 3-4, 237–240.

[47] C.M. Bang, *A condition for two matrices to be inverses of each other.* Amer. Math. Monthly (1974), 764–767.

[48] A.J. Berrick, *Group extensions and their trivialization.* Enseign. Math. (2) **31** (1985), no. 1-2, 151–172.

[49] A.J. Berrick, *Two functors from abelian groups to perfect groups.* J. Pure Appl. Algebra **44** (1987), no. 1-3, 35–43.

[50] A.J. Berrick, R.G. Downey, *Perfect McLain groups are superperfect.* Bull. Austral. Math. Soc. (2) **29** (1984) 249–257.

[51] A.J. Berrick, M.E. Keating, *Rectangular invertible matrices,* Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 4, 297–302.

[52] Y. Billig, A. Pianzola, *Free Kac-Moody groups and their Lie algebras.* Algebr. Represent. Theory **5** (2002), no. 2, 115–136.

[53] M. Bhattacharjee, *The ubiquity of free subgroups in certain inverse limits of groups,* J. Algebra **172** (1995) 134-146.

[54] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Chap.IV Groupes de Coxeter and systemes de Tits, Hermann Paris, 1968.

[55] A.M. Brunner, S. Sidki, *The generation of* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ *by finite state automata,* Internat. J. Algebra Comp. **8** (1998) 127-139.

[56] R.M. Bryant, D. Evans, *Small index property for free groups and relatively free groups,* J. London Math. Soc. (2) **55** (1997), 363-369.

[57] R.M. Bryant, J. L. J. Groves, *Automorphisms of free metabelian groups of infinite rank,* Comm. Algebra **20** (1992), 783-814.

[58] R.M. Bryant, C.K. Gupta, *Automorphisms of free nilpotent-by-abelian groups,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **114** (1993), 143-147.

[59] R.M. Bryant, O. Macedońska, *Automorphisms of relatively free nilpotent groups of infinite rank,* J. Algebra **121** (1989), 388-398.

[60] R.G. Burns, I.H. Farouqi, *Maximal normal subgroups of the integral linear group of countable degree,* Bull. Austral. Math. Soc. **15** (1976), 439-451.

[61] R.G. Burns, Lian Pi, *Generators for the bounded automorphisms of infinite-rank free nilpotent groups,* Bull. Austral. Math. Soc. **40** (1989), 175-187.

[62] S. Burris, H.P. Sankappanavar, A course in universal algebra, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[63] V. Camillo, F.J. Costa-Cano, J. J. Simon, *Relating properties of a ring and its ring of row and column finite matrices,* J. Algebra **244** (2001), 433–449.

[64] R. Camina, *Some natural subgroups of the Nottingham group*, J. Algebra **196** (1997) 101-113.

[65] K. Chiba, *Free subgroups and free subsemigroups of division rings,* J. Algebra **184** (1996), 570-574.

[66] B. Chandler, W. Magnus, The history of combinatorial group theory. A case study in the history of ideas. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 9. Springer-Verlag, New York, 1982.

[67] J.S. Clowes, K.A Hirsch, *Simple groups of infinite matrices,* Math. Zeitschr. Bd **58** (1953), 1–3. (MR 14,1060d)

[68] J.M. Cohen, *Aspherical 2-complexes,* J. Pure Appl. Algebra **12** (1978), 101-110.

[69] R. Cohen, *Classes of automorphisms of free groups of infinite rank,* Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1973), 99-120.

[70] P.M. Cohn, *Some remarks on the invariant basis property,* Topology No. 5, (1966), 215–228.

[71] P.M. Cohn, *Generalized rational identities,* Proceedings of a Conference on ring theory at Park City, Utah 1971, New York-London 1972, 107–115.

[72] R.G. Cooke, Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan and Co., London, 1950.

[73] R.O. Davies, M.F. Drazin, M.L. Roberts, *Universal properties of infinite matrices,* J. Algebra **180** (1996), 402–411.

[74] J. Denes, C. Pasztor, *Sur un probleme de substitution de P. Vermes.* Magyar Tud. Akad. Mat. Kutaty Int. Kızl. 7 (1962) 317–322.

[75] L.E. Dickson, Linear groups, Teubner, Leipzig, 1901.

[76] J.D. Dixon, *Most finitely generated permutation groups are free*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990) 222-226.

[77] J.D. Dixon, B. Mortimer, Permutation groups, Springer, New York 1996.

[78] M. Droste, R. Göbel, *McLain groups over arbitrary rings and orderings.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (3) **117** (1995) 439–467.

[79] M. Droste, R. Göbel, *The automorphism group of generalized McLain groups.* In: Ordered groups and infinite permutation groups (ed. by W. C. Holland) Kluwer Academic Publ. New York (1995) 97–120.

[80] M. Droste, R. Göbel, *The automorphism groups of Hahn groups.* In: Ordered algebraic structures (Curacao 1995) Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1997) 183–215.

[81] D.B.A. Epstein, *Almost all subgroups of a Lie group are free*, J. Algebra **19** (1971) 261-262.

[82] D.M. Evans, *Subgroups of small index in infinite general linear groups.* Bull. London Math. Soc. **18** (1986), no. 6, 587–590.

[83] I.H. Farouqi, *On an infinite integral linear group,* Bull. Austral. Math. Soc., 4, (1971), 321-342.

[84] P. Galanopoulos, A.G. Sisakis, *Hausdorff matrices and composition operators* Illinois J. Math. **45** (3) (2001), 757–773.

[85] H.L. Garabedian, *Hausdorff matrices.* Amer. Math. Monthly *46*, (1939). 390–410.

[86] P.M. Gartside, R.W. Knight, *Ubiquity of free subgroups*, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), no 5, 624–634.

[87] E. Ghys, P. de la Harpe, Sur le groupe hyperbolique d'apres Gromov. Bikhauser, Boston, 1990.

[88] K.R. Goodearl, P. Menal, J. Moncasi, *Free and residually Artinian regular rings* J. Algebra **156** (1993), No. 2, 407–432.

[89] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **53** (1981), 53–73.

[90] H. Gross, Quadratic forms in infinite-dimensional vector spaces. Progress in Mathematics, 1. Birkhauser, Boston, Mass., 1979.

[91] C.K. Gupta, W. Holubowski, *Automorphisms of a free group of infinite rank*, Алгебра и Анализ, том **19** (2007), No 2, 74–85.

[92] J. Haefner, A. del Rio, J.J. Simon, *Isomorphisms of row and column finite matrix rings*. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 6, 1651–1658.

[93] A.J. Hahn, O.T. O'Meara, The classical groups and K-theory. With a foreword by J. Dieudonne. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[94] J.I. Hall, *Locally finite simple groups of finitary linear transformations* Finite and locally finite groups, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1995), 147–188.

[95] P. Hall, B. Hartley, *The stability group of a series of subgroups*. Proc. London Math. Soc. (3) **16** (1966), 1-39.

[96] J. Hannah, K.C. O'Meara, *A new measure of growth for countable-dimensional algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), no. 2, 223–227.

[97] J. Hannah, K.C. O'Meara, *A new measure of growth for countable-dimensional algebras. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 1, 111–136.

[98] F. Hausdorff, *Summationsmethoden und momentfolgen I*, Math. Zeitschrift, **9** (1921), 74–109.

[99] J. Hausen, *Infinite general linear groups over rings*. Arch. Math. (Basel) **39** (1982), no. 6, 510–524.

[100] W. Holubowski, *Subgroups of infinite triangular matrices containing diagonal matrices*, Publ. Math. Debrecen **59** (1-2), (2001) 45-50.

[101] W. Holubowski, *Parabolic subgroups of Vershik-Kerov's group*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2579–2582.

[102] W. Hołubowski, *Most finitely generated subgroups of infinite unitriangular matrices are free*, Bull. Austral. Math. Soc. **66** (2002), 419–423.

[103] W. Holubowski, *An inverse matrix of an upper triangular matrix can be lower triangular*, Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. **22** (2002), No. 2, 161–166.

[104] W. Hołubowski, *A normal structure of McLain groups*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. **45** (2002), 171–177.

[105] W. Hołubowski, *Free subgroups of the group of infinite unitriangular matrices,* Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), No. 1, 81–86.

[106] W. Holubowski, *The ubiquity of free subsemigroups of infinite triangular matrices,* Semigroup Forum **66** (2003), No. 2, 231–235.

[107] W. Holubowski, *Groups of infinite matrices,* Proccedings of 'Groups St. Andrews 2005', Cambr. Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Notes in Math. vol. **340** (2007), 401–405.

[108] L.E.P. Hupert, A. Leggeti, *On the square roots of infinite matrices.* Amer. Math. Monthly No.1 (1989), 34–38.

[109] I.D. Ion, M. Constantinescu, *Sur les anneaux Dedekind-finis,* Italian J. Pure Appl. Math. No. 7, (2000), 19–25.

[110] N. Jacobson, *Structure theory of simple rings without finiteness assumptions.* Trans. Amer. Math. Soc. **57**, (1945). 228–245.

[111] N. Jacobson, *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree.* Ann. of Math. (2) **46**, (1945). 695–707.

[112] N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Providence 1956.

[113] G.D. James, The representation theory of the symmetric groups, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1978 (Russian translation - Mir, Moscow 1982).

[114] V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[115] R.V. Kadison, *Infinite general linear groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **76**, (1954). 66–91.

[116] I. Kaplansky, Rings of operators. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968.

[117] I. Kaplansky, *Forms in infinite-dimensional spaces.* Anais Acad. Brasil. Ci. **22**, (1950). 1–17.

[118] J.L. Kelley, General topology. Van Nostrand, New York 1955.

[119] A.A. Klein, *Free subsemigroups of domains,* Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 339-341.

[120] G.R. Krause, T.H. Lenagan, Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[121] N.V. Kroshko, V.I. Sushchanskii, *Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embedings* Archiv Math. **71** (1998), 173–182.

[122] L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin, *On some infinite-dimensional linear groups.* Comm. Algebra **29** (2001), no. 2, 519–527.

[123] B. Laschinger, *Automorphismengruppen freier Moduln von unendlichem Rang.* J. Algebra 122 (1989), no. 1, 15–63.

[124] V.M. Levchuk, *Chevalley groups and their unipotent subgroups*, Contemp. Math. **131** (1989), 227–242.

[125] F.W. Levi, |textitThe commutator group of a free product J. Indian Math. Soc. 4 (1940) 136-144.

[126] R.C. Lyndon, P.E. Schupp, Combinatorial group theory, Springer, Berlin 1977.

[127] O. Macedońska-Nosalska, *Note on automorphisms of a free abelian group*, Canad. Math. Bull. **23** (1980), 111-113.

[128] O. Macedońska-Nosalska, *The abelian case of Solitar's conjecture on infinite Nielsen transformations*, Can. Math. Bull. **28** (1985), 223-230.

[129] G.W. Mackey, *Infinite-dimensional group representations.* Bull. Amer. Math. Soc. **69** 1963 628–686.

[130] D. Macpherson, *Maximal subgroups of infinite-dimensional general linear groups.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **53** (1992), no. 3, 338–351.

[131] W. Magnus, *Beziehungen zwishen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring*, Math. Ann **111** (1935) 259-280.

[132] W. Magnus, A. Karras and D. Solitar, Combinatorial group theory. John Wiley & Sons, Inc., New York 1966.

[133] B.A. Magurn, An algebraic introduction to K-theory, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[134] L. Makar-Limanov, *On free subsemigroups of skew fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 189-191.

[135] G. Maxwell, *Infinite general linear groups over rings.* Trans. AMS **151** (1970), 371–375.

[136] D.H. McLain, *A characteristically simple group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **50** (1954), 641–642.

[137] J. Milnor, *Problem 5603,* Amer. Math. Monthly, 75 (1968), 685–686.

[138] R.G. Moller, *The automorphism groups of regular trees,* J. London Math Soc. **43**, No. 2, (1991), 236–252.

[139] Yu.A. Neretin, Categories of symmetries and infinite-dimensional groups. Translated from the Russian by G. G. Gould. London Math. Soc. Monographs. New Ser. 16, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.

[140] H. Neumann, Varietes of groups, Springer, Berlin, 1967.

[141] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen,* Math. Annalen **91** (1924), 169-209.

[142] J. Okniński and A. Salwa, *Generalised Tits alternative for linear semigroups,* J. Pure Applied Algebra **103** (1995), 211-220.

[143] A. Olijnyk and V.S. Sushchansky, *Representation of free products by infinite unitringular matrices over finite field,* Internat. J. Algebra Comput **14** (2004) 741–749.

[144] K.C. O'Meara, *A new measure of growth for countable-dimensional algebras. II.* J. Algebra **172** (1995), no. 1, 214–240.

[145] R.E. Phillips, D.J.S. Robinson, J.E. Roseblade, *Maximal subgroups and chief factors of certain generalized soluble groups.* Pac. J. Math. **37** (1971) 475–480.

[146] L. Ribes and P. Zalesskii, Profinite groups. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 2000.

[147] E.F. Robertson, *A remark on the derived group of* GL(R). Bull. London Math. Soc. (1969) 160–162.

[148] E.F. Robertson, *On certain subgroups of* GL(R). J. Algebra **15** 1970 293–300.

[149] D.J.S. Robinson, *Finitness conditions on subnormal and ascendant Abelian subgroups.* J. Algebra **10** (1968) 333–359.

[150] D.J.S. Robinson, Finitness conditions and generalized soluble groups, Part II. Springer Verlag, New York-Berlin 1972.

[151] D.J.S. Robinson, A course in the theory of groups, Springer V., New York 1982.

[152] J.E. Roseblade, *The automorphism group of McLain's characteristically simple group.* Math. Z. **82** (1963) 267–282.

[153] A.Rosenberg, *The structure of the infinite general linear group,* Ann. of Math. (2) **68** (1958) 278-294.

[154] I.R. Shafarevitsh *On some infinite dimensional groups.* Simposio Internazionale di Geometria Algebrica, Roma (1967), 208–212.

[155] J.D. Sharp, S. Thomas, *Uniformization problems and the cofinality of the infinite symmetric group.* Notre Dame J. Formal Logic **35** (1994), no. 3, 328–345.

[156] R.W. Sharpe, *On the structure of the unitary Steinberg group.* Ann. of Math. (2) **96** (1972), 444–479.

[157] R.W. Sharpe, *Surgery and unitary K_2. Algebraic K-theory,* III: Hermitian K-theory and geometric applications (Proc. Conf. Seattle Res. Center, Battelle Memorial Inst., 1972), pp. 464–470. Lecture Notes in Math, Vol. **343**, Springer, Berlin, 1973.

[158] R.W. Sharpe, *On the structure of the Steinberg group* St(Λ). J. Algebra **68** (1981), no. 2, 453–467.

[159] W. Sierpiński, *Sur une décomposition d'ensembles.* Monatsh. Math. **35** (1928), 239–248.

[160] R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press , Yale, 1967.

[161] A. Stepanov, N. Vavilov *Decomposition of transvections: a theme with variations.* $K-$ Theory **19** (2000), 109–153.

[162] A. Strojnowski, W. Wojas, *Some remarks on O-groups* Demonstratio-Math. **23** (1990), no. 3, 797–801.

[163] J. Tits, *Sur le groupe des automorphismes d'un arbre,* Essays on topology and related topics (Memoires dedies a Georges de Rham), Springer, New York (1970), 188–211.

[164] J. Tits, *Free subgroups in linear groups.* J. Algebra **20** (1972) 250–270.

[165] S. Thomas, *The cofinalities of the infinite-dimensional classical groups.* J. Algebra **179** (1996), no. 3, 704–719.

[166] D.V. Tjukavkin, *Rings all of whose one-sided ideals are generated by idempotents,* Comm. Algebra 17 (1989), no. 5, 1193–1198.

[167] S. Wagon, The Banach-Tarski paradox. (Cambridge University Press, Cambridge 1993).

[168] A.J. Weir, *Sylow p-subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic p,* Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 454–464.

[169] J.S. Wilson, *On characteristically simple groups.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1) **80** (1976) 19–35.

[170] J.S. Wilson, *Groups with many characteristically simple subgroups.* Math Proc. Camb. Phil. Soc. (2) **86** (1979) 193–197.

[171] J.S. Wilson, Profinite groups, Oxford University Press, Oxford 1998.

[172] P. Vermes, *Some infinite systems of linear equations in statistics.* Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. 10 1967 17–24.

[173] P. Vermes, *Linear independence in basic sets of polynomials.* Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. 9 1966 15–18.

[174] P. Vermes, *The group of both row- and column-finite infinite matrices.* Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. 7 1964 89–90.

[175] P. Vermes, *Multiplicative groups of row- and column-finite infinite matrices.* Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. 5 1962 15–23.

[176] P. Vermes, *Matrix structure of basic sets of polynomials.* Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. 3–4 1960/1961 383–387.

[177] P. Vermes, *Note on certain differential equations of infinite order.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55=Indagationes Math. 14, (1952). 28–31.

[178] P. Vermes, *Non-associative rings of infinite matrices.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55 = Indagationes Math. 14, (1952). 245–252.

[179] P. Vermes, M. N. Mikhail, *Generated basic sets of polynomials.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 = Indag. Math. 16, (1954). 556–559.

[180] A.M. Vershik , *Asymptotic aspects of the representation theory of symmetric groups,* Selecta Math. Sovietica 11, No. 2 (1992), 159–180.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУПП БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

СОДЕРЖАНИЕ

В монографии исследуются группы бесконечных матриц над произвольным ассоциативным кольцом. Разработаны техники работы с бесконечными матрицами использующее аналоги понятий и метод применяемых в теории линейных групп, включая обобщения сетей идеалов и сетевых подгрупп. Введено понятие роста и усовершенствовано рапнее использованные понятия в исследованию структурной теории. Найдены семейства свободных подгрупп в группе верхних бесконечных унитреугольных матриц. Полученные результаты применено тоже к описанию автоморфизмов свободных групп счетного ранга и подгрупп групп автоморфизмов графов счетной валентности.

ALGEBRAICZNE WŁASNOŚCI
GRUP MACIERZY NIESKOŃCZONYCH

STRESZCZENIE

W monografii badane są grupy macierzy nieskończonych nad dowolnym pierścieniem łącznym. Opracowano metody pracy z macierzami nieskończonymi, wykorzystujące analogi pojęć i metod stosowanych w teorii grup liniowych, włączając w to uogólnienia sieci i podgrup sieciowych. Wprowadzono pojęcie wzrostu i udoskonalono wcześniej wykorzystywane pojęcia w badaniu struktury podgrup. Znaleziono rodziny podgrup wolnych w grupie macierzy nieskończonych unitrójkątnych. Otrzymane rezultaty zastosowano do opisania automorfizmów grup wolnych przeliczalnej rangi i podgrup grupy automorfizmów grafów z przeliczalnymi stopniami wierzchołków.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
w Gliwicach

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel. (32) 237-13-81, faks (32) 237-15-02
www.wydawnictwopolitechniki.pl

Sprzedaż i Marketing
tel. (32) 237-18-48
wydawnictwo_mark@polsl.pl

Nakł. 50 + 44	Ark. wyd. 10	Ark. druk. 8,75	Papier offset 70x100,80 g
Oddano do druku 17.08.2017 r.	Podpisano do druku 17.08.2017 r.	Druk ukończono we wrześniu 2017 r.	

Wydrukowano w Centrum Poligrafii Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Łużycka 24, tel./fax: 32 231 54 18, 32 237 21 97
zam. 193/17

14,40

Książki Wydawnictwa Politechniki Śląskiej
można nabyć w księgarniach:

GLIWICE
- **KSIĘGARNIA WYDAWNICTWA POL. ŚL. – Wydział Górnictwa i Geologii,** ul. Akademicka 2 (32-237-17-87)
- „MERCURIUS", ul. Prymasa S. Wyszyńskiego 14 b (32-230-47-22, 32-750-84-19)

BIAŁYSTOK
- Dom Książki Księgarnia Naukowo-Techniczna, ul. Lipowa 43 (85-742-02-25)

BYTOM
- Hurtownia Książki Technicznej „EWA", ul. Piekarska 96/13 (32-281-18-18)

GDAŃSK
- „EKO-BIS", ul. Dyrekcyjna 6 (58-305-28-53)
- PWN – ul. Narutowicza 11/12 (58-347-11-25), (507-153-408)

KATOWICE
- "Hirudina" Bartłomiej Dudek, księgarnia – antykwariat, ul. Ks. Bednorza 14, (32-352-04-48)

KRAKÓW
- Punkt Sprzedaży WND – AGH, Al. Mickiewicza 30 (12-634-46-40)
- Główna Księgarnia Naukowa – ul. Podwale 6 (12-422-37-17, 12-292-65-11)

ŁÓDŹ
- MAXIMUS Sp. z o.o., ul. Przędzalniana 133/22 (42-255-81-18)

POZNAŃ
- Księgarnia „Akademicka", ul. Piotrowo 3 (61-665-23-24)
- Księgarnia Akademii Ekonomicznej (ekonomia, zarządzanie), ul. Powstańców Wielkopolskich 16 (61-854-31-48)

WARSZAWA
- Studencka - ul. Polna 13, pawilon 7 i 8 (obok PW) (22-628-77-58)
- Ekonomiczna - LEKI - ul. Grójecka 67 (22-666-98-02)
- Dom Wydawniczy MEDIUM - ul. Karczewska 18, (22-512-60-62)
- Księgarnia Akademicka OW PW, ul. Plac Politechniki 1 (22-234-61-44)

BG Politechniki Śląskiej
nr inw.: 105 - 118777

Mg S.118777

ISBN 978-83-7880-475-8

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5
tel. (32) 237-13-81, faks (32) 237-15-02
www.wydawnictwopolitechniki.pl
Dział Sprzedaży i Reklamy
tel. (32) 237-18-48
e-mail: wydawnictwo_mark@polsl.pl
http://www.polsl.pl/Jednostki/RJO2-WPS